1. КИНЕМАТИКА

1.1. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика изучает движение материальных тел, не останавливаясь на причинах, вызывающих эти движения.

Кинематика представляет собой, с одной стороны, введение в динамику, так как установление основных кинематических понятий и зависимостей необходимо для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например, при изучении передач движения в механизмах.

Под движением как уже было сказано ранее понимается в механике изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Поэтому всякое движение имеет относительный характер.

Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом **систему отсчета**.

Выбор системы отсчета в кинематике произволен (определяется целью исследования), и в отличие от динамики все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-нибудь одной системе отсчета, будут справедливы и в любой другой системе отсчета. В технической практике за основную или «неподвижную» систему отсчета обычно берется система отсчета, неподвижная относительно земли, и движение тел по отношению к этой системе отсчета принимается условно за абсолютное.

Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство. Все измерения в нем производятся на основании методов евклидовой геометрии. За единицу длины при измерении расстояний принимается 1м.

Время в механике считается универсальным, т. е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета. За единицу времени принимается 1с. Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени. Отсчет времени ведется от некоторого **начального момента**, о выборе которого в каждом случае условливаются. Всякий данный **момент времени** определяется числом секунд, прошедших от начального момента; разность между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется **промежутком времени**.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) - значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта будем начинать с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Изучение кинематики начнем с изучения движения простейшего объекта - точки (кинематика точки), а затем перейдем к изучению кинематики твердого тела.

1.1. Кинематика точки

1.1.1. Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих способов: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения точки

Пусть точка M движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$ (Рис. 1.1).

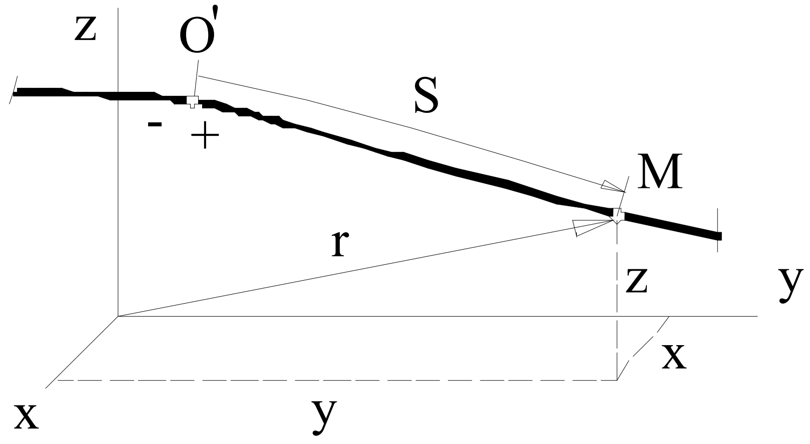


Рис. 1.1

Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат *O* в точку *M*.

При движении точки *M* данный вектор будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, он является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента *t* - времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Это равенство определяет закон движения точки в **векторной форме**, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий радиус-вектор и найти положение движущейся точки. Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется **траекторией** точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется **прямолинейным**, а если кривая - **криволинейным**. Геометрическое место концов радиуса-вектора, т. е. **годограф** этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Координатный способ задания движения точки

Аналитически, как известно, вектор задается его проекциями на координатные оси. В прямоугольных декартовых координатах для радиуса-вектора $\vec{r}$ будет справедливо следующее:

$$r_x = x;\ r_y = y;\ r_z = z,$$

где x; y; z - декартовы координаты точки (Рис.1.1). Т.е. положение точки в пространстве можно определить и ее декартовыми координатами. Если ввести единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей, получим для радиуса-вектора выражение

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

Если вместо зависимости $\vec{r} = \vec{r}(t)$ будут заданы координаты x, y и z точки как функции времени

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).,$$

то такой способ задания движения точки будет называться **координатным**.

Если движение точки происходит все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость *Oxy,* получим в этом случае два уравнения движения:

$$x = f_1(t), y = f_2(t).$$

Наконец, при прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось *Ox,* движение будет определяться одним уравнением

$$x = f_1(t).$$

Описанные выше уравнения представляют собой одновременно уравнения траектории точки в **параметрической форме**, где роль параметра играет время *t.* Исключив из уравнений движения время *t,* можно найти уравнение траектории в **координатной форме**, т.е. в виде, дающем зависимость между координатами точки. Например:

$$z = f_4(x, y)\ .$$

Естественный способ задания движения точки

Естественным (или траекторным) способом задания движения точки удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Например, заранее известна траектория кабины лифта, железнодорожного вагона, движущегося по рельсам и т.д.

Т.е. естественный способ описания движения тесно связан с человеческой деятельностью, вытекает из практической потребности рассмотрения перемещений по железным и автомобильным дорогам, по рекам и т.п.

При задании движения естественным способом необходимо введение особых осей. Эти оси, называемые *осями естественного трехгранника* (естественными или скоростными осями).

Введем предварительно некоторые понятия для определения направления указанных осей (см. рис.1.2).

Пространственную кривую, представляющую собой траекторию движения точки, можно разбить на элементарные участки. На каждом элементарном участке пространственная кривая может быть представлена в виде плоской кривой. Сама плоскость, к которой бесконечно близко расположены точки элементарного участка пространственной кривой, называется **соприкасающейся плоскостью**.

В случае плоской кривой соприкасающейся плоскостью для всех ее точек является плоскость, в которой лежит сама кривая.

Перпендикулярно соприкасающейся плоскости расположены касательная и нормальные плоскости.

Направление касательной плоскости определяется направлением касательной в рассматриваемой точки кривой (точка *M*). Нормальная плоскость перпендикулярна также касательной плоскости.

Направлены естественные оси следующим образом:

ось $M\tau$ — по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s, называется касательной осью;

ось Mn *Mn* — по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории, называется *главной нормалью*;

ось *Mb* — перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей, называется *бинормалью*

Т.е. движение точки считается описанным **естественным способом**, если для неё определены (Рис.1.2): траектория , координата $s = s(t)$ вдоль траектории, измеренная в линейных единицах, определяющая длину дуги от начала отсчета (O') и для определенности необходимо условится о направлении отсчета дуговой координаты s (положительное (+) и отрицательное (-) направления).

Заметим, что величина *s* в уравнении определяет положение движущейся точки, а не пройденный ею путь.

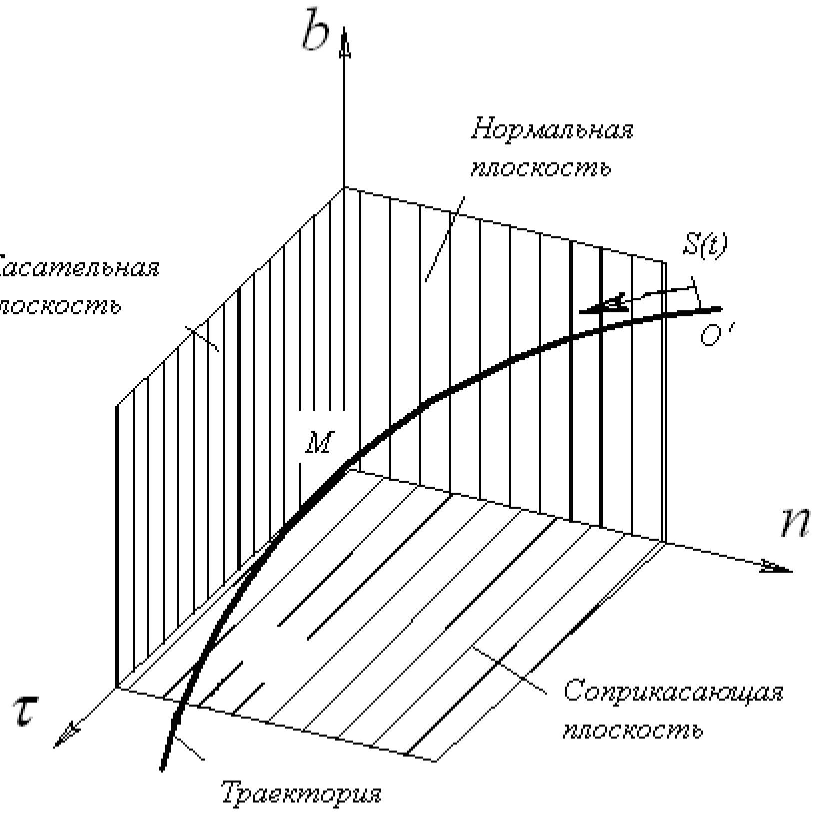


Рис.1.2.

1.1.1. Определение скорости и ускорении точки при различных способах задания ее движения

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются векторные величины – скорость и ускорение точки.

Рассмотрим, как определяются указанные кинематические характеристики движения точки при различных способах задания ее движения.

Определение скорости и ускорения точки при векторном способе задания ее движения

Определение скорости точки

Скоростью точки называется вектор, определяющий в каждый момент времени быстроту и направления движения скорости.

Если точка в равные, произвольно взятые промежутки времени проходит одинаковое расстояния, то ее движение называется равномерным, а в противном случае движение точки называется неравномерным или переменным.

Как прямолинейное, так и криволинейное движение точки может быть или равномерным или неравномерным (переменным)

Рассмотрим случай криволинейного и неравномерного движения точки. Пусть движущаяся точка находится в момент времени t в положении M, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}$ а в момент t_1 приходит в положение M_1, определяемое вектором $\vec{r}_1$ (Рис.1.3).

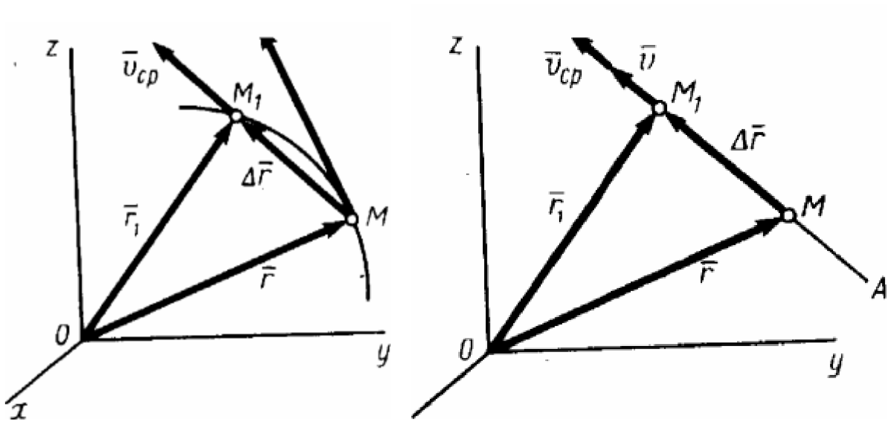


Рис.1.3

Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\vec{MM}_1$, который будем называть **вектором перемещения точки**. Этот вектор направлен по хорде, если точка движется, криволинейно, и вдоль самой траектории *AB,* когда движение является прямолинейным. Из треугольника OMM_1 видно, что $\vec{r} + \vec{MM}_1 = \vec{r}_1$ следовательно, $\vec{MM}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$. Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую **средней по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени** Δt:

$$\vec{v}_{cp} = \vec{MM}_1 / \Delta t = \Delta\vec{r} / \Delta t.$$

Направлен вектор $\vec{v}_{cp}$ так же, как и вектор $\vec{MM}_1$, т. е. при криволинейном движении вдоль хорды MM_1, в сторону движения точки, а при прямолинейном движении - вдоль самой траектории.

Скоростью точки в данный момент времени называется векторная величина, к которой стремится средняя скорость при стремлении промежутка времени к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Таким образом, **скорость точки равна первой производной от радиуса-вектора этой точки по времени**.

Так как предельным направлением отрезка MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени **направлен по касательной к траектории точки в сторону движения**.

При прямолинейном движении вектор скорости все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться лишь численно; при криволинейном движении кроме числового значения все время изменяется и направление вектора скорости точки.

Размерность скорости: (ед. длины)/(ед. времени). В качестве единиц измерения применяют обычно м/с или км/ч.

Определение ускорения точки

Движение точки с неизменной по модулю и направлению скоростью (равномерное прямолинейное движений) встречается на практике крайне редко. В большинстве случаев скорость точки при движении изменяется.

Величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки (как по модулю, так и по направлению), называется ускорением точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость v, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость v_1. Тогда за промежуток времени Δt скорость точки получает приращение $\Delta v = v_1 - v$. Для построения вектора Δv отложим от точки M вектор, равный v_1, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет v_1, а одной из сторон v. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор Δv. Заметим, что вектор Δv всегда направлен в сторону вогнутости траектории (см. рис.1.4).

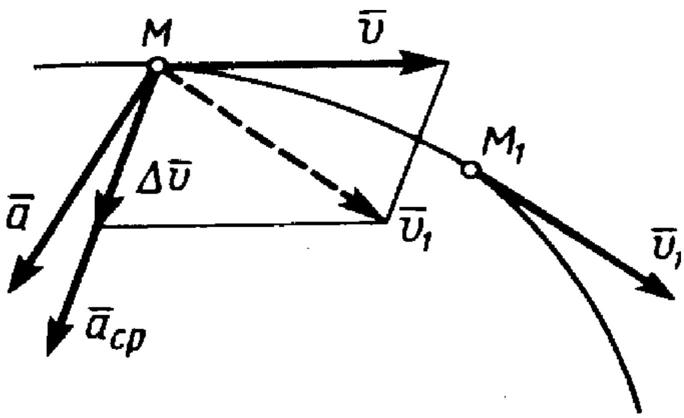


Рис. 1.4.

Отношение приращения вектора скорости Δv к соответствующему промежутку времени Δt определяет **вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:** $a_{cp} = \Delta v / \Delta t$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор Δv, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени *t* называется векторная величина *a, к* которой стремится среднее ускорение a_{cp} при стремлении промежутка времени *M* к нулю:

a = lim $\Delta v / \Delta t = dv/dt$ или $\bar{a} = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$

Следовательно, вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Размерность ускорения L/T^2, т. е. длина/(время)^2; в качестве единицы измерения применяется обычно м/с$^{1.}$

Из формулы $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$ следует также, что вектор ускорения точки *a* равен отношению элементарного приращения вектора скорости *dv* к соответствующему промежутку времени *dt.*

Найдем, как располагается вектор *a* по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор *a* направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения *a,* так же как и вектор a_{cp} лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости.

Если траектория не является плоской кривой, т.е. рассматривается общий случай ***вектор ускорения a лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.***

Однако из выше сказанного можно сделать вывод, что при данном способе движения точно определить направление ускорения точки *M* в данный момент времени невозможно.

Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

Найдем, как вычисляются скорость и ускорение точки, если ее движение задано уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Формулы, определяющие значения *v* и *a,* содержат производные по времени от векторов *r* и *v*.

В равенствах, содержащих производные от векторов, переход к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью **следующей теоремы**:

проекция производной от вектора на ось, неподвижную в данной системе отсчета, равна производной от проекции дифференцируемого вектора на ту же ось.

Другими словами, если мы взяли вектор, взяли его производную, эту производную спроектировали на ось, то мы получим аналогичный результат, если вначале спроектируем вектор на ось, а затем возьмем от этой проекции производную.

Определение скорости точки. Ранее было получено, что вектор скорости точки $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$. Отсюда на основании вышеуказанной теоремы найдем

$v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z =dz/dt$ *или* $v_x = x$, $v_y = y$, $v_z = z$,

$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$

где точка над буквой есть символ дифференцирования по времени.

Таким образом, **проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени**.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и *направление.*

Углы α, β, γ , которые вектор *v* образует с координатными осями по формулам

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\ ,\ \cos\alpha=v_x/v, \cos\beta=v_y/v, \cos\gamma=v_z/v$$

Определение ускорения точки. Вектор ускорения точки $\bar{a}=\dfrac{d\bar{v}}{dt}$. Отсюда на основании вышеуказанной теоремы получаем:

$$a_x=dv_x/dt=d^2x/dt^2,$$
$$a_y=dv_y/dt=d^2y/dt^2,$$
$$a_z=dv_z/dt=d^2z/dt^2,$$

или $a_x = v_x = x,\ a_y = v_y = y,\ a_z = v_z = z.$

Проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым, производным от соответствующих координат точки по времени.

Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ ,\ \cos\alpha_1=a_x/a, \cos\beta_1=a_y/a, \cos\gamma_1=a_z/a$$

где $\alpha_{1,}\beta_{1,}\gamma_1$— углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

В случае же прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x=f_1(t).$, будет v_x = dx/dt, $a_x=dv_x/dt=d^2x/dt^2$,

Скорости и ускорение точки при естественном способе задания движения

Рассмотрим, как вычисляются скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения, т. е. когда заданы траектория точки и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $s=f(t)$.

В этом случае значения векторов v и a определяют по их проекциям не на оси системы отсчета $Oxyz$, а на подвижные оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке M и движущиеся вместе с нею.

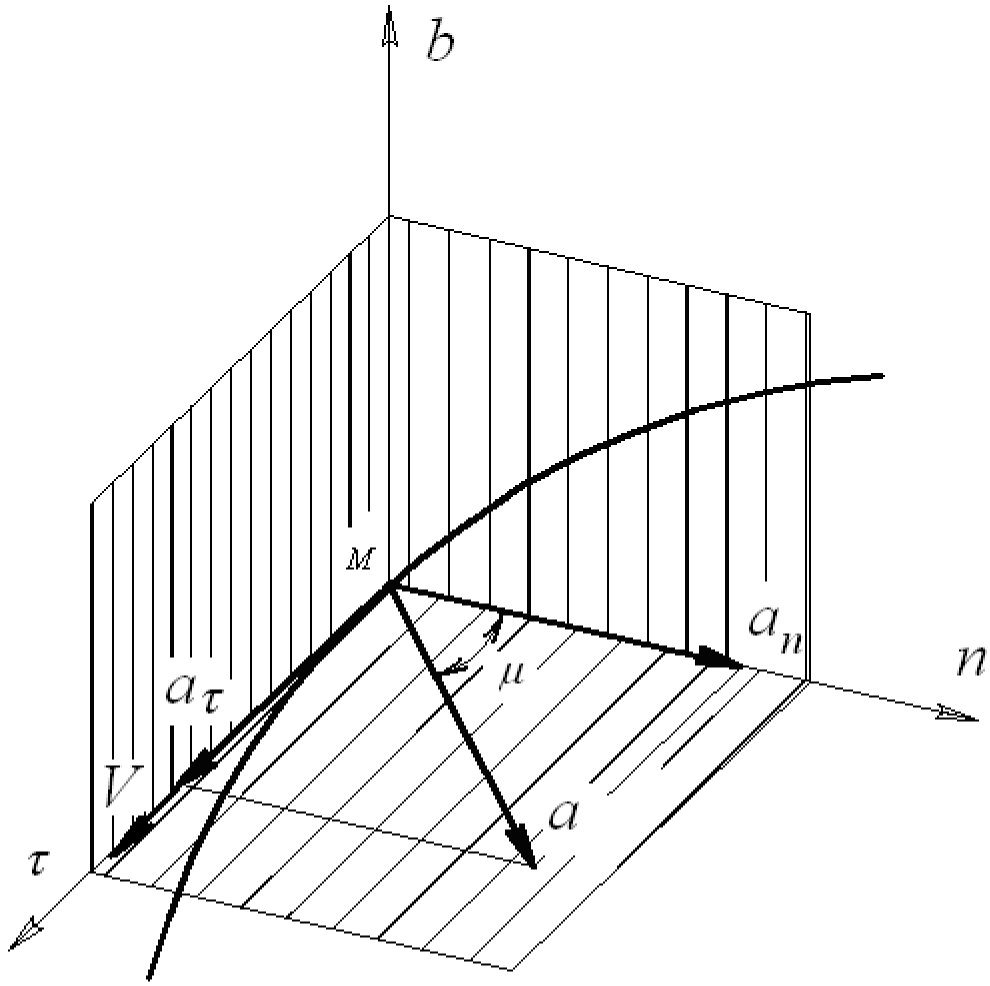


Рис. 1.5.

