

РЕКОМЕНДУЕМАЯ УЧЕБНАЯ И СПРАВОЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник.- М.: Высшая школа, 1995.- 415 с.
2. Игнатищев Р.М. Курс теоретической механики. Введение, статика, кинематика, динамика. Учебное пособие / Р.М. Игнатищев, П.Н. Громыко, С.Н. Хатетовский. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 430 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.А. Курс теоретической механики: Учебник.- Ч.1.- М.: Высшая школа, 1977.- 368 с.
Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Учебник.- Ч.2.- М.: Высшая школа, 1977.- 432 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник.- М.: Высшая школа, 1990.- 607 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебн. пособие.- В 2-х томах.- С.-Петербург: Высшая школа, 1998.- 736 с.
6. Прикладная механика: Учеб. пособие / А.Т.Скойбеда, А.А.Миклашевич, Е.Н.Левковский и др.; Под общ. ред. А.Т.Скойбеда.-Мн.: Выш. шк., 1997.- 522 с. (Раздел «Теоретическая механика – с. 3-158).
7. Федута А.А. и др. Теоретическая механика и методы математики: Учебно-справочное пособие / А.А.Федута, А.В.Чигарев, Ю.В.Чигарев.- Мн.: УП «Технопринт», 2000.- 504 с.
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие.- М.: Наука, 1986.- 480 с.
9. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учебное пособие.- В 2-х томах.- М.: Наука, 1990.- Т.1 – 672 с.; Т.2 – 640 с.
10. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие /Под редакцией О.Э.Кепе.- М.: Высшая школа, 1989.- 358с.
11. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. А.А.Яблонского.- М.: Высшая школа, 1985.- 367 с.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика - дисциплина фундаментальная. С необходимостью применять содержащиеся в ней знания приходится постоянно сталкиваться не только на производствах, но и в быту; не только инженерам, но и гуманитариям. В частности, чтобы оценить прочность конструктивных элементов построек (коттеджей, гаражей и пр.) приходится определять силы, в том числе и динамической природы.

Кроме того, без знания теоретической механики невозможно качественно изучать сопротивление материалов, детали машин, теорию механизмов и машин, подъёмные и транспортные устройства, насосы и вентиляторы, ряд других учебных предметов.

При изучении курса «Теоретическая механика» преследуется цель:

помочь студенту освоить минимум содержащихся в теоретической механике знаний, чаще других востребуемых инженером в практической деятельности и который достаточен для того, чтобы специалист без труда был в состоянии расширить свои знания в области теоретической механики - чтобы умел самостоятельно разобраться с теми или иными конкретными примерами, в огромном количестве содержащимися в комплексе из нескольких сот накопившихся книг по теоретической механике.

Современная техника ставит перед инженерами множество задач, решение которых связано с исследованием так называемого механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называют происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Под **механическим взаимодействием** понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). За основную меру этих действий принимают величину, называемую **силой**.

Примерами механического движения в природе являются: движение небесных тел, колебания земной коры, воздушные и морские течения, тепловое движение молекул и т. п., а в технике - движение различных наземных или водных транспортных средств и летательных аппаратов