Определение скорости точки.

Скорость точки, направленная по касательной к траектории, определяется в осях $M\tau nb$ только одной проекцией v_τ на ось $M\tau$. При этом $v_\tau = v$ или $v_\tau = -v$. Следовательно, v_τ или совпадает с модулем скорости *v,* или отличается от *v* только знаком. Условимся поэтому в дальнейшем обозначать v_τ тоже символом *v,* опуская индекс $_\tau$, и называть *v числовым* (или *алгебраическим) значением скорости* (см.рис.1.5).

Числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) *s* этой точки по времени. $v = ds/dt = s$. Значение *v* можно также находить как отношение элементарного перемещения *ds* точки к соответствующему промежутку времени *dt*. Так как всегда $dt>0$, то знак *v* совпадает со знаком *ds.*

Следовательно, когда v>0, скорость направлена в сторону положительного отсчета расстояния *s,* а когда *v<0,* — в противоположную сторону. Таким образом, величина *v* одновременно определяет и модуль скорости, и сторону, куда она направлена.

Определение ускорения точки.

Ранее было установлено, что ускорение *a* точки лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $M\tau n$. Следовательно, проекция вектора *a* на бинормаль *Mb* равна нулю ($a_b=0$), Найдем проекции *a* на две другие оси.

Выразим ускорение точки через рассмотренные понятия.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{\tau}\right) = \dot{v} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \dot{\vec{\tau}}.$$

Из дифференциальной геометрии известно так называемая *формула Френе* $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\rho}$.

Преобразовываем следующее выражение, учитывая формулу Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = v \cdot \frac{\vec{n}}{\rho}.$$

Подставив полученное выражение в предыдущее, получаем **формулы для определения ускорения точки при естественном способе задания её движения:**

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau} = \dot{v} \cdot \vec{\tau} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau}$ - касательная составляющая ускорения

и $\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n} = \dfrac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}$ - нормальная составляющая ускорения;

Вектор ускорения точки *a* изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих a_τ, a_n. .Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то модуль вектора *a*

и угол μ его отклонения от нормали *Mn* определятся формулами; |

$tg\mu = a_\tau / a_n$

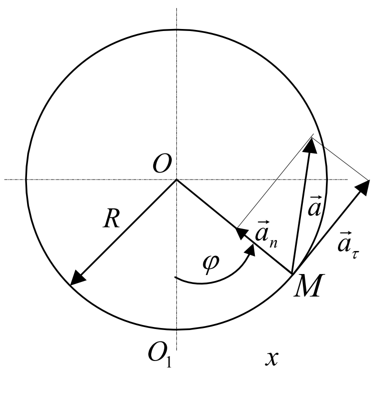
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^2/\rho)^2}\ ,\ tg\,\mu = a_\tau / a_n$$

,где—р/2< μ <р/2; при μ >0 вектор а отклонен от нормали Mn в сторону оси $M\tau$, а при μ <0 — в противоположную сторону

Таким образом, если движение точки задано естественным способом, то, зная траекторию (а следовательно, и ее радиус кривизны в любой точке) и закон движения, т. е. зависимость $s{=}{=}f(t)$, можно по вышеприведенным формулам определить модуль и направление векторов скорости и ускорения точки в любой момент времени.

Пример.

Точка движется по окружности R=10 м из крайнего нижнего положения в положительном направлении, указанном на рисунке. Закон движения точки $S = 2\cdot t^3 - 6\cdot t + 2$; м. В момент времени t=2 с. определить положение точки , ее скорость и ускорение.



$$S = 2\cdot 8 - 12 + 2 = 6\text{м}$$

$$\varphi = \frac{S}{R} = \frac{6}{10} = 0{,}6\text{рад.}, V = \dot{S} = 6\cdot t^2 - 6 = 6\cdot 4 - 6 = 18\,\text{м}/$$

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = 32{,}4\,\text{м}/\text{с}^2$$

$$a_\tau = \dot{V} = 12\cdot t = 24\,\text{м}/\text{с}^2$$

$$a = \sqrt{24^2 + 32{,}4^2} = 40{,}3\,\text{м}/\text{с}^2$$

1.1.3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1. **Равномерное прямолинейное движение**. В этом случае $a_n = a_\tau = 0$, а значит, и а=0. Заметим, что *единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю является равномерное прямолинейное движение*

1. **Прямолинейное неравномерное движение.** Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$ Тогда $a_n = 0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_\tau = dv/dt.$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости.

3. **Равномерное криволинейное движение**. Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором числовое значение скорости все время остается постоянным: v=const. Тогда $a_\tau = dv/dt = 0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному ускорению:

$$a = a_n = v^2/a_n = v^2/\rho\ \rho$$

Вектор ускорения *а* направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Найдем закон равномерного прямолинейного и криволинейного движений.

Из формулы имеем $ds = vdt$. Пусть в начальный момент времени (t=0) точка находится от начала отсчета на расстоянии *So.* Тогда, беря от левой и правой частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, так как v= const, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{o}^{t} vdt \quad \text{или} \quad s - s_0 = vt$$

.Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения точки в виде $s=s_0+vt$

Если в последнем равенстве положить $So=0$, то s даст путь, пройденный точкой за время *t.* Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, растет пропорционально времени, а скорость, точки равна отношению пути ко времени:

$$s=vt,\ v=s/t$$

4. **Равнопеременное криволинейное движение**. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время постоянным: a_τ =const. Найдем закон этого движения, считая, что при t=0, $s=s_0$, а $v=v_0$, где v_0 — начальная скорость точки. Согласно формул $dv=a_\tau dt$. $dv = a_\tau dt$ Так как a_τ =const, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим $v=v_0+a_\tau t$. $v = v_0 + a_t t$ $ds/dt = v_0 + a_\tau t$ $ds = v_0 dt + a_\tau t dt$

Формулу представим в виде $ds/dt=v_0+a_\tau t$ *или* $ds=v_0dt+a_\tau tdt$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки $S=s_0+v_0t+a_\tau t^2/2$ $s = s_0 + v_0 dt + a_\tau t^2$

При данном виде движения полное ускорение точки складывается из касательного и нормального ускорений.

$$\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},\ \text{где}\ a_n=v^2/\rho$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется **ускоренным**, а если убывает,— **замедленным**. Так как изменение модуля скорости характеризуется касательным ускорением, то движение будет ускоренным, если величины v и a_τ имеют одинаковые знаки (угол между векторами v и a острый,), и замедленным, если разные (угол между v и a тупой,) (см.рис.1.6).

В частности, при равнопеременном движении, если в равенстве

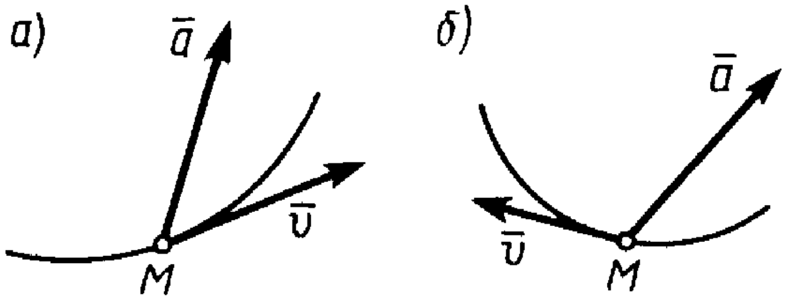


Рис.1.6.

v и a_τ имеют одинаковые знаки, движение будет *равноускоренным,* а если разные знаки,— *равнозамедленным.*

5. **Гармонические колебания**.

Гармоническим колебанием точки называется такое ее движение, при котором расстояние x точки от начала отсчета изменяется по закону $S=A \cos kt$ или $S=A \sin kt$

где A и k — постоянные величины.

Наибольшее расстояние A , на которое точка удаляется от начала отсчета, называется амплитудой колебаний.

Постоянная k , показывающая, сколько полных колебаний точка совершает за 2π секунд, называется круговой частотой колебаний. Ее размерность – сек$^{-1}$.

Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом** колебаний.

Период колебаний определится по формуле

T=2pi/k

Беря производные от S по t, найдем значения скорости и ускорения точки:

$V=v_s=-Aksinkt,\ a=a_s=-Ak^2coskt$ $V=V_s=-Ak\sin kt \quad a=a_s=-Ak^2\cos kt$

Следовательно, в этом движении и скорость, и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническому закону.

1.3. Кинематика абсолютно твердого тела

Абсолютно твердым телом или просто твердым телом называют такую систему материальных точек, расстояния между двумя любыми точками которой остаются неизменными.

При движении твердого тела отдельные его точки движутся в общем случае по различным траекториям и имеют в каждый момент времени различные скорости и ускорения. Вместе с тем имеются кинематические характеристики одинаковые для всех точек твердого тела.

. Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1) определение способа задание движения твердого тела и определение кинематических характеристик, присущих всему телу;
2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела, т.е. определение их траекторий, скоростей и ускорений.

Может показаться, что для задания движения твердого тела требуется задать движение каждой его точки, т.е. необходимо иметь бесконечное множество уравнений движения. На самом деле это не так, ибо перемещения отдельных точек связаны условием неизменяемости расстояний между ними

1.3.1. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Известны два вида простейшего движения твердого тела

1) поступательное

2) вращательное

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями, т.е. могут иметь также криволинейную траекторию.

Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.

1. Спарник *AB* при вращении кривошипов O_1A -и O_2B $(O_1A = O_2B)$ также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям (см.рис.1.7).

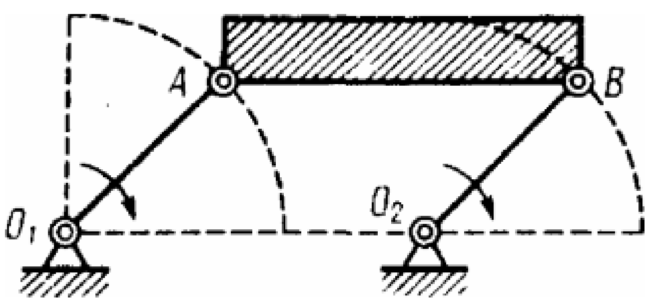


Рис. 1.2.

Свойства поступательного движения определяются следующей **теоремой**: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства теоремы рассмотрим твердое тело (см. рис. 1.3.), поступательно движущее относительно системы отсчета *Oxyz*. Возьмем в теле две произвольные точки *A* и *B*, положения которых в момент времени *t* определяются радиусами-векторами r_A и r_B. Проведем вектор *AB*, соединяющий эти точки. Тогда $r_B = r_A + AB$

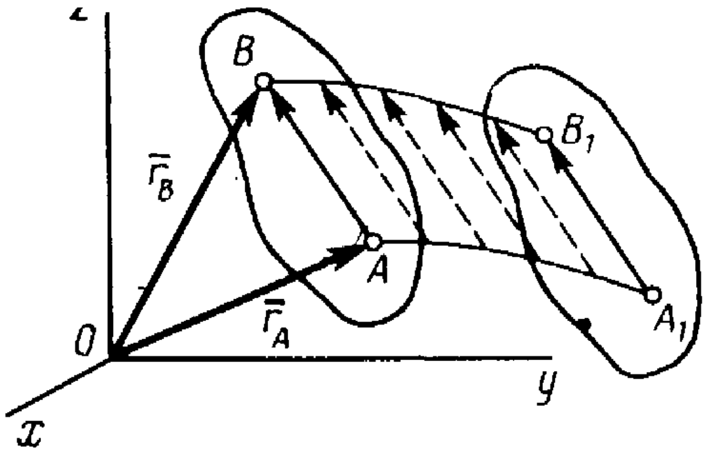


Рис. 1.8

При этом длина *AB* постоянна, как расстояние между точками *A* и *B* твердого тела остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор *AB* во все время движения тела остается постоянным (*AB*=const). Вследствие этого, как видно из равенства (и непосредственно из чертежа), траектория точки *B* получается из траектории точки *A* параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор *AB*. Следовательно, траектории точек *A* и *B* будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек *A* и *B* продифференцируем обе части равенства $r_B = r_A + AB$ по времени. Получим

$$dr_B/dt = dr_A/dt + d\,(AB)/dt.$$

Но производная от постоянного вектора *AB* равна нулю. Производные же от векторов r_A и r_B по времени дают скорости точек *A* и *B*. В результате находим, что $v_A = v_B$, т. е. что скорости точек *A* и *B* тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени, найдем:

$$dv_A/dt == dv_B/dt \text{ или } a_A = a_B$$

Следовательно, ускорения точек A и B тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует также, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки.

Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость v называют *скоростью поступательного движения* тела, а ускорение a — *ускорением поступательного движения* тела. Векторы v и a можно изображать приложенными к любой точке тела.

Заметим, что понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл **только при поступательном движении**. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины «скорость тела» или «ускорение тела» для этих движений теряют смысл.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным движением твердого тела называется такое движение твердого тела, при котором все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения, остаются неподвижными.

Для того, чтобы осуществить вращательное движение тела, достаточно закрепить неподвижно две какие-нибудь его точки.

Остальные точки тела, не принадлежащие оси вращения, будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для анализа вращательного движения обратимся к рис. 1.4.

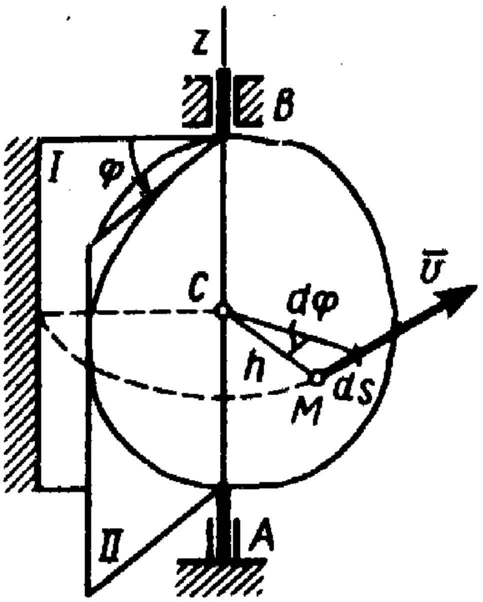


Рис. 1.4.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения ось *Az*, полуплоскость *I* - неподвижную и полуплоскость *II*, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним. Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем углом поворота тела. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси *Az*), и отрицательным - если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени, т.е.

$$\varphi = f(t).$$

Данное уравнение выражает **закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси**.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела, которые являются общими для всего тела, будут его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Угловая скорость.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_2$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдём

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\varphi / \Delta t) \text{ или } \omega = \dot{\varphi}.$$

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени.

Последнее равенство также означает, что величина ω равна отношению элементарного угла поворота $d\varphi$ к соответствующему промежутку времени dt. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, ω>0, а когда по ходу часовой стрелки - ω<0.

Размерность угловой скорости - 1/(ед. времени); в качестве единицы измерения угловой скорости обычно применяют рад/с или, что тоже самое - 1/с ($с^{-1}$), так как радиан - величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 1.10).

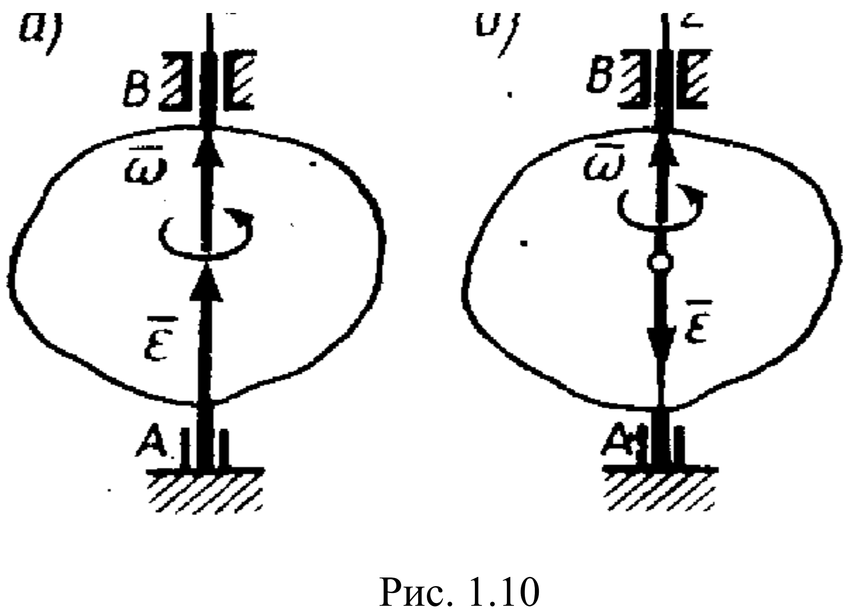


Рис. 1.10

Вектор ω определяет сразу и модуль угловой скорости, ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение. Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_2$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{cp} = \Delta\omega / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$, найдем

$$\varepsilon = d\omega / dt \quad \varepsilon = d^2\varphi / dt^2 \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} \quad \varepsilon = \ddot{\varphi}.$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения 1/(ед. времени)^2; в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с^2 или, что то же самое - 1/с^2 (с$^{-2}$).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает - замедленным. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные (см. рис.1.10).

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью можно также изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения.

Направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно, и противоположно при замедленном вращении.

Равномерное и равнопеременное вращения

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной, то вращение тела называется **равномерным.** Найдем закон равномерного вращения. Имеем

$$d\varphi = \omega dt.$$

Отсюда, считая, что в начальный момент времени (t=0) угол $\varphi = \varphi_o$, и, беря интегралы слева от φ_o до φ, а справа от 0 до t, получим окончательно

$$\varphi = \varphi_o + \omega t.$$

Из этого равенства следует, что при равномерном вращении, когда φ_o=0

$$\varphi = \omega t\,.$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n (об/мин). Найдем зависимость между n (об/мин) и ω (1/с). При одном обороте тело повернется на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время t=1 мин=60 с. Тогда

$$\omega=\pi n/30.$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным, то вращение называется **равнопеременным**. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени (t=0) угол $\varphi=\varphi_o$, а угловая скорость $\omega=\omega_0$ (здесь ω_0 - начальная угловая скорость).

Имеем

$$d\omega=\varepsilon dt.$$

Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую - в пределах от 0 до t, получим выражения для определения угловой скорости

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t$$

Представим это выражение в виде

$$d\varphi/dt=\omega_0+\varepsilon t \text{ или } d\varphi=(\omega_0+\varepsilon t)dt.$$

Вторично интегрируя, найдем **закон равнопеременного вращения**

$$\varphi=\varphi_o+\omega_0 t+\varepsilon t^2/1.$$

Если величины ω и ε - имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные - равнозамедленным.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Установив в предыдущих параграфах характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

1. Скорости точек тела. Рассмотрим какую-нибудь точку *M* твердого тела, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения (рис.1.11).

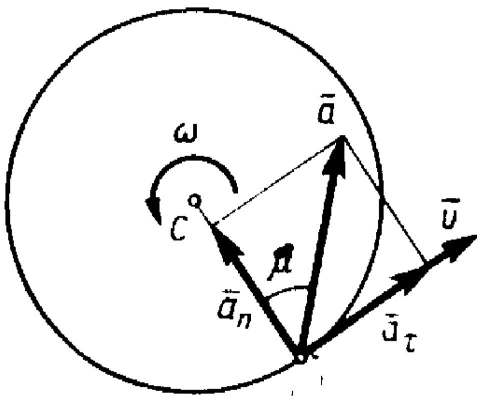


Рис. 1.6.

При вращении тела точка *M* будет описывать окружность радиуса *h*, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр *C* лежит на самой оси. Если за время *dt* происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка М при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds=hd\varphi$. Тогда числовое значение скорости точки будет равно

$$v=ds/dt=hd\varphi/dt \text{ или } v=\omega h.$$

Скорость в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще **линейной** или **окружной скоростью** точки *M*.

Таким образом, **числовое значение скорости** точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку *M*.

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то из формулы $v=\omega h$ следует, что скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (см. рис. 1.12).

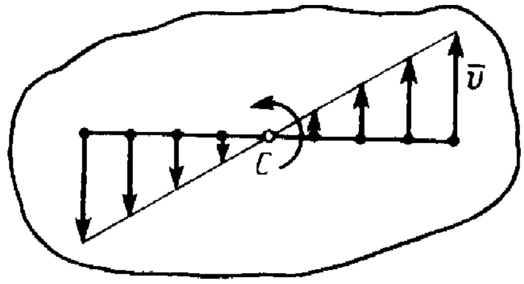


Рис. 1.12

1. Ускорения точек вращающегося тела. Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами

$$a_\tau = dv/dt; \; a_n = v^2/\rho.$$

В нашем случае $\rho=h$. Подставляя значение $v=\omega h$ в последние выражения получим

$$a_\tau = h d\omega/dt; \; a_n = h^2\omega^2/h$$

или окончательно

$$a_\tau = h\varepsilon; \; a_n = h\omega^2$$

Касательная составляющая a_τ ускорения направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном); нормальная составляющая a_n всегда направлена по радиусу к оси вращения.

Полное ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{или} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется из формулы

$$tg\mu = a_\tau / a_n. \quad tg\mu = a_\tau / a_n$$

Подставляя сюда значения a_τ и a_n получаем

$$tg\mu = \varepsilon/\omega^{1.} \quad tg\mu = \varepsilon / \omega^2$$

Так как ε и ω имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей.

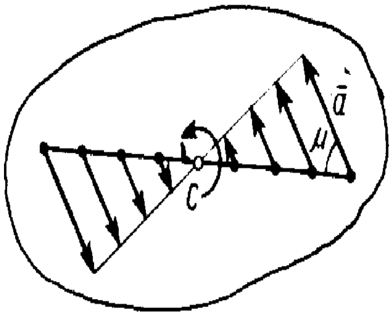


Рис. 1.13.

Полученные формулы позволяют определить скорость и ускорение любой точки тела, если известен закон вращения тела и расстояние данной точки от оси вращения. По этим же формулам можно, зная движение одной точки тела, найти движение любой другой его точки, а также характеристики движения всего тела в целом.

3. Векторы скорости и ускорения точек тела. Чтобы найти выражения непосредственно для векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$, проведем из произвольной точки *O* оси *AB* радиус-вектор $\vec{r}$ точки *M*. (рис. 1.14)

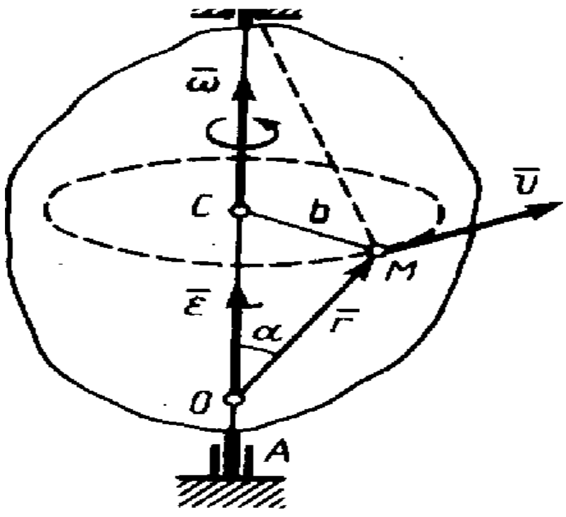


Рис. 1.14.

Тогда $h = r\sin\alpha$ и в соответствии с формулой $v = \omega h$

$$v = \omega r \sin\alpha \text{ или } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ .$$

Вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Данную формулу называют формулой Эйлера.

Беря от обеих частей последнего равенства производные по времени, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \text{ или } \vec{a} = \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r} \right) + \left(\vec{\omega} \times \vec{v} \right).$$

Данная формула определяет вектор ускорения любой точки вращающегося тела.

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ направлен, как и вектор $\vec{v}$, т.е. по касательной к траектории точки *M*, а вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ направлен вдоль *MC*, т. е. по нормали к траектории точки *M*.

Учитывая все эти результаты, заключаем, что $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_\tau$ и $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_n$.

Пример 1: цилиндр (R=2м) начал вращаться относительно оси, проходящей через центр масс, являющейся осью симметрии, из состояния покоя согласно закону $\varphi = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 4$. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на наружной поверхности цилиндра после 3-ех секунд.

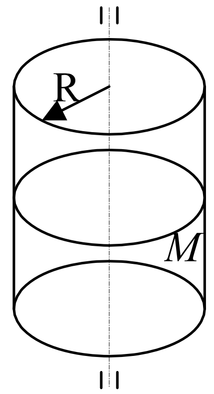
$R = 2$м.

$t = 3$с.

$\varphi = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 4$

$\omega - ?$

$\varepsilon - ?$



$$\omega = \dot{\varphi} = 6 \cdot t - 2 = 16 \, {рад}/{с}, \varepsilon = 6 \, {рад}/{с^2},$$

$$V = \omega \cdot R = 32 \, {рад}/{с}$$

$$. a_{вр} = \varepsilon \cdot R = 12 \, {м}/{с^2}, a_{ос} = \omega^2 \cdot R = 512 \, {м}/{с^2},$$

$$a = \sqrt{a_{ос}{}^2 + a_{вр}{}^2} = 512{,}14 \, {м}/{с^2}$$

Пример 1.

Дано. Тело начинает вращаться из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = b \cdot t$, где $b = const(t)$. К моменту времени $t = t_1 = 1c$ тело сделало $N_1 = 2$ полных оборота. Точка отстоит от оси вращения на расстоянии $h = 0{,}1$ м. Интересующий момент времени: $t = t_2 = 2c$.

Определить для интересующего момента времени скорость и ускорение указанной точки.

Решение.-

$$\varepsilon = \dot{\omega} \quad \mapsto \quad d\omega = \varepsilon \cdot dt = b \cdot t \cdot dt \quad \mapsto \quad \omega = 0{,}5b \cdot t^2 + C_1.$$

Т.к при $t = 0$ $\omega = 0$, то $C_1 = 0$ и последнее выражение принимает вид: $\omega = 0{,}5b \cdot t^2$.

Учитывая, что $\omega = \dot{\varphi}$, получаем:

$$d\varphi = 0{,}5b \cdot t^2 \cdot dt \quad \mapsto \quad \varphi = \frac{1}{6} \cdot b \cdot t^3 + C_2.$$

Т.к при $t = 0$ $\varphi = 0$, то $C_2 = 0$ получаем : $\varphi = \frac{1}{6} \cdot b \cdot t^3$.

В момент времени $t = t_1$ $\varphi = \varphi_1 = 2\pi \cdot N_1$. Тогда:

$$b = \frac{12\pi \cdot N_1}{t_1^3} = \frac{12\pi \cdot 2}{1^3} = 24\pi \, c^{-3}.$$

Таким образом $\omega = 12\pi \cdot t^2$, $\varepsilon = 24\pi \cdot t$

и для момента времени $t = t_2 = 2c$ находим:

$\omega_2 = 12\pi \cdot 2^2 = 48\pi \, c^{-1};$ $\varepsilon_2 = 24\pi \cdot 2 = 48\pi \, c^{-2};$

$v_2 = h \cdot \omega_2 = 0{,}1 \cdot 48\pi = 4{,}8\pi$ м/с;

$a_2^\tau = h \cdot \varepsilon_2 = 0{,}1 \cdot 48\pi = 4{,}8\pi$; $a_2^n = h \cdot \omega_2^2 = 0{,}1 \cdot (48\pi)^2 = 2274$ м/с$^{1.}$

1.4. Преобразование движения

Передаточным механизмом называется устройство, которое преобразует параметры, задаваемые на входном звене, в другие, на выходном звене (на исполнительном органе).

Преобразование вращательного движения рассматривается на примере зубчатого зацепления (Рис. 1.15). Входным звеном является ведущий вал. Ему сообщаются начальные параметры. Выходное звено - ведомый вал. На нем получаем результат преобразования движения.

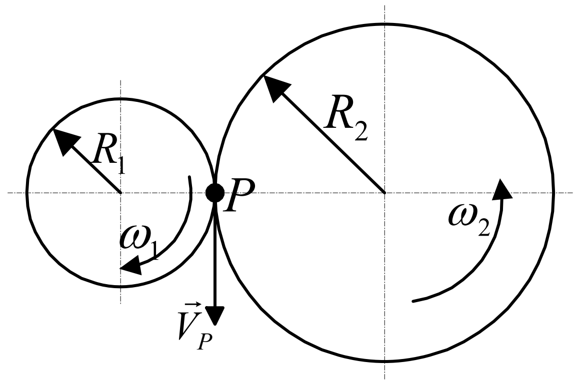


Рис. 1.15

$$V_p = \omega_1 \cdot R_1; \; V_P = \omega_2 \cdot R_2;$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

где z_1 и z_2 – числа зубьев входного и выходного звеньев соответственно.

Передаточным отношением зубчатой передачи u называется величина:

$$u = \frac{\omega_{вх}}{\omega_{вых}}$$

Если u<1 – **передача повышающая** (**мультипликаторная**).

Если u>1 – **передача понижающая** (**редукторная**).

Если имеем последовательное зацепление трех колес, то шестерня 2 называется **паразитной** (Рис. 1.16).

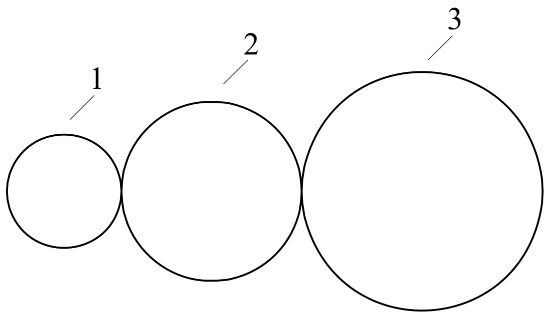


Рис. 1.16

Передаточное отношение передачи с паразитной шестерней

$$u = \frac{R_3}{R_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Возможно преобразование вращательного движения в поступательное (Рис. 1.17).

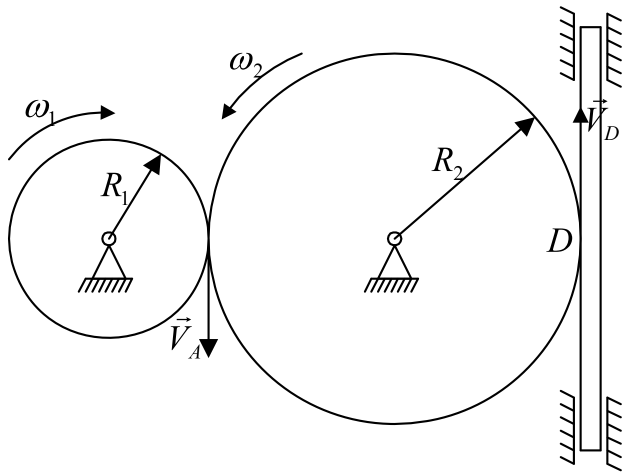


Рис. 1.17

$$V_A = \omega_1 \cdot R$$
$$V_D = V_A = \omega_1 \cdot R.$$

ПРИМЕР 1.- *На преобразование вращательного движения (цилиндрическая зубчатая пара)*

Дано.- Число оборотов в минуту первого зубчатого колеса $n_1 = 955$ об/мин; направление его вращения указано на рис. 1.13. Число зубьев первого и второго зубчатых колёс:

$z_1 = 20, \; z_2 = 80. \qquad \rho = 0{,}4$ м.

Определить скорость тела A.

Дополнительные сведения к исходным данным. В теории механизмов и машин показывается (а здесь – в теоретической механике – принимается за известное): использовать следует лишь

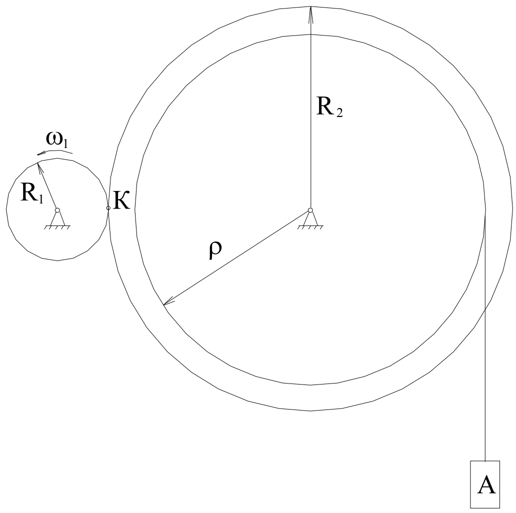


Рис. 1.13.

«правильные зацепления»; при правильных зацеплениях окружности, изображающие зубчатые колёса на рисунках (так называемые начальные окружности) обкатываются друг по другу без проскальзываний, из чего вытекает соотношение $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. - В соответствии с приведенными дополнительными сведениями $\vec{v}_{K1} = \vec{v}_{K2}$, где

$\vec{v}_{K1}$ - скорость точки K, принадлежащей первому зубчатому колесу;

$\vec{v}_{K2}$ - скорость точки K, принадлежащей второму зубчатому колесу.

Без дополнительных пояснений видно:

$$R_1 \cdot \omega_1 = v_{K1} = v_{K2} = R_2 \cdot \omega_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{\pi \cdot n_1}{30} \cdot \frac{z_1}{z_2} \quad \mapsto$$

$$\omega_2 = \frac{\pi \cdot 955}{30} \cdot \frac{20}{80} = 25\, c^{-1}.$$

Вычисляем скорость точки A: $v_A = \rho \cdot \omega_2 = 0{,}4 \cdot 25 = 10$ м/с.

ПРИМЕР 1.- Преобразование вращательного движения (конические зубчатые пары)

Дано.- Угловая скорость первого вала $\omega_1 = 150\, c^{-1}$; направление его вращения указано на рис. 1.14. Числа зубцов изображённых на рисунке конических зубчатых колёс $z_1 = 18,\ z_2 = 54,\ z_2' = 15,\ z_3 = 75.$

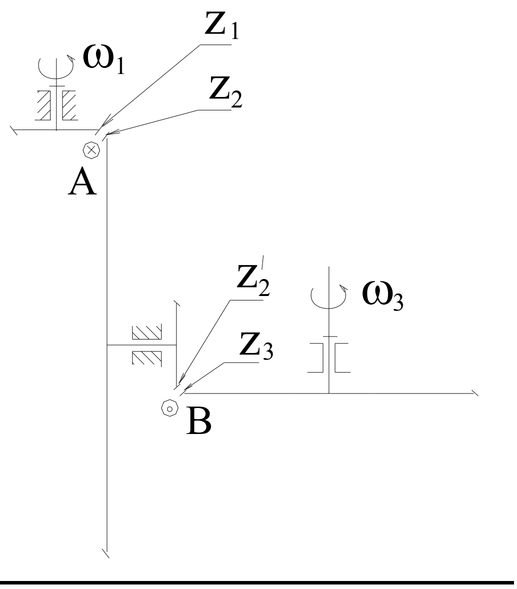


Рис. 1.19

Как и в предыдущем примере (с цилиндрическими зубчатыми колёсами) отношения радиусов можно заменять отношением чисел соответствующих зубцов. Определить угловую скорость третьего вала.

Решение.- Для удобства определения направления угловой скорости третьего вала в точках соприкасания (A и B) обкатывающихся окружностей ставим знаки + и -; первый представляется как вид на хвост стрелы и означает – «точка удаляется от зрачка читателя»; второй представляется как вид на заострённую часть стрелы - «точка движется в направлении зрачка читателя». $\omega_1 \cdot R_1 = v_{A1} = v_{A2} = \omega_2 \cdot R_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \omega_1 \cdot \dfrac{R_1}{R_2} = \omega_1 \cdot \dfrac{z_1}{z_2},$

Проставив знаки + и -, видим: 3-й вал вращается в том же направлении, что и 1-й. Как и в предыдущем примере:

$$\omega_2 \cdot R_2' = v_{B2} = v_{B3} = \omega_3 \cdot R_3 \quad \mapsto \quad \omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{R_2'}{R_3} = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2'}{z_3} = \ldots = 10\,c^{-1}.$$

2. Плоскопараллельное движение твердого тела

2.1. Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (или **плоским**) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости *П* (рис. 2.1).

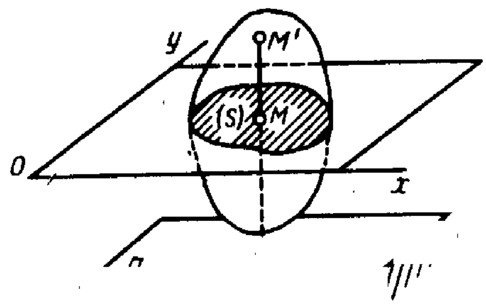


Рис. 2.1

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью Oxy, параллельной плоскости *П* (рис. 2.1).

При плоском движении все точки тела, лежащие на прямой MM', перпендикулярной сечению S, т. е. плоскости *П*, движутся одинаково. Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Oxy сечение (плоская фигура) S. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры S в ее плоскости.

Положение плоской фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис. 2.2).

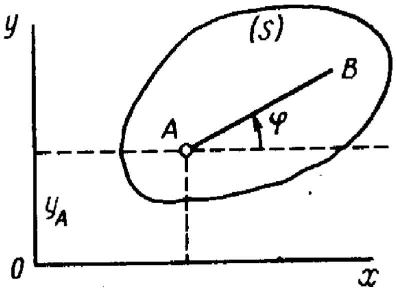


Рис. 2.2

В свою очередь положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты X_A, и Y_A точки *A* и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *Ox*. Точку *A*, выбранную для определения положения фигуры *S*, будем в дальнейшем называть **полюсом**.

При движении фигуры величины x_A, y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости *Oxy*, надо знать зависимости

$$x_A=f_1(t);\ y_A=f_2(t);\ \varphi=f_3(t).$$

Эти уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются **уравнениями плоскопараллельного движения**.

Первые два уравнения определяют то движение, которое фигура совершала бы при φ=const; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс *A*. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при x_A=const и y_A=const, т.е. когда полюс *A* неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса *A*. Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс *A*, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса:

$$v_{xA}=\dot{x}_A;\ v_{yA}=\dot{y}_A;\ a_{xA}=\ddot{x}_A;\ a_{yA}=\ddot{y}_A,$$

а также угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения вокруг полюса

$$\omega=\dot{\varphi};\ \varepsilon=\ddot{\varphi}.$$

Значения этих характеристик в любой момент времени можно найти, воспользовавшись вышеприведенными уравнениями.

При изучении плоского движения можно в качестве полюса выбирать любую точку фигуры. Рассмотрим, что получится, если вместо A выбрать в качестве полюса какую-нибудь другую точку C и определять положение фигуры отрезком CD, образующим с осью Ox угол φ (Рис. 2.3).

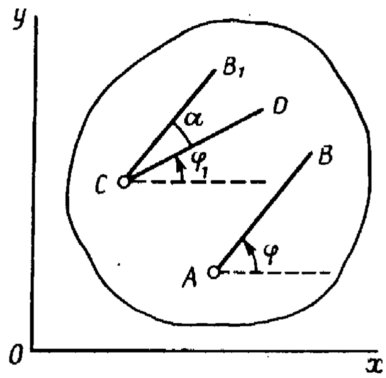


Рис. 2.3

Характеристики поступательной части движения при этом изменятся, так как в общем случае $v_C \neq v_A$ и $a_C \neq a_A$ (иначе движение фигуры было бы поступательным). Характеристики же вращательной части движения, т. е. ω и ε остаются неизменными. В самом деле, проведя из C прямую CB_1, параллельную AB, мы видим, что в любой момент времени угол $\varphi_2 = \varphi_1 - \alpha$, где α=const. Отсюда $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi},$ или $\omega_1 = \omega, \varepsilon_1 = \varepsilon$.

Следовательно, вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

2.2. Определение скоростей точек плоской фигуры

Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает при поступательном и вращательном движениях.

В самом деле, положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}\,'$ (рис. 2.4).

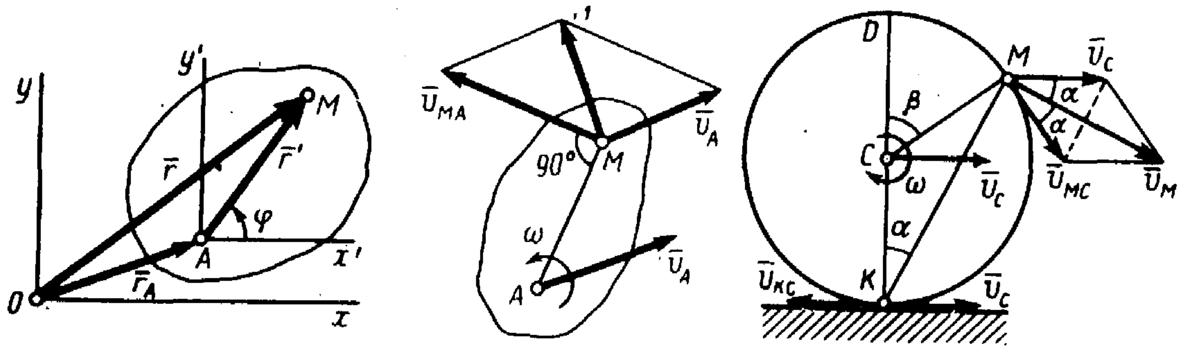


Рис. 2.4

Тогда

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $d\vec{r}_A/dt$ есть скорость полюса A; величина $d\vec{r}\,'/dt$ равна скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A. Таким образом

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

При этом скорость v_{MA}. которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A, будет определяться из выражения

$$v_{MA} = \omega MA,$$

где ω - угловая скорость плоской фигуры.

Таким образом, скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости этой скорости находятся построением соответствующего параллелограмма.

2.3. **Теорема о проекциях скоростей двух точек тела**

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) с помощью формулы $v_M = v_A + v_{MA}$ связано обычно с довольно сложными расчетами Однако исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

Один из таких методов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс (рис. 2.5), получаем по формуле, что $v_B = v_A + v_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB, и учитывая, что вектор v_{BA} перпендикулярен AB, находим $v_B cos\,\beta = v_A cos\,\alpha$, и теорема доказана.

Заметим, что этот результат ясен и из чисто физических соображений: если равенство не будет выполняться, то при движении расстояние между точками *A* и *B* должно изменяться, что невозможно, так как тело считается абсолютно твердым. Поэтому равенство выполняется не только при плоскопараллельном, но и при любом движении твердого тела.

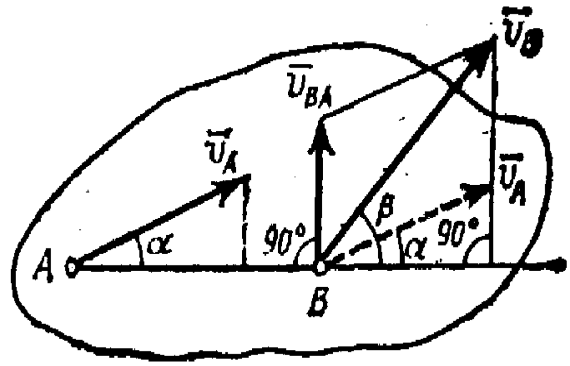


Рис. 2.5.

Доказанная теорема позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление скорости этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

2.4. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей, понятие о центроидах

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется не поступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости V_A и V_B, не параллельные друг другу (рис. 2.6). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров к вектору V_A и к вектору V_B, и будет мгновенным центром скоростей, так как $V_P=0$. В самом деле, если допустить, что Vp не равно нулю, то по теореме о проекциях скоростей вектор Vp должен быть одновременно перпендикулярен и AP, (так как $V_A \perp AP$) и BP (так как $V_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры В этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю

Если теперь в момент времени t взять точку Р за полюс, то по формуле скорость точки A будет $V_A=V_p+V_{pa}=V_{PA}$так как $Vp=0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом $V_A=\omega PA\ (V_A \perp PA),\ V_B=\omega PB\ (V_B \perp PB)$

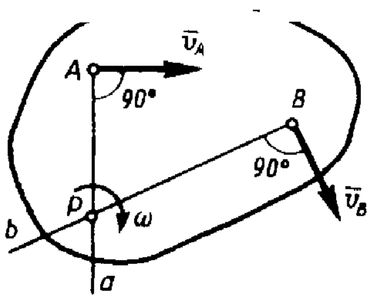


Рис. 2.6.

Из равенств следует еще, что $V_B/PB=V_A/PA$ т. е. что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей VA и V_B каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям) (см. рис. 2.7).

1. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной

точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B. Тогда, восставив из точек A и B перпендикуляры к VA и V_B, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению VA определим направление поворота фигуры. После этого, зная VA, найдет по формуле $V_B/PB=V_A/PA$ скорость V_M любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор V_M перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к. ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P: $\omega=V_B/PB$

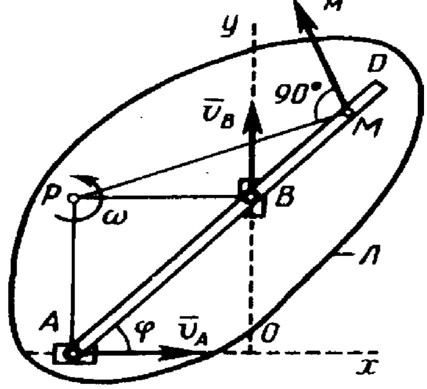


Рис. 2.7.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого .неподвижного, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис. 2.8), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю (Vp=0), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.

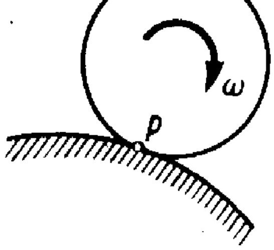


Рис. 2.3.

б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна V_A (рис. 2.9) то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны V_A. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $V_A cos\alpha = V_B, cos\beta$ т. е. аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. фигура имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще мгновенно поступательным). Угловая скорость со тела в этот момент времени равна нулю.

в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна V_A то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис. 2.4. Справедливость построений следует из пропорции В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра Р надо кроме направлений знать еще и модули скоростей V_A и V_B,

г) Если известны вектор скорости V_B какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к V_B (см. рис. 2.9), можно найти из равенства , которое дает .$BP = V_B/\omega$

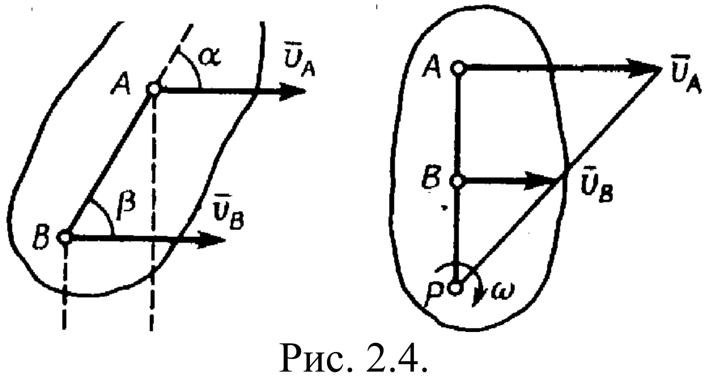


Рис. 2.4.

Мгновенный центр скоростей потому и «мгновенный», что с течением времени изменяет своё положение. Геометрическое место МЦС на плоской фигуре называют подвижной центроидой. Ту точку неподвижной плоскости, в которой в рассматриваемый момент времени расположен МЦС, называют мгновенным центром вращения.

Геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости называют неподвижной центроидой.

Понятия подвижной и неподвижной центроид широко используют в теории зубчатых зацеплений, где, в частности, доказывается, что «подвижная центроида обкатывается по неподвижной без скольжения».

2.5. Пример кинематического исследования простого плоского механизма с использованием понятия МЦС

Пример .- *На использование понятия МЦС для определения угловой скорости ведомого звена простого пятизвенного стержневого механизма*

Даны схема, геометрия и положение механизма (см. рис. 2.10): $\omega_1 = 96 c^{-1}$; $AO = 10$ см; $AH = 40$ см; $BH = 10$ см; $BK = 30$ см; $KC = 15$ см; $CD = 60$ см.

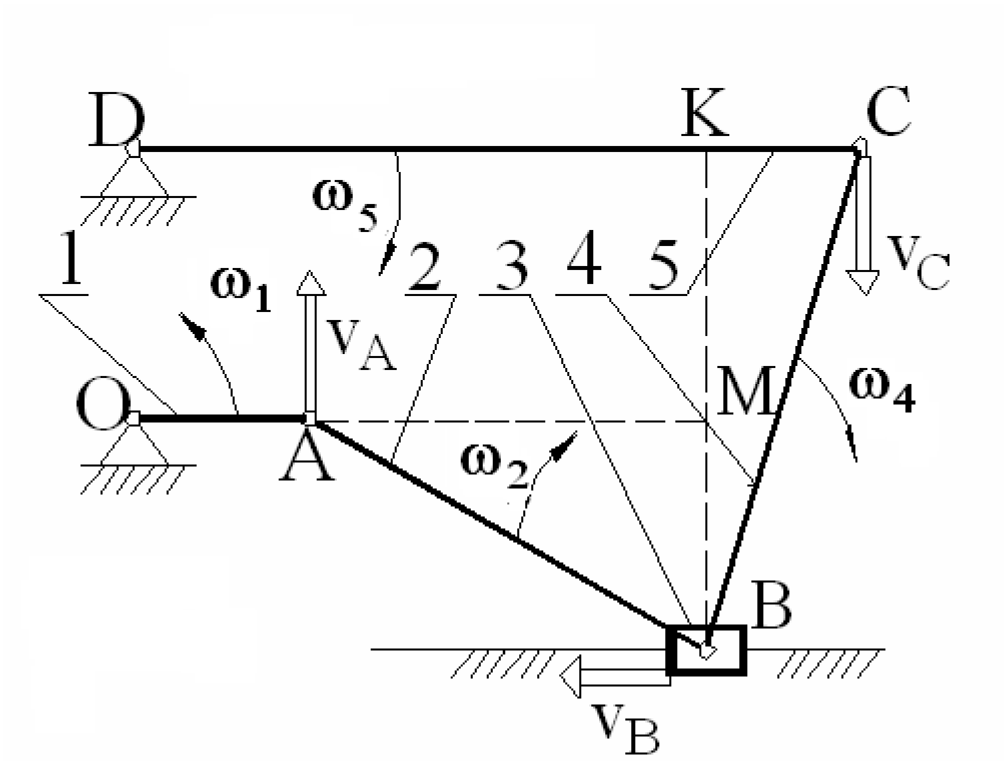


Рис. 2.5.

Определить угловую скорость тела 5.

Решение.- Модуль скорости точки $A : v_A = AO \cdot \omega_1$.

Находим мгновенный центр скоростей для звена 1. Для этого, используя очевидность траекторий точек A и B, устанавливаем их скорости: $\vec{v}_A$ направлена вертикально вверх, $\vec{v}_B$ горизонтально. Устанавливаем, что мгновенным центром скоростей звена 2 является точка H (МЦС$_2 = H$).

Т.е.: $v_A = AH \cdot \omega_2$, $AO \cdot \omega_1 = AH \cdot \omega_2 \quad \mapsto \quad \omega_2 = \dfrac{AO}{AH} \cdot \omega_1$,

$$v_B = BH \cdot \omega_2 = = BH \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 .$$

Для тела 4 известны скорости точек B, но и C (см. рис. 2.10). Устанавливаем: МЦС$_4 = K$. Откуда:

$$BK \cdot \omega_4 = \leftarrow v_B \rightarrow = BH \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 \quad \mapsto \omega_4 = \frac{BH}{BK} \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 .$$

Скорость точки C записываем аналогично тому, как это было сделано для точки B:

$$CD \cdot \omega_5 = \leftarrow v_C \rightarrow = CK \cdot \omega_4 = = CK \cdot \frac{BH}{BK} \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 \quad \mapsto$$

$$\omega_5 = \frac{CK}{CD} \cdot \frac{BH}{BK} \cdot \frac{AO}{AH} \cdot \omega_1 = \frac{15}{60} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{40} \cdot 96 = 2c^{-1} .$$

2.6. Определение ускорений точек плоской фигуры

Покажем, что ускорение любой точки *M* плоской фигуры (так же, как и скорость) складывается из ускорений, которые точка получает при поступательном и вращательном движениях этой фигуры. Положение точки *M* по отношению к осям *Oxy* определяется радиусом-вектором $r = r_A + r'$, где $r' = AM$.

$$r = r_A + r' \qquad r' = AM \;\; r' = AB$$

Тогда $a_M = d^2r/dt^2 = d^2r_A/dt^2 + d^2r'/dt^2$

$$a_M = d^2 r / dt^2 = d^2 r_A / dt^2 + d^2 r' / dt^2$$

В правой части этого равенства первое слагаемое есть ускорение a_M полюса *A*, а второе слагаемое определяет ускорение a_{MA}, которое точка *M* получает при вращении фигуры вокруг полюса *A*. Следовательно, $a_M = a_A + a_{MA}$ $\quad a_M = a_A + a_{MA}$

Значение a_{MA}, как ускорения точки вращающегося твердого тела, определяется по формулам

$$a_{MA} = h\sqrt{\xi^2 + w^4}, \qquad tg\mu = \varepsilon / \omega^2$$

где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение фигуры , μ — угол между вектором a_{MA} и отрезком MA .

Таким образом, ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление ускорения a_M находятся построением соответствующего параллелограмма.

Однако вычисление a_M с помощью параллелограмма, усложняет расчет, так как предварительно надо будет находить значение угла μ, а затем — угла между векторами a_{MA} и a_M. Поэтому при решении задач удобнее вектор a_{MA} заменять его касательной (a^τ_{MA}) и нормальной (a^n_{MA}) составляющими и представить равенство в виде $a_M = a_A + a^\tau_{MA} + a^n_{MA}$.

$a_M = a_A + a^\tau_{MA} + a^n_{MA}$ $\quad a_M = a^\tau_A + a^n_A + a^\tau_{MA} + a^n_{MA}$ $\quad a^\tau_{MA} = \varepsilon AM$ $\quad a^n_{MA} = \omega^2 AM$

При этом вектор a^τ_{MA} направлен перпендикулярно AM (см.ри.2.11) в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор a^n_{MA} всегда направлен от точки M к полюсу . Численно же $a^\tau_{MA} = AM\varepsilon$, $a^n_{MA} = AM\omega^2$.

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной и нормальной составляющих, тогда $a_M = a^\tau_A + a^n_A + a^\tau_{MA} + a^n_{MA}$

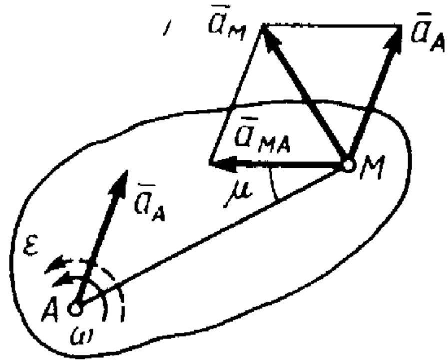
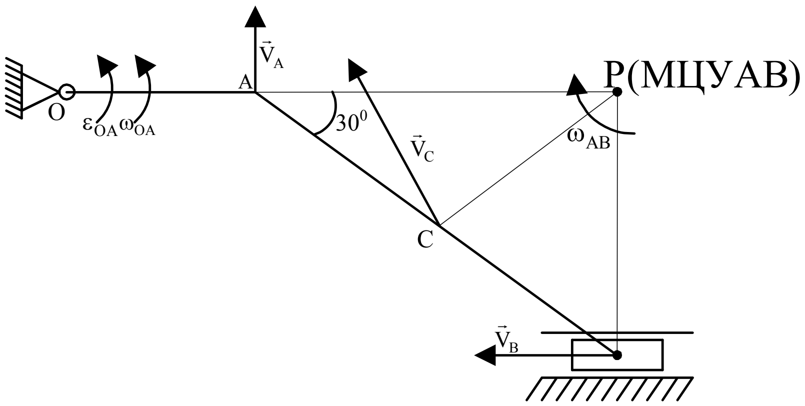


Рис.2.6.

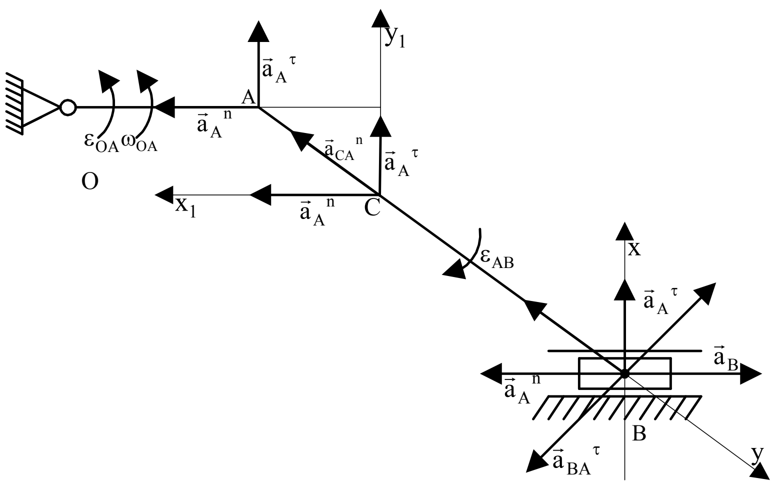
Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно найти, если известны: 1) вектор скорости V_A и ускорения a_A какой-нибудь точки A этой фигуры данный момент; 2) траектория какой-нибудь другой точки B фигуры. В ряде случаев вместо траектории второй точки фигуры, достаточно знать положение мгновенного центра скоростей.

Тело (или механизм) при решении задач надо изображать в таком положении, для которого требуется определить ускорение соответствующей точки.

Пример 1: Задана схема кривошипно-шатунного механизма.



$\vec{\omega}_{OA}$ - угловая скорость; $\vec{\varepsilon}_{OA}$ - угловое ускорение кривошипа. Для заданного положения механизма определить скорость и ускорение точек B и C:



$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP$$

Определение ускорения:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau}$$

$$a_A^{\,n} = \omega_{OA}^{\,2} \cdot OA; \qquad a_A^{\,\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau}$$

$OX:$

$$0 = 0 + a_A^{\,\tau} + a_{BA}^{\,n} \cdot \sin 30^0 - a_{BA}^{\,\tau} \cdot \cos 30^0 \,(1)$$

$OY:$

$$a_B \cdot \cos 30^0 = -a_A^{\,n} \cdot \cos 30^0 - a_A^{\,\tau} \cdot \sin 30^0 - a_{BA}^{\,n} \,(2)$$

Из уравнения (1) определяем $a_{BA}^{\,\tau}$, из уравнения (2)- a_B.

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\,\tau}}{AB}.$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{CA}^{\,n} + \vec{a}_{CA}^{\,\tau}$$

$$a_{CA}^{\,n} = \omega_{AB}^{\,2} \cdot AC$$

$$a_{CA}^{\,\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC$$

$$OX_1 : a_{CX_1} = a_A^{\,n} + a_{CA}^{\,n} \cdot \cos 30^0 + a_{CA}^{\,\tau} \cdot \sin 30^0$$

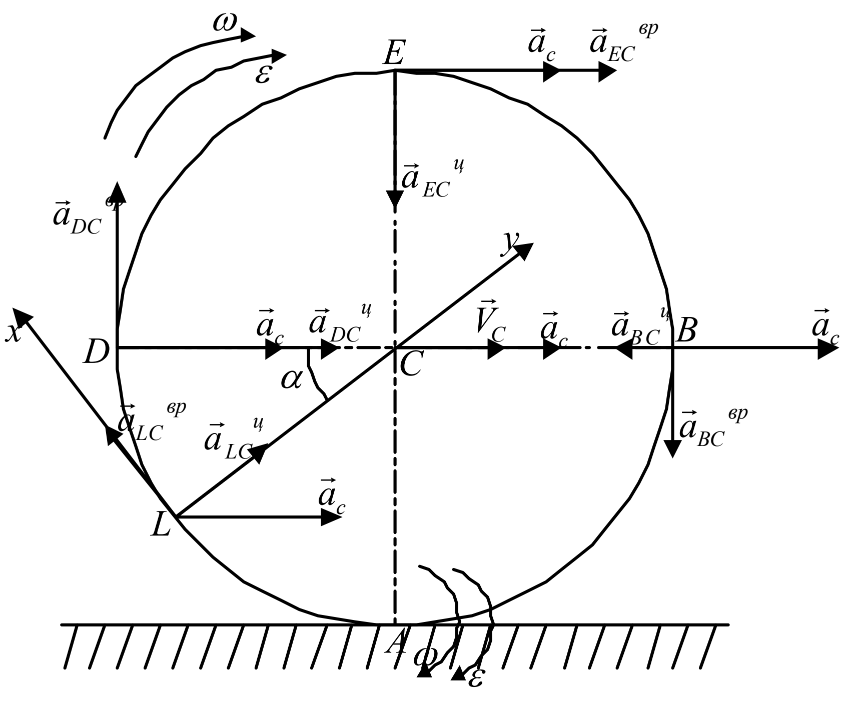
$$OY_1 : a_{CY_1} = a_A^{\,\tau} + a_{CA}^{\,n} \cdot \sin 30^0 + a_{CA}^{\,\tau} \cdot \cos 30^0$$

$$a_C = \sqrt{(a_{CX_1})^2 + (a_{CY_1})^2}$$

Пример 2.

Дано: $V_C; a_C; R$.

Определить a_B , a_E a_D a_L



$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}; \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}{}^{вр} + \vec{a}_{BC}{}^{ц}$$

$$\omega = \frac{V_C}{R}; \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dfrac{V_C}{R}}{dt} = \frac{a_C}{R}$$

$$a_{BC}{}^{ц} = \omega^2 \cdot BC = \omega^2 \cdot R; \qquad a_{BC}{}^{вр} = \varepsilon \cdot BC = \varepsilon \cdot R;$$

$$a_B = \sqrt{(a_C - a_{BC}{}^{ц})^2 + (-a_{BC}{}^{вр})^2}$$

$$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}; \qquad \vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}{}^{вр} + \vec{a}_{EC}{}^{ц}$$

$$a_{EC}{}^{ц} = \omega^2 \cdot EC = \omega^2 \cdot R; \qquad a_{EC}{}^{вр} = \varepsilon \cdot EC = \varepsilon \cdot R;$$

$$a_E = \sqrt{(a_C + a_{EC}{}^{вр})^2 + (-a_{EC}{}^{ц})^2}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}; \qquad \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}{}^{вр} + \vec{a}_{DC}{}^{ц}$$

$$a_{DC}{}^{ц} = \omega^2 \cdot DC = \omega^2 \cdot R; \qquad a_{DC}{}^{вр} = \varepsilon \cdot DC = \varepsilon \cdot R;$$

$$a_D = \sqrt{(a_C + a_{DC}{}^{ц})^2 + (a_{DC}{}^{вр})^2}$$

$$\vec{a}_L = \vec{a}_C + \vec{a}_{LC}; \qquad \vec{a}_L = \vec{a}_C + \vec{a}_{LC}{}^{вр} + \vec{a}_{LC}{}^{ц}$$

$$a_{LC}{}^{ц} = \omega^2 \cdot LC = \omega^2 \cdot R; \qquad a_{LC}{}^{вр} = \varepsilon \cdot LC = \varepsilon \cdot R;$$

$$a_L = \sqrt{(a_C \cdot \cos 30^o + a_{LC}{}^{ц})^2 + (a_{LC}{}^{вр} + a_C \cdot \sin 30^o)^2}$$

3. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА).

3.1. Уравнения движения.

Сферическим движением твердого тела называют такое движение при котором одна его точка все время остается неподвижной.

Все точки тела, совершающего сферическое движение, движутся по траекториям, которые располагаются на сферах соответствующего радиуса. Сферически движущееся тело обладает тремя степенями свободы.

Такое движение совершает, например, волчок, у которого неподвижна точка его опоры о плоскость., или любое другое тело, закрепленное в точке *O* шаровым шарниром.

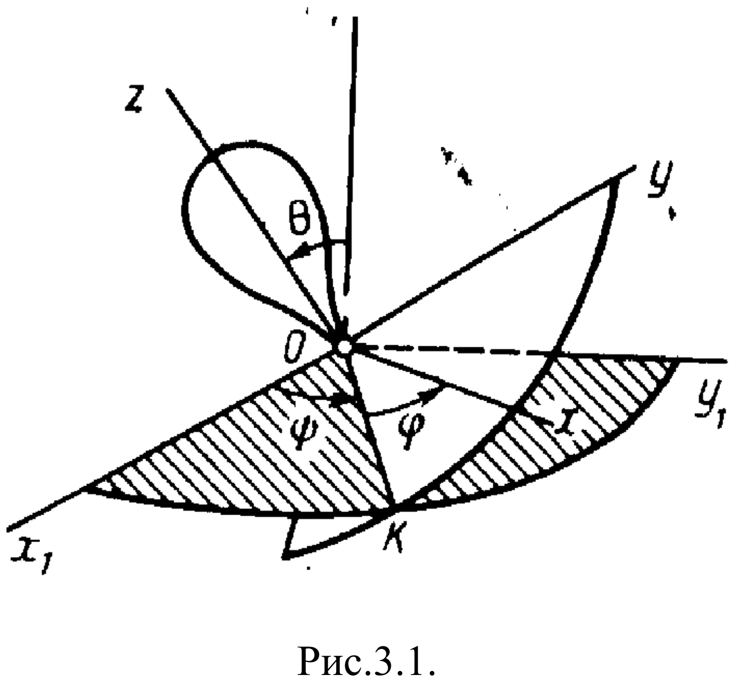


Рис.3.1.

Найдем, какими параметрами определяется положение тела, имеющего неподвижную, точку. Для этого свяжем жестко с телом трехгранник *Oxyz,* по положению которого можно судить о положении тела (см.рис.3.1). Линия *OK.,* вдоль которой пересекаются плоскости *Oxy* и Ox_1y_1 называется **линией узлов**

. Тогда положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ трехгранника *Oxyz,* а с ним и самого тела можно определить углами:

$$\varphi = \angle KOx, \psi = \angle x_1OK, \theta = \angle z_1OZ$$

Эти углы, называемые *углами Эйлера,* имеют следующие, взятые из небесной механики наименования: φ — *угол собственного вращения,* ψ — *угол прецессии,* θ — *угол нутации.* Положительные направления отсчета углов показаны на рис.3.1 стрелками.

Чтобы знать движение тела, надо знать его положение по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ в любой момент времени, т. е. знать зависимости:

$$\psi = f_1(t)$$

$$\theta = f_2(t)$$

$$\varphi = f_3(t)$$

Данные уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.*

3.2. Угловая скорость тела

При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \varphi'$, при изменении угла ψ — вращение вокруг оси Oz_1 (прецессия) с угловой скоростью $\omega_2 = \psi'$ и при изменении угла θ — вращение вокруг линии узлов OK (нутация) с угловой скоростью $\omega_3 = \theta'$. Векторы w_1, w_2 w_3 этих угловых скоростей направлены соответственно по осям OZ, OZ_1 и OK. . Поскольку при движении тела изменяются вообще все три угла, движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью w, равной геометрической сумме названных угловых скоростей. Таким образом, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$

Поскольку значения w_1, w_2, w_3 со временем изменяются, вектор w будет при движении тела тоже изменяться и численно, и по направлению. По этой причине её называют еще *мгновенной угловой скоростью тела.*

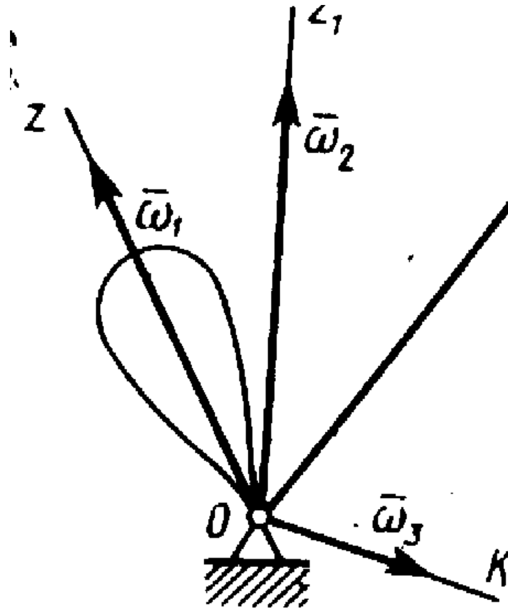


Рис.3.2

3.3. Геометрическая картина движения тела.

Если тело имеет в данный момент времени угловую скорость *w,* то его элементарное перемещение за промежуток времени *dt* представляет собой элементарный поворот на угол $d\theta$ $=wdt$ $d\theta = \omega dt$ вокруг оси *OP,* вдоль которой направлен вектор *w*. Эта ось, как было уже сказано, *OP* называется *мгновенной осью вращения.* Иначе, мгновенная ось вращения — это ось, элементарным поворотом вокруг которой тело перемещается из данного положения в положение бесконечно близкое к данному. От неподвижной оси мгновенная ось вращения отличается тем, что ее направления и в пространстве, и в самом теле непрерывно меняются.

Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту неподвижную точку.

3.4. Угловое ускорение тела, совершающего сферическое движение

Векторная величина $\varepsilon = dw/dt$, характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется **угловым ускорением тела в данный момент времени или мгновенным угловым ускорением**.

При изменении вектора w его конец будет описывать в пространстве некоторую кривую *AD,* являющуюся годографом вектора *w* (рис.3.3).

Тогда, сравнивая выражение $\varepsilon = dw/dt$ с равенством $v=dr/dt$, приходим к выводу, что угловое ускорение можно вычислять как скорость, с которой конец вектора *w* перемещается вдоль кривой *AD.* В частности, направление ε совпадает с направлением касательной к кривой *AD* в соответствующей точке.

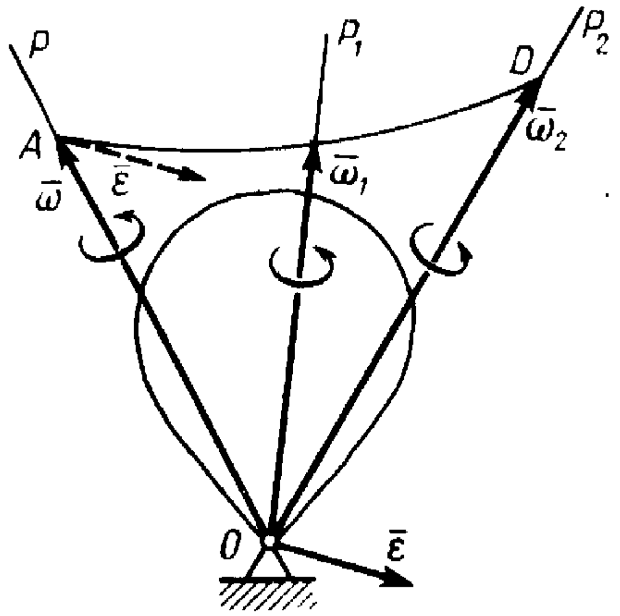


Рис.3.3.

В отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, направление вектора ε не совпадает с направлением вектора *w*.

Векторы *w* и ε являются основными кинематическими характеристиками движения тела, имеющего неподвижную точку. Их можно определить аналитически, зная уравнения движения сферически движущегося тела $\varphi = f_1(t)$, $\psi = f_2(t)$, $\theta = f_3(t)$.

3.5. Скорости и ускорения точек тела

Так как тело, движущееся вокруг неподвижной точки, имеет в каждый момент времени мгновенную ось вращения *OP,* вокруг которой происходит элементарный поворот с угловой скоростью *w*, то вектор скорости какой-нибудь точки *M* тела будет определяться в этот момент равенством $v = \omega \times r$, где *r*-радиус-вектор, проведенный в точку *M* из неподвижной точки *O* (рис.3.4).

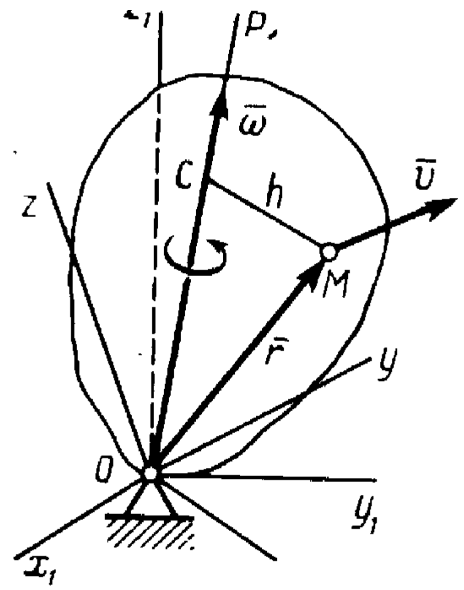


Рис.3.4.

Направлен вектор v перпендикулярно плоскости *MOP,* проходящей через точку *M* и ось *OP*, в сторону поворота тела. Численно равен $v=wh$, где $h=MC$— расстояние точки М от мгновенной оси

Геометрически скорость любой точки *M* тела в данный момент времени можно найти, зная в этот момент скорость v_A какой-нибудь точки *A* тела и направление скорости v_B другой точки *B* этого тела. Пусть v_A и направление v_B известны. Проведем тогда через точку *A* плоскость I*,* перпендикулярную вектору v_A (рис.3.5). Как показано выше, мгновенно ось *OP* должна лежать в этой плоскости. Но одновременно ось *OP* должна лежать и в плоскости *2,* проведенной

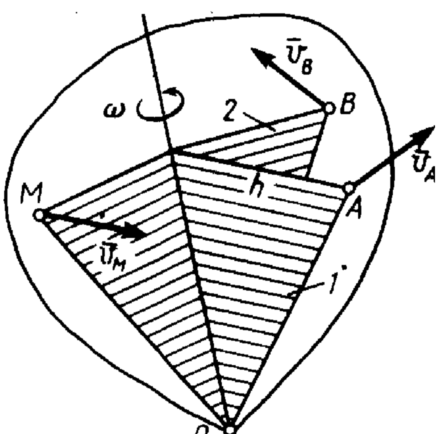


Рис.3.5.

через точку B перпендикулярно вектору V_B. Следовательно, прямая, по которой пересекутся эти плоскости, и будет мгновенной осью вращения *OP.* Теперь, определив расстояние h точки A от оси *OP,* найдем угловую скорость w тела в данный момент времени по формуле $w=v_A/h$. После этого значение скорости v_M любой точки M тела находится по формуле $v=wh$, а вектор v_M будет направлен перпендикулярно плоскости *OMP*.

В частном случае, когда известно, что скорость какой-то точки тела равна в данный момент времени нулю, прямая, проходящая через эту точку и неподвижную точку O тела, будет мгновенной осью вращения и расчет существенно упростится.

Векторная запись $v=w\times r$ может быть развернута в запись, называемую кинематическими формулами Эйлера :

$$v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \quad v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \quad v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \quad ,$$

где, v_x, v_y, v_z - проекции скорости точки M на подвижные координатные оси,

координаты (x, y, z) любой точки M рассматриваемого тела относительно подвижных осей - постоянные во времени величины,

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекции угловой скорости сферически движущегося тела на подвижные координатные оси.

Ускорение точки M определим, вновь воспользовавшись равенством $v=w\times r$. Дифференцируя его по времени, найдем $a = (\varepsilon \times r) + (\omega \times v)$.

Ускорение $a_1 = (\varepsilon \times r)$ называют еще *вращательным,* а ускорение $a_2 = (\omega \times v)$ — *осестремительным* ускорением точки M. Вектор a_1 направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку M и вектор ε (рис. 3.6), а по модулю $a_1 = \varepsilon r \sin\beta = \varepsilon h_1$,

где h_1 — расстояние от точки M_до вектора ε.

Вектор же a_2, перпендикулярный одновременно v и w, будет направлен вдоль MC (см. рис. 3.6), причем по модулю $a_2 = \omega v \sin 90^0 = \omega^2 h$.

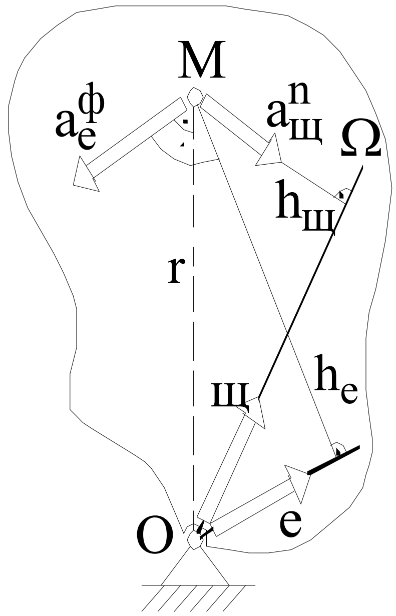


Рис.3.6

Часто вектор угловой скорости сферически движущегося тела постоянен по модулю и вращается вокруг неподвижной оси (описывает поверхность прямого кругового конуса). В этом случае вектор $\vec{\omega}$ можно уподобить стержню (см. рис. 3.7), вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω_ω

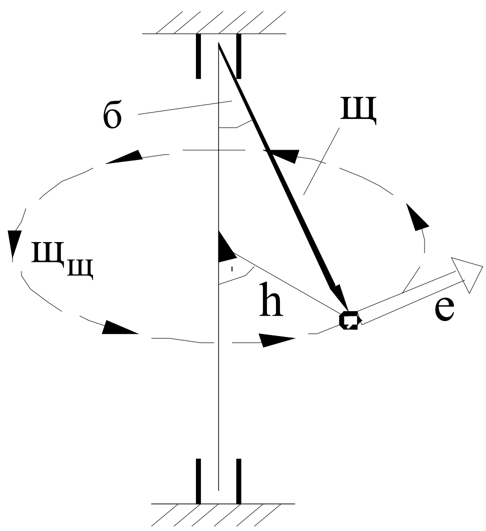


Рис.3.7.

и тогда, пользуясь аналогией $v = h \cdot \omega$, можно записать:

$$\varepsilon = h \cdot \omega_\omega = \left(\omega \cdot sin\,\alpha\right) \cdot \omega_\omega .$$

Математическая одинаковость формул для вычисления ускорений при вращательных движениях вокруг оси и точки позволяют рекомендовать трёхшаговую процедуру вычисления ускорения точек сферически движущегося тела:

1. Тело предполагается в рассматриваемый момент времени вращающимся вокруг неподвижной оси, совпадающей с мгновенной осью вращения Ω (см. рис.3.6). При таком предположении определяется нормальная составляющая ускорения – по формуле $a_\omega^n = h_\omega \cdot \omega^2$; направлена она перпендикулярно Ω и пересекает её; $\vec{a}_\omega^n$ называют осестремительной составляющей ускорения;

1. Тело предполагается вращающимся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр сферического движения параллельно $\vec{\varepsilon}$; при таком предположении определяется касательная составляющая ускорения $\vec{a}_\varepsilon^\tau$ - модуль по формуле $a_\varepsilon^\tau = h_\varepsilon \cdot \varepsilon$; направлена же эта составляющая так, чтобы глядя навстречу вектору $\vec{\varepsilon}$ видеть, что уподобленный силе вектор $\vec{a}_\varepsilon^\tau$ действует в направлении поворота тела против хода стрелки часов; $\vec{a}_\varepsilon^\tau$ называют вращательной составляющей ускорения.

3. Полное ускорение точки равно сумме осестремительной и вращательной составляющих - $\vec{a} = \vec{a}_\omega^n + \vec{a}_\varepsilon^\tau$.

Последнее равенство выражает теорему Ривальса об ускорении точки тела, совершающего сферическое движение вокруг неподвижной точки: ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равно векторной сумме вращательного и осестремительного ускорений.

В общем случае вращательное и осестремительное ускорения не перпендикулярны друг другу, следовательно, модуль ускорения точки, как диагонали параллелограмма ускорений, вычисляются по формуле:

$$a = \sqrt{a_{вр}^2 + a_{ос}^2 + 2a_{вр}a_{ос}cos(a_{вр}a_{ос})}$$

3.6. ПРИМЕР (на кинематику сферического движения тела)

Дано.- Водило 1 вращается (рис.3.8) вокруг неподвижной вертикальной оси OD с постоянной угловой скоростью

$\omega_1 = 100\,c^{-1}$; 2 – подвижное и 3 – неподвижное конические зубчатые колёса; $OM = OB = 0{,}1$ м; $\alpha = 30^o$. Определить: скорость и ускорение точки M.

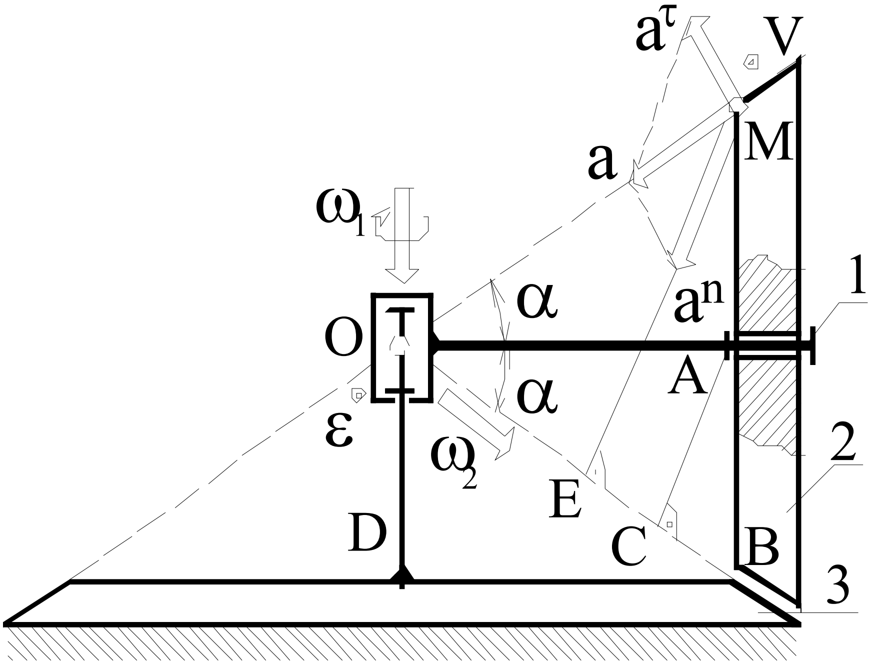


Рис.3.8.

Решение.- Тело 2 (шестерня) совершает сферическое движение вокруг центра O, без скольжения обкатываясь по неподвижному зубчатому колесу 3. Следовательно $v_B = v_O = 0$, т.е. OB - мгновенная ось вращения тела 1. В рассматриваемый момент времени точка A движется в направлении зрачка читателя. Поэтому вектор $\vec{\omega}_2$ направляем от O к B.

Модуль скорости точки A_1, принадлежащей вращательно движущемуся телу 1: $v_{A_1} = AO \cdot \omega_1$.

Модуль скорости точки A_2, принадлежащей сферически движущемуся телу 2: $v_{A_2} = AC \cdot \omega_2$.

Точки A_1 и A_2 совпадают во времени. Поэтому $v_{A_1} = v_{A_2} \mapsto$

$$\omega_2 = \frac{AO}{AC} \cdot \omega_1 = \frac{\omega_1}{sin\alpha} = \frac{100}{sin30^o} = 200\,c^{-1}.$$

Находим скорость точки M:

$v_M = ME \cdot \omega_2 = (0{,}1 \cdot 0{,}866) \cdot 200 = 17{,}3$ м/с

Направлена она перпендикулярно плоскости чертежа в сторону зрачка читателя.

Мгновенная ось вращения OB тела 2 и водило AO расположены (в функции времени) в одной вертикальной плоскости MOB, что позволяет заключить: исходящий из точки O, постоянный по модулю вектор $\vec{\omega}_2$, вращается вокруг оси OD с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_\omega = \vec{\omega}_1$ и, поэтому, траекторией его конца является окружность. Исходя из этого находим модуль углового ускорения:

$\varepsilon = (\omega_2 \cdot cos\,\alpha) \cdot \omega_1 = 200 \cdot cos\,30^o \cdot 100 = 17300\,c^{-2}$.

Направлен вектор углового ускорения перпендикулярно плоскости чертежа в сторону зрачка читателя, что на рисунке отображено значком $(\bullet\, \varepsilon)$. Далее определяем:

1. Модуль осестремительного ускорения точки M

$a^n_\omega = ME \cdot \omega_2^2 = (0{,}1 \cdot sin\,60^o) \cdot 200^2 = 3460$ м/с^2;

направлен этот вектор $\vec{a}^n_\omega$ по кратчайшему расстоянию от точки M к мгновенной оси вращения $\vec{\omega}_2$;

1. Модуль вращательного ускорения точки M

$a^\tau_\varepsilon = \varepsilon \cdot MO = 17300 \cdot 0{,}1 = 1730$ м/с^2;

расположен вектор $\vec{a}^\tau_\varepsilon$ в плоскости чертежа (перпендикулярно и $\vec{\varepsilon}$, и $\overrightarrow{OM}$) и направлен влево-вверх;

3. Полное ускорение равно геометрической сумме осестремительной и вращательной составляющих – оказалось направленным от M к O и по модулю равным 3000 м/с$^{1.}$

4 СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим наиболее общий случай движения твердого тела, когда оно является свободным и может перемещаться как угодно по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$.

Свободным движением твердого тела называется такое движение, при котором тело может произвольно перемещаться в пространстве.

Установим вид уравнений, определяющих закон рассматриваемого движения. Выберем произвольную точку A тела в качестве полюса и проведем через нее оси $Ax_1'y_1'z_1'$, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом поступательно. Тогда положение тела в системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет известно, если будем знать положение полюса A, т. е. его координаты x_{1A}, y_{1A},, z_{1A} и положение тела по отношению к осям $Ax_1'y_1'z_1'$ определяемое, углами Эйлера (см. рис.4.1). Следовательно, уравнения движения свободного твердого тела, позволяющие найти его положение по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$. в любой момент времени, имеют вид

$$X_{1A}=f_1(t),\ y_{1A}=f_2(t),\ z_{1A}=f_3(t)\ ,\quad \varphi = f_4(t), \psi = f_5(t), \theta = f_6(t)$$

Установим теперь геометрическую картину рассматриваемого движения. Нетрудно видеть, что первые три из уравнений определяют то движение, которое тело совершало бы

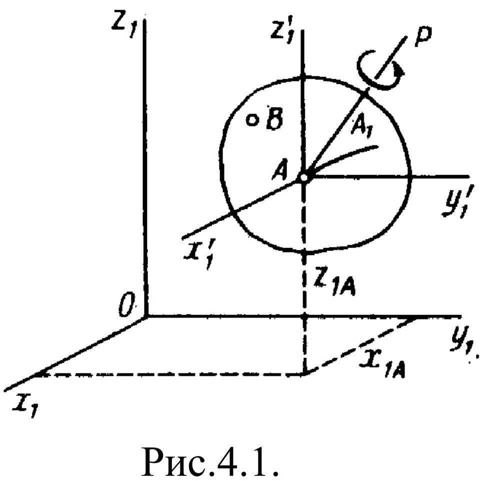


Рис.4.1.

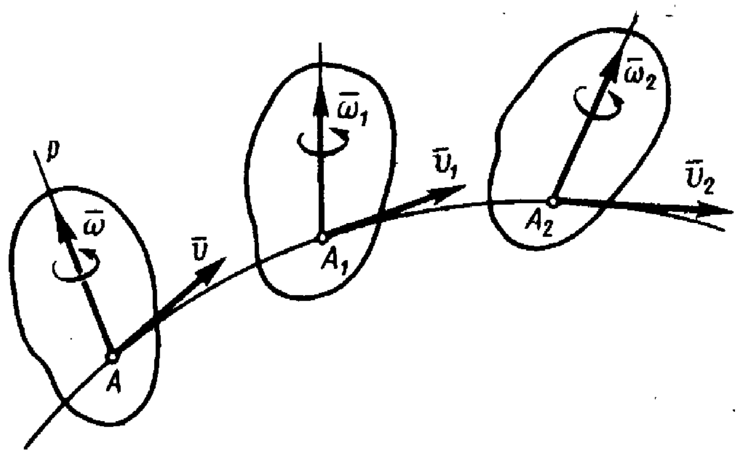


Рис.4.1.

при постоянных углах φ, ψ, θ, т. е. при поступательном движении тела вместе с полюсом A. Последние же три уравнения определяют движение, которое происходило бы при постоянных -значениях координат x_{1A}, y_{1A},, z_{1A} т. е. когда точка А неподвижна. Но движение тела вокруг неподвижной точки, слагается из элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения (см.рис.4.2). От сюда заключаем, что в общем случае *движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс А со скоростью v, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью* со *вокруг мгновенных осей вращения, проходящих, через полюс А* (рис.4.2). Такой будет, например, картина движения любого непоступательного перемещающегося в воздухе тела: брошенного камня, самолета, проделывающего фигуры высшего пилотажа, артиллерийского снаряда и т. д.

Основными кинематическими характеристиками движения являются скорость v_A и ускорение a_A полюса, определяющие скорость и ускорение поступательной части движения, а также угловая скорость w и угловое ускорение ε вращения вокруг полюса. Значения этих величин в любой момент времени можно найти по вышеуказанным уравнениям . Заметим, что если за полюс принять другую точку тела, например точку B (см. рис. 4.1), то значения v_B и a_B окажутся отличными от VA и аA (предполагается, что тело движется не поступательно).. Поэтому и здесь, как и в случае плоского движения, вращательная часть движения тела, в частности значения w и ε, от выбора полюса не зависят.

Движение свободного твердого тела может быть в частном случае плоскопараллельным; при этом векторы w и ε, будут все время перпендикулярны плоскости, параллельно которой движется тело.

Скорости и ускорения точек тела. Скорость VM любой точки M тела в рассматриваемом движении слагается, как и в случае плоскопараллельного движения , из скорости VA полюса A и скорости v_{MA}, которую точка M получает при движении вместе с телом вокруг полюса А. При этом, так как движение тела вокруг полюса A происходит как движение вокруг неподвижной точки, то значение v_{MA} определяется формулой . $v_{MA}=wAM$.

Таким образом, $v_M=v_A+v_{MA}$

Аналогично для ускорения любой точки M тела найдем $a_M=a_A+a_{MA}$, где величина a_{MA}, т. е. ускорение, которое точка M получает при движении вместе с телом вокруг полюса A,

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

5.1. Относительное, переносное и абсолютное движения точки

В ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой.

Движение, совершаемое при этом точкой, называют **сложным**. Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета), и движение вместе с палубой парохода по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых.

Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к **подвижной системе отсчета** $Oxyz$, которая в свою очередь движется относительно другой системы отсчета $O_0x_0y_0z_0$, называемой **неподвижной** (рис.5.1). Каждая из этих систем отсчета может быть связана с определенным телом.

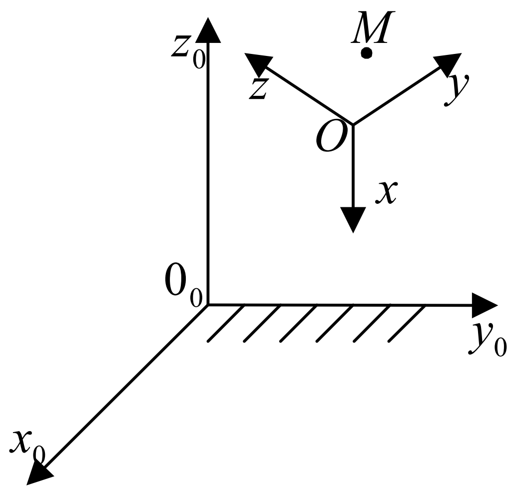


Рис.5.1

Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета, называется **относительным движением**. Скорость точки M по отношению к подвижной системе отсчета называется **относительной скоростью** ($\vec{v}_r$), а ускорение - **относительным ускорением** ($\vec{a}_r$).

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета (и всеми, неизменно связанными с нею точками) по отношению к неподвижной системе отсчета является для точки M **переносным движением**.

Скорость точки, неизменно связанной с подвижными осями и с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называется **переносной скоростью** точки M в этот момент ($\vec{v}_e$). А соответствующее ускорение - **переносным ускорением** точки M ($\vec{a}_e$).

Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе, отсчета называется **абсолютным**, его скорость - **абсолютной скоростью** ($\vec{v}_a$) и ускорение - **абсолютным ускорением** ($\vec{a}_a$).

Для решения соответствующих задач кинематики необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями точки.

5.1. Формула Бура

Пусть $\vec{b}$ - произвольный вектор; $\frac{d\vec{b}}{dt}$ - полная производная данного вектора, учитывающая его изменение относительно неподвижной системы отсчета; $\frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt}$ - локальная или относительная производная вектора, учитывающая его изменение относительно подвижной системы отсчета (рис.5.2).

Имеем

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k} \,.$$

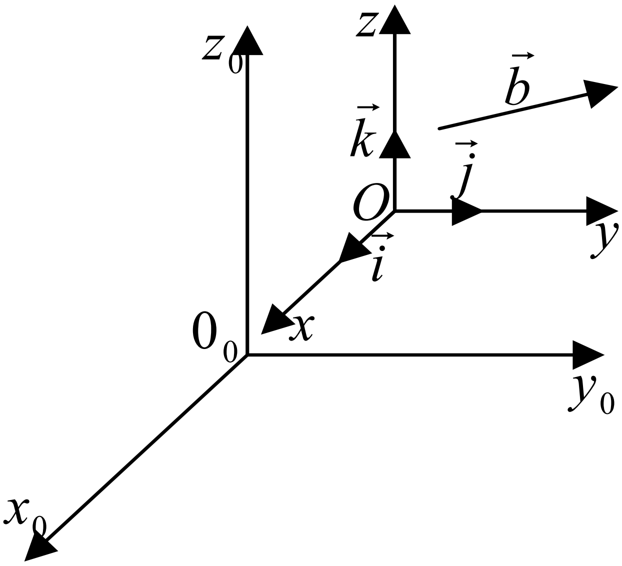


Рис.5.2

Откуда

$$\frac{d\vec{b}}{dt}=\frac{d(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k})}{dt}=\frac{db_x}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{db_y}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{db_z}{dt}\cdot\vec{k}+\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot b_x+\frac{d\vec{j}}{dt}\cdot b_y+\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot b_z$$

С учетом того, что

$$\frac{db_x}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{db_y}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{db_z}{dt}\cdot\vec{k}=\frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt};$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i};$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j};$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k},$$

последнее равенство представим в следующем виде

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{i}\,) \cdot b_x + (\vec{\omega} \times \vec{j}\,) \cdot b_y + (\vec{\omega} \times \vec{k}\,) \cdot b_z\,;$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}\,) = \frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}\,.$$

Итак

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}\,,$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость, с которой подвижная система отсчета движется относительно неподвижной.

5.3. Теорема о сложении скоростей

Пусть положение точки *M* определяется радиусами-векторами $\vec{\rho}$ и $\vec{r}$ в неподвижной и подвижной системах отсчета соответственно, а положение начала отсчета *O* подвижной системы определяется в неподвижной системе отсчета радиусом-вектором $\vec{\rho}_0$ (рис.5.3).

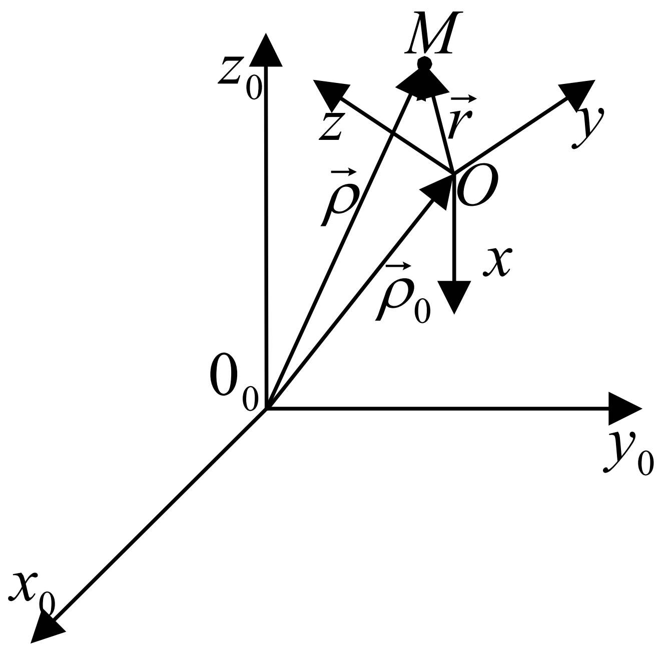


Рис.5.3

Тогда

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}\ .$$

Продифференцируем данное векторное равенство по времени:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d(\vec{\rho}_0 + \vec{r}\,)}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\,,$$

где

$\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_a$ - абсолютная скорость точки;

$$\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} = \vec{v}_0\,.$$

С учетом этого получаем

$$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \frac{\widetilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{r} = \vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}\ , \tag{5.1}$$

где

$\dfrac{\widetilde{d}\vec{r}}{dt} = \vec{v}_r$ - относительная скорость точки;

$\vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{r} = \vec{v}_e$ - переносная скорость точки, а

$\vec{\omega}_e$ - **переносная угловая скорость**.

Таким образом, абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее относительной и переносной скоростей.

Модуль абсолютной скорости

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2 \cdot v_e \cdot v_r \cdot cos\alpha}\ ,$$

где α – угол между векторами относительной и переносной скоростей точки.

5.4. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Обратимся к рис.5.3.

Продифференцируем векторное равенство (5.1) по времени:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d(\vec{v}_0 + \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}\,)}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}_e \times \vec{r}\,)}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

Обозначая $\frac{d\vec{v}}{dt}$ как $\vec{a}_a$ (абсолютное ускорение точки), получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{r}\,\right) + \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r\,,$$

где $\frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{a}_0$; $\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e$ (**переносное угловое ускорение**); $\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt} = \vec{v}_r$; $\frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r$,

откуда

$$\vec{a}_a = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{a}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r\,.$$

Векторная величина $\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ представляет собой сумму ускорения полюса *O*, вращательного и центростремительного ускорений соответственно. Последние два определены относительно оси углового ускорения и мгновенной оси соответственно. Другими словами данная векторная величина представляет собой переносное ускорение:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_e \times \vec{r}\,.$$

Обозначим

$$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r\,.$$

Тогда

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c\,.$$

Величина $\vec{a}_c$ называется **кориолисовым ускорением**.

Итак, абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и кориолисова ускорения.

5.5. Определение модуля и направления кориолисова ускорения

По модулю ускорение Кориолиса определяется следующим образом:

$$a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot sin\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$.

Из данной формулы видно, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) ω_e=0, т. е когда переносное движение является поступательным или если переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) v_r=0, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) когда α=0 (180°), т. е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения.

Направление вектора $\vec{a}_c$ определяется по правилу Жуковского (рис.5.4):

1. проецируем вектор относительной скорости $\vec{v}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения;

1. в этой плоскости разворачиваем полученную проекцию вектора на 90° по направлению переносного вращения (по направлению ω_e) - это и есть направление кориолисова ускорения.

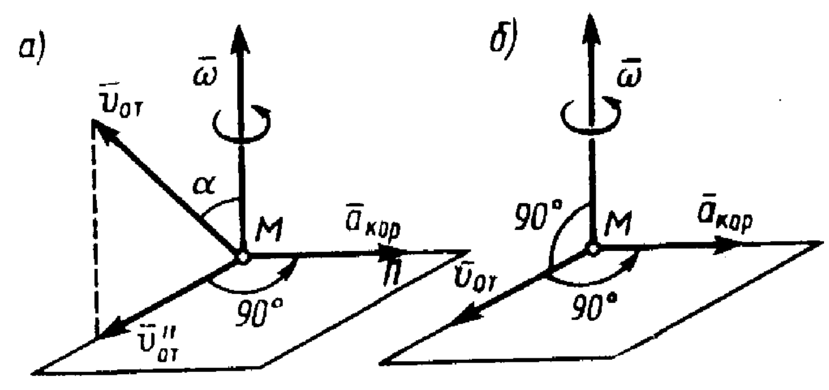


Рис.5.4.

Пример на сложное движение точки

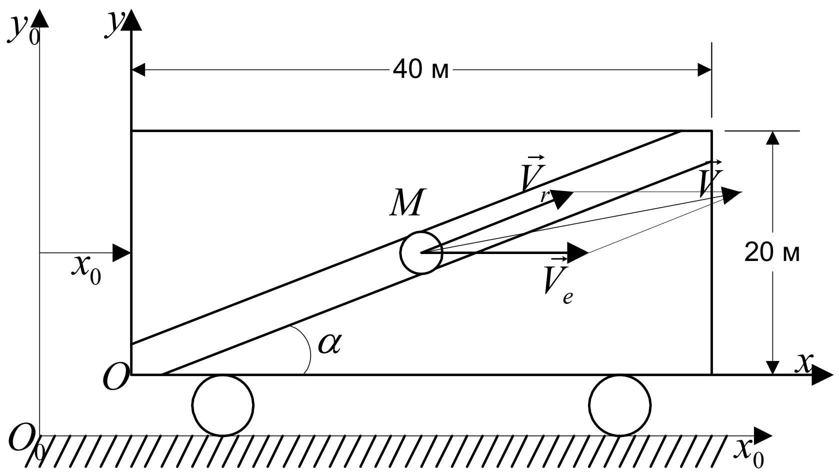
Пример 1:

$$OM = 8\cdot t^2 + 2$$
$$x_0 = 4\cdot t^2 - 5$$
$$t = 2c$$

$$V - ?$$
$$a - ?$$

$$V_r = O\dot{M} = 16\cdot t = 32\,\text{м}/\text{с}$$
$$V_e = \dot{x}_0 - 8\cdot t = 16\,\text{м}/\text{с}$$
$$\text{tg}\alpha = \frac{20}{40} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 27^o$$
$$V = \sqrt{{V_r}^2 + {V_e}^2 + 2\cdot V_r\cdot V_e\cdot\cos 27^o}$$
$$\vec{a} = {\vec{a}_e}^n + {\vec{a}_e}^\tau + {\vec{a}_r}^n + {\vec{a}_r}^\tau + \vec{a}_k$$
$${a_e}^\tau = \dot{V}_e = 8\,\text{м}/\text{с}^2$$
$${a_r}^\tau = \dot{V}_r = 16\,\text{м}/\text{с}^2$$

$$a = \sqrt{({a_e}^\tau)^2 + ({a_r}^\tau)^2 + 2\cdot {a_e}^\tau\cdot {a_r}^\tau\cdot\cos 27^o}$$



Пример 2.

$$\alpha = 30^o$$
$$OM = 3\cdot t^2 - 4$$
$$\varphi = 3\cdot t^3$$
$$t = 2c$$

$$V - ?$$
$$a - ?$$

Решение:

$$V_r = \frac{dOM}{dt} = 6 \cdot t = 12\,{}^{м}\!/\!{}_{c}; \qquad V_e = \omega_e \cdot R$$

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 9 \cdot t^2 = 36\,{}^{рад}\!/\!{}_{c}$$

$$OM = 8м; \qquad R = 8 \cdot \sin 30^o = 4м$$

$$V_e = 36 \cdot 4 = 144\,{}^{м}\!/\!{}_{c}$$

$$V = \sqrt{V_e^{\,2} + V_r^{\,2}} = 144.5\,{}^{м}\!/\!{}_{c}; a_r^{\,\tau} = \dot{V}_r = 6\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$$

$$a_e^{\,n} = \frac{V_e^{\,2}}{R} = 5.184\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$$

$$a_e^{\,\tau} = \dot{V}_e = (\dot{\omega}_e \cdot R) = 18 \cdot t \cdot 4 = 144\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$$

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin(180 - \alpha) =$$

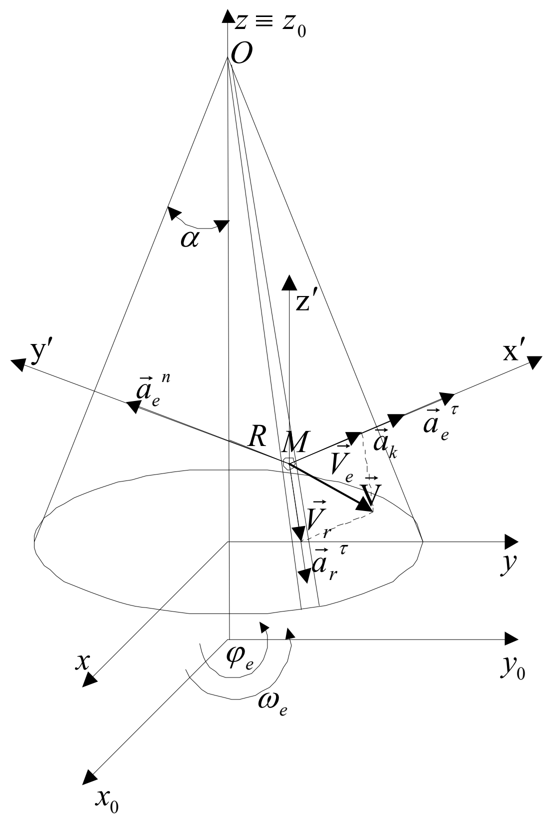
$$= 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin\alpha = 432\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$$

$$OX: \qquad a_x = a_k + a_e^{\,\tau}$$

$$OY: \qquad a_y = a_e^{\,n} - a_r^{\,\tau} \cdot \sin\alpha$$

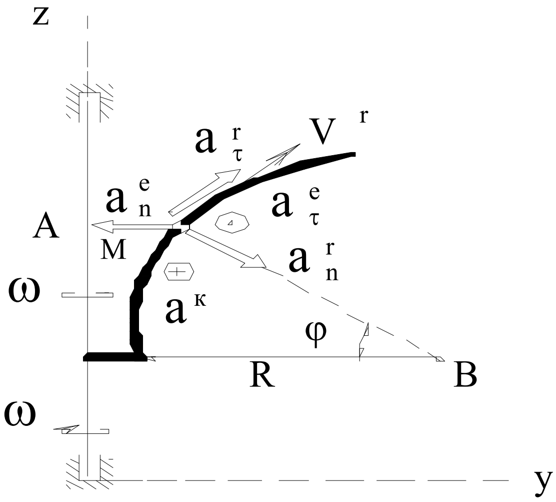
$$OZ: \qquad a_z = -a_r^{\,\tau} \cdot \cos\alpha$$

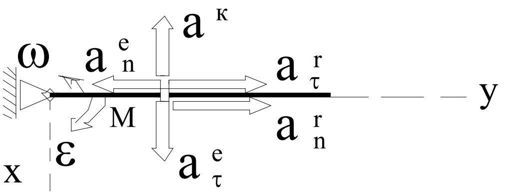
$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$



ПРИМЕР 3.-

Дано.- Четверть кольца радиуса $R = 0{,}4$ м скреплена со стержнем, вращающимся вокруг оси z (см. рис.5.7). В интересующий момент времени: $\varphi = 45^{o}$, $AM = h = 0{,}5$ м; $v^{r} = 20$ м/с; $a_{\tau}^{r} = 1000$ м/с^2; ; $\omega = 30\sqrt{2}\,c^{-1}$ $\varepsilon = 1000\,c^{-2}$. Направления векторов $\vec{v}^{\,r}$, $\vec{a}_{\tau}^{\,r}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ указаны на рисунке.





Определить для заданного момента времени проекции абсолютного ускорения точки M на оси неподвижной системы отсчёта.

Решение. – За подвижную принимаем систему отсчёта, связанную с вращающимся телом и применяем теорему сложения ускорений – $\vec{a}^{\,a} = \vec{a}^{\,r} + \vec{a}^{\,e} + \vec{a}^{\,k}$.

Т.к. относительной траекторией точки M является дуга окружности (радиуса $R = 0{,}4$ м с центром в точке B), то $\vec{a}^{\,r}$ представляем в виде нормальной и касательной составляющих - $\vec{a}_{n}^{\,r}$ и $\vec{a}_{\tau}^{\,r}$; первая направлена от B к M; вторая – по касательной в точке M к указанной относительной траектории. Их модули:

$$a_n^r = \frac{\left(v^r\right)^2}{R} = \frac{(20)^2}{0,4} = 1000 \text{ м/с}^2; \qquad \text{и} \quad a_\tau^r = 1000 \text{ м/с}^2 \text{ - .}$$

Переносной траекторией точки M (абсолютной траекторией той точки подвижной системы, с которой в рассматриваемый момент времени совпадает точка M) является окружность с центром в точке A и радиусом $MA = h = 0,5$ м.

Переносное ускорение также представляем в виде двух составляющих - $\vec{a}_n^e$ и $\vec{a}_\tau^e$; первая направлена от M к A (по главной нормали к переносной траектории), вторая - по касательной к ней в сторону зрачка читателя (что видно по круговой стрелке, изображающей вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$). Их модули:

$$a_n^e = MA \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot \left(30 \cdot \sqrt{2}\right) = 900 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau^e = MA \cdot \varepsilon = 0,5 \cdot 1000 = 500 \text{ м/с}^{1.}$$

Переходим к определению кориолисова ускорения - $\vec{a}^k = 2 \cdot \left(\vec{\omega}_{23} \times \vec{v}_{M2}\right)$.

Направление вектора $\vec{a}^k$ можно определять по известным из курса математики правилам векторного произведения, но более удачным считается *правило Жуковского:* чтобы определить направление кориолисовой составляющей ускорения, нужно вектор относительной скорости ($\vec{v}^r$) спроектировать на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости ($\vec{\omega}^e$; в рассматриваемом примере - $\vec{\omega}^e = \vec{\omega}$), и полученную проекцию повернуть на угол 90^o в направлении переносного вращения;

Жуковский Н.Е. (1847-1921) – выдающийся отечественный учёный, известен основополагающими работами в области аэродинамики; его «Теоретическая механика» являлась базовым курсом первую половину 20-го века.

В рассматриваемом примере вектор кориолисова ускорения оказался противоположно направленным оси x (см. рисунок). Его модуль:

$$a^k = 2 \cdot \omega_{23} \cdot v_{M2} \cdot sin\left(\angle \vec{\omega}_{23} \vec{v}_{M2}\right) = 2 \cdot \left(30 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 20 \cdot sin\, 45^o = 1200 \text{ м/с}^{1.}$$

Итак, в рассматриваемой задаче полное ускорение оказалось представленным в виде 5-ти составляющих:

$$\vec{a}^{\,a} = \vec{a}_n^{\,r} + \vec{a}_\tau^{\,r} + \vec{a}_n^{\,e} + \vec{a}_\tau^{\,e} + \vec{a}^{\,k}.$$

Решаем его аналитическим способом - путём проектирования на оси x, y, z :

$$a_x^a = 0 + 0 + 0 + a_\tau^e + \left(-a^k\right) = 500 - 1200 = -700 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y^a = a_n^r \cdot cos\,45^o + a_\tau^r \cdot sin\,45^o + \left(-a_n^e\right) + 0 + 0 =$$

$$= 1000 \cdot 0{,}707 + 1000 \cdot 0{,}707 - 900 = 510 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z^a = -a_n^r \cdot sin\,45^o + a_\tau^r \cdot cos\,45^o + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Итак, абсолютное ускорение точки M в заданный момент времени (в заданном положении механической системы) перпендикулярно оси z и его проекции на оси x и y равны:

$a_x^a = -700$ м/с^2; $a_y^a = 510$ м/с^1.

6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

6.1. Основные понятия

Сложным движением твердого тела называется такое движение, при котором тело участвует одновременно в нескольких движениях.

Приведение нескольких движений к одному называется **сложением движений**. Обратный процесс - **разложение движения**.

6.2. Сложение поступательных движений

Рассмотрим сначала случай, когда относительное и переносное движения тела являются поступательными. Скорость относительного движения обозначим $\vec{v}_1$, а скорость переносного движения - $\vec{v}_2$. По теореме о сложении скоростей все точки тела в абсолютном движении имеют одну и ту же скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

т.е. абсолютное движение тела будет также поступательным.

Если тело участвует в нескольких (больше 2-х) поступательных движениях, то, последовательно применяя теорему о сложении скоростей, получим

$$\vec{v} = \sum \vec{v}_i \,.$$

6.3. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Рассмотрим случай, когда относительное движение тела является вращением с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси *aa*', связанной с кривошипом *ba* (рис.6.1), а переносное - вращением кривошипа *ba* вокруг оси *bb*', параллельной *aa*', с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Тогда движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной осям. Здесь возможны три частных случая.

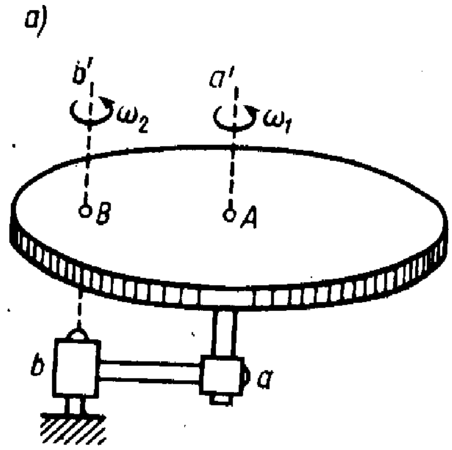


Рис.6.1

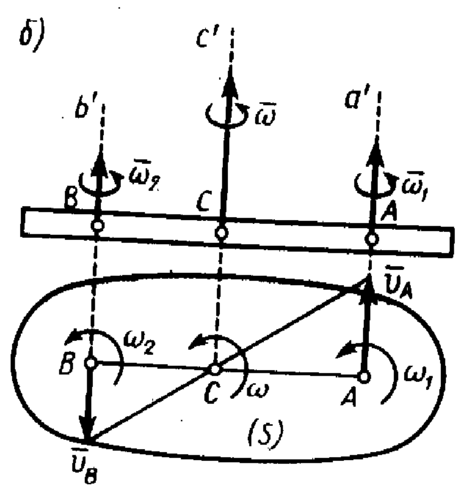


Рис.6.2

Вращения направлены в одну сторону. Изобразим сечение S тела плоскостью, перпендикулярной осям (рис.6.2). Следы осей в сечении S обозначим буквами A и B, Легко видеть, что точка A, как лежащая на оси aa', получает скорость только от вращения вокруг оси bb', следовательно

$$v_A=\omega_2\cdot AB. \tag{6.1}$$

Аналогично

$$v_B=\omega_2\cdot AB. \tag{6.2}$$

При этом векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ параллельны и направлены в разные стороны. Тогда точка C является мгновенным центром скоростей, следовательно ось Cc', параллельная осям aa' и bb', является мгновенной осью вращения тела.

Для определения угловой скорости абсолютного вращения тела вокруг оси Cc' и положения самой оси, т.е. точки C, воспользуемся следующим равенством:

$$\omega=v_B/BC=v_A/AC,$$

откуда

$$\omega=(v_A+v_B)/AB. \tag{6.3}$$

Последний результат получается из свойств пропорции. Подставляя в (6.3) формулы (6.1) и (6.2) окончательно получим

$$\omega=\omega_1+\omega_2;$$
$$\omega_1/BC=\omega_2/AC=\omega/AB.$$

Итак, если тело участвует одновременно в двух направленных в одну сторону вращениях вокруг параллельных осей, то его результирующее движение будет вращением вокруг мгновенной оси, параллельной данным.

С течением времени мгновенная ось вращения Cc' меняет свое положение, описывая цилиндрическую поверхность.

Вращения направлены в разные стороны. Изобразим опять сечение S тела и допустим, для определенности, что $\omega_1 > \omega_2$ (рис.6.2).

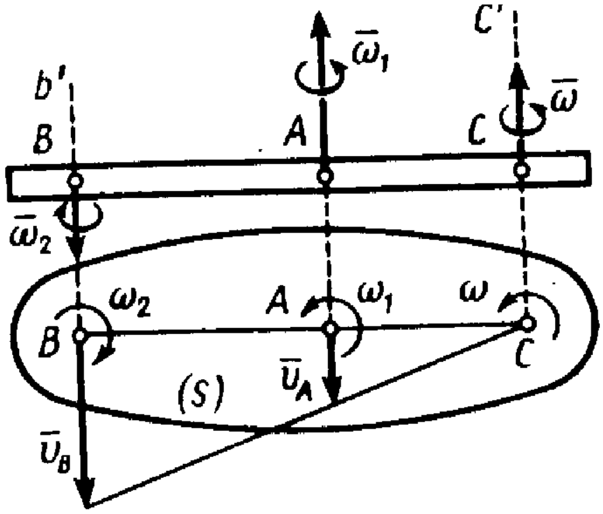


Рис.6.2

Тогда, рассуждая, как в предыдущем случае, найдем

$$\omega = \omega_1 - \omega_2;$$

$$\omega_1 / BC = \omega_2 / AC = \omega / AB.$$

В этом случае результирующее движение также является вращением вокруг мгновенной оси Cc'.

Пара вращений. Рассмотрим случай, когда вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны, но по модулю $\omega_1 = \omega_2$ (рис.3). Такая совокупность вращений называется **парой вращений**. В этом случае получаем, что $v_A = v_B$.

Мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости

$$v = \omega_1\, AB.$$

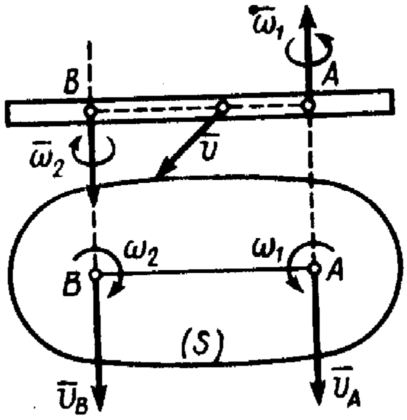


Рис.6.3

Следовательно, результирующее движение тела будет мгновенно поступательным движением. Иначе говоря, пара вращений эквивалентна мгновенно поступательному движению.

Справедлив и обратный вывод: мгновенно поступательное движение твердого тела эквивалентно паре вращений.

6.4. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть относительное движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью ω_1 вокруг оси a_1a, укрепленной на кривошипе 2 (рис.6.4), а переносным является вращение кривошипа с угловой скоростью ω_2 вокруг оси b_1b, которая с осью a_1a, пересекается в точке O.

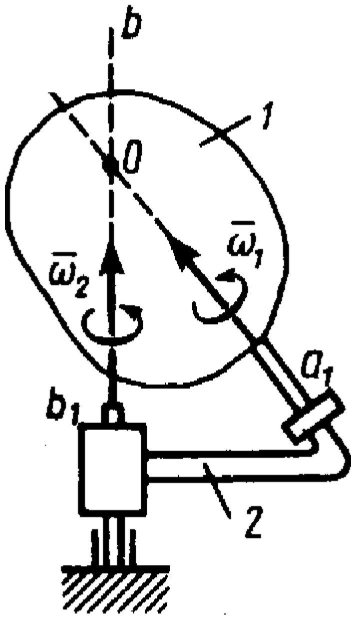


Рис.6.4

Очевидно, что в этом случае скорость точки *O*, как лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю и результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки *O* (сферическое движение). Тогда тело имеет в данный момент времени угловую скорость $\vec{\omega}$, направленную по мгновенной оси вращения *Oc* (рис.6.5).

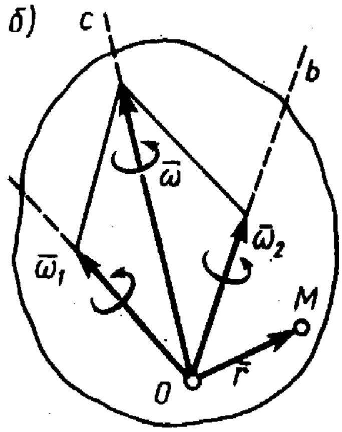


Рис.6.5

Чтобы определить значение ω, найдем скорость какой-нибудь точки *M* тела, радиус-вектор которой $\vec{r} = \vec{OM}$. В относительном движении (вращение вокруг оси *Oa*) точка *M*, получит скорость

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} \; .$$

В переносном же движении (вращение вокруг оси *Ob*) точка получит скорость

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r} \; .$$

Тогда абсолютная скорость точки *M* -

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} \; .$$

Но так как результирующее движение тела является мгновенным вращением с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}$, то должно выполняться:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \ .$$

Откуда

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \, . \tag{6.3}$$

С течением времени ось *Oc* меняет свое положение, описывая коническую поверхность, вершина которой находится в точке *O*.

Если тело участвует во вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в точке *O*, то, последовательно применяя формулу (3), найдем, что результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку *O*, с угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \sum \vec{\omega}_i \ .$$

6.5. Сложение поступательного и вращательного движений

Пусть относительным движением тела является вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси *Aa*, а переносным - поступательное движение со скоростью $\vec{v}$. В зависимости от значений угла α между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$ здесь возможно три случая.

Скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения. Легко видеть, что это движение представляет собой (по отношению к плоскости *П*, перпендикулярной оси *Aa*) плоскопараллельное движение, подробно изученное ранее (рис. 6.6). Если считать точку *A* полюсом, то рассматриваемое движение, как и всякое плоскопараллельное, будет действительно слагаться из поступательного со скоростью v и из вращательного вокруг оси *Aa*, проходящей через полюс, с угловой скоростью ω.

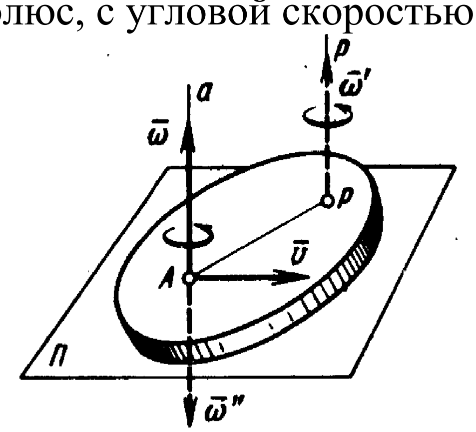


Рис. 6.6

Вектор $\vec{v}$ можно заменить парой угловых скоростей $\vec{\omega}'$ и $\vec{\omega}''$, причем $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, а $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$). При этом расстояние AP определится из равенства $v = \omega' \cdot AP$. Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ дают при сложении нуль, и мы получаем, что движение тела в этом случае можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг оси Pp с угловой скоростью $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$.

Скорость поступательного движения параллельна оси вращения. Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси Aa с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поступательного со скоростью $\vec{v}$, направленной параллельно оси Aa (рис. 6.7), то такое движение тела называется **винтовым**. Ось Aa называют **осью винта**. Когда векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ направлены в одну сторону, то винт будет **правым**; если в разные стороны - **левым**.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется **шагом винта**. Если величины v и ω постоянны, то шаг h винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через T, получаем в этом случае $v \cdot T = h$ и $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$, откуда $h = 2 \cdot \pi \cdot v / \omega$. Величина $p = v / \omega$ называется параметром винта. Откуда $h = 2 \cdot \pi \cdot p$.

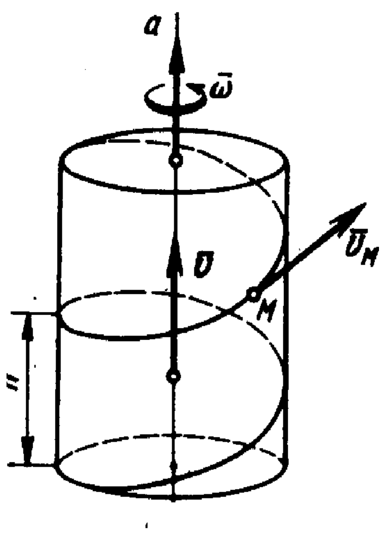


Рис. 6.7

При постоянном шаге любая точка M тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Скорость точки M, находящейся от оси винта на расстоянии r, слагается из поступательной скорости v и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна

$\omega \cdot r$. Следовательно

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 \cdot r^2}\ .$$

Направлена скорость $\vec{v}_M$ по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка M, разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии обратятся в прямые, наклоненные к основанию цилиндра под углом, тангенс которого вычисляется по следующей формуле

$$tg\alpha = h/(2 \cdot \pi \cdot r).$$

Скорость поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения. Сложное движение, совершаемое телом в этом случае (рис. 6.8), представляет собой общий случай движения свободного твердого тела.

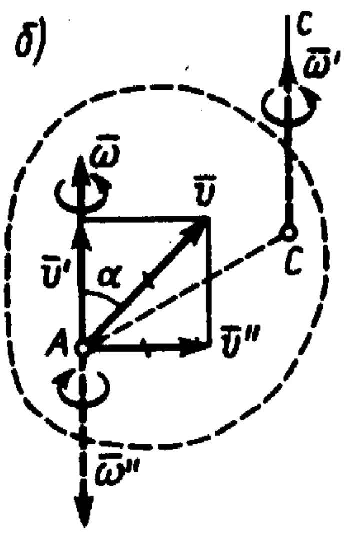


Рис. 6.8

Разложим вектор $\vec{v}$ на составляющие: $\vec{v}'$, направленную вдоль $\vec{\omega}$ ($v' = v \cdot cos\alpha$) и $\vec{v}''$, перпендикулярную $\vec{\omega}$ ($v'' = v \cdot sin\alpha$). Скорость $\vec{v}''$ можно заменить парой угловых скоростей $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$, после чего векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ можно отбросить. Расстояние AC найдем по формуле: $AC = v''/\omega$. Тогда у тела остается вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ и поступательное движение со скоростью $\vec{v}'$. Следовательно, распределение скоростей точек тела в данный момент времени будет таким же, как при винтовом движении вокруг оси Cc с угловой скоростью $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ и поступательной скоростью $\vec{v}'$ ($v' = v \cdot cos\alpha$). Проделанными операциями мы перешли от полюса A к полюсу C. Этот результат подтверждает, что в общем случае движения твердого тела угловая скорость при перемене полюса не изменяется, а меняется только поступательная скорость.

Так как при движении свободного твердого тела величины $\vec{\omega}$, $\vec{v}$ и α будут вообще все время изменяться, то будет непрерывно меняться и положение оси Cc, которую поэтому называют **мгновенной винтовой осью**.

ПРИМЕР 1.-

Дано.- Схема зубчато-рычажного механизма изображена на рис.6.9: слева - главный вид, посередине – вид сбоку; 1 – неподвижное, 2 и 3 подвижные зубчатые колёса; 4 – рычаг (иначе: водило), имеющий 3 оси вращения (О, А, В) для

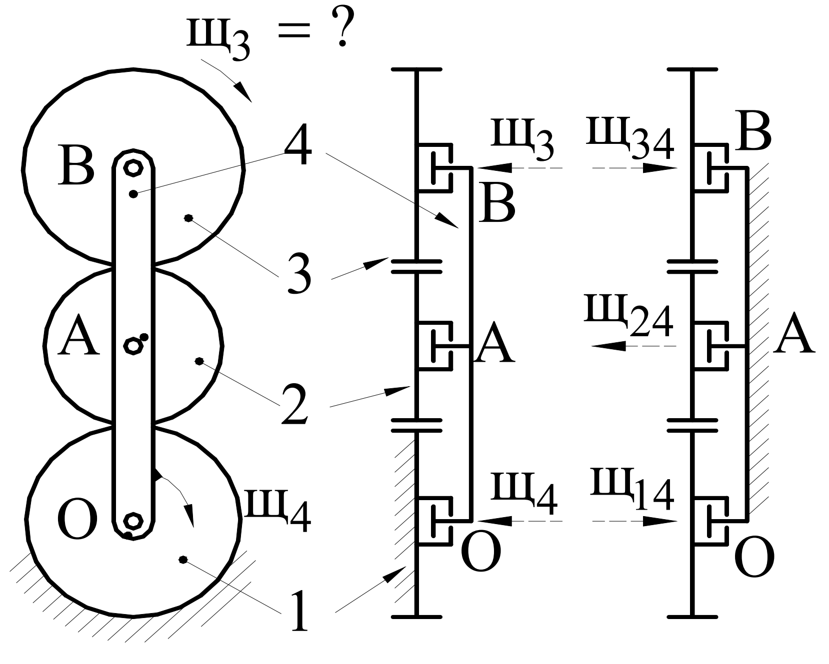


Рис.6.9.

зубчатых колёс. $r_1 = r_3$. Справа на рис. 6.9 изображён рассматриваемый механизм с позиций исследователя, мысленно поместившего себя в системе отсчёта, связанной с водилом ОАВ.

Задачей данного примера требуется установить зависит ли угловая скорость ω_3 зубчатого колеса 3 от угловой скорости водила 4. И если зависит, вывести соответствующую формулу.

Решение.- Анализ движения начинают рассматривать с позиций наблюдателя, находящегося в осенесущей системе отсчёта. Это позволяет зубчато-рычажные механизмы (которыми они являются с позиций исследователя, находящегося в неподвижной системе отсчёта) превратить в рядовое соединение зубчатых колёс; их кинематическое исследование элементарно. Переход же от относительного движения к абсолютному осуществляется с помощью закона сложения угловых скоростей. $\vec{\omega}_{14}$, $\vec{\omega}_{24}$, $\vec{\omega}_{34}$ - угловые скорости 1-го, 2-го и 3-го зубчатых колёс относительно водила (относительно системы отсчёта, в которой оси вращения оказываются неподвижными).

$$\omega_{14} \cdot r_1 = \omega_{24} \cdot r_2, \quad \omega_{24} \cdot r_2 = \omega_{34} \cdot r_3 \quad \mapsto \quad \omega_{34} \cdot r_3 = \omega_{14} \cdot r_1 .$$

Т.к. $r_1 = r_3$, то $\vec{\omega}_{34} = \vec{\omega}_{14}$

Теперь, 2 раза задействовав закон сложения угловых скоростей, получаем:

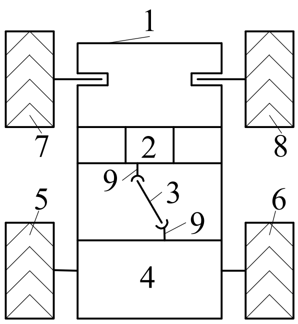
$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{34} + \vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_{14} + \vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_1 = 0,$$

т.е. 3-е зубчатое колесо относительно неподвижной системы отсчёта совершает поступательное движение - для него $\vec{\omega}_{34} = -\vec{\omega}_4$.

Сложное движение тела, складывающееся из 2-х вращений, таких, что относительная угловая скорость противоположна переносной и равна ей по модулю, называют *парой вращений.* У пары вращений абсолютным движением является поступательное.

Пример 2. Исследование и кинематический анализ конического дифференциала автомобиля.

Структурная схема привода ведущих колес:



1- рама автомобиля.
2- двигатель с коробкой передач.
3 -карданный вал.
4 -конический дифференциал.
5,6. ведущие колеса.
7,3. ведомые колеса.
9. муфты Гука.

Рассмотрим дифференциал:

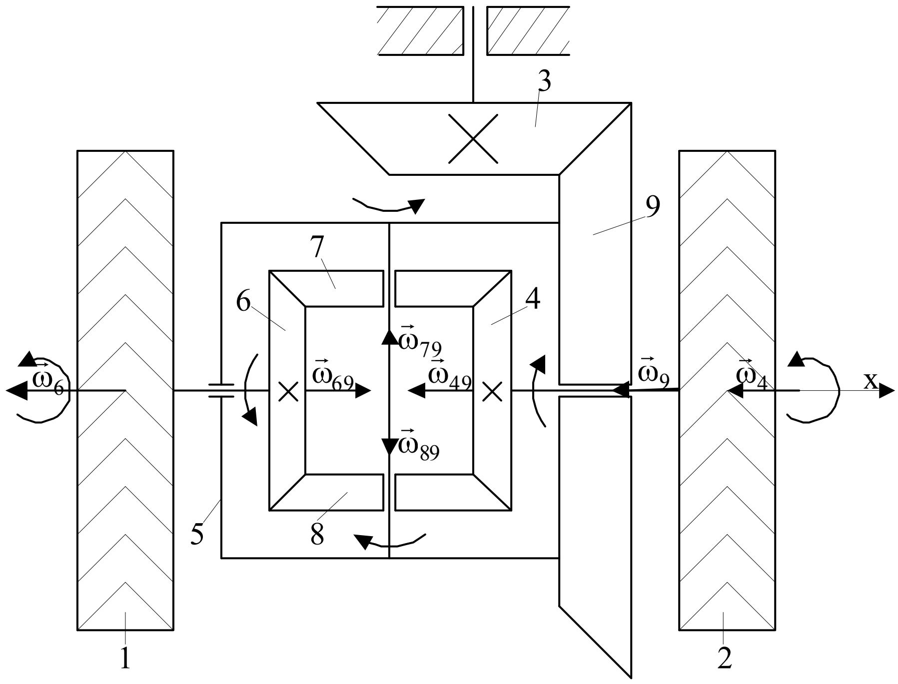
1,2- ведущие колеса

3- шестерня, передающая вращение от карданного вала.

9- шестерня, скрепленная неподвижно с корпусом дифференциала 5. 4,6,7,8- конические шестерни дифференциала.

$$5 \cdot R_3 = R_9$$
$$R_6 = R_4$$
$$R_7 = R_8 = 2 \cdot R_6$$

$$R_3 - ?$$



Предположим, что левое колесо вращается с угловой скоростью $\omega_6 = 30\,{}^{рад}\!/_{с}$, а правое колесо $\omega_4 = 20\,{}^{рад}\!/_{с}$. Применим принцип остановки дифференциала.

ω_{69}- угловая скорость колеса 6 относительно корпуса дифференциала (относительно колеса 9). Применяем закон сложения угловых скоростей для пересекающихся осей:

$$\vec{\omega}_6 = \vec{\omega}_9 + \vec{\omega}_{69}$$
$$\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_9 + \vec{\omega}_{49}$$

Спроецируем эти равенства на ось OX:

$$-\omega_6 = -\omega_9 + \omega_{69} \qquad (1)$$
$$-\omega_4 = -\omega_9 - \omega_{49} \qquad (2)$$

Так как радиусы колес 4 и 6 равны, то $\omega_{69} = \omega_{49}$. Сложим уравнения (1) и (2):

$$-\omega_6 - \omega_4 = -2 \cdot \omega_9$$

$$\omega_6 + \omega_4 = 2 \cdot \omega_9$$

$$\omega_9 = \frac{\omega_6 + \omega_4}{2} = 25 \,{}^{\text{рад}}\!/\!{}_{\text{с}}; \qquad \omega_3 = \omega_9 \cdot \frac{R_9}{R_3} = 5 \cdot \omega_9 = 125 \,{}^{\text{рад}}\!/\!{}_{\text{с}}$$

Дифференциальный механизм предназначен для суммирования вращений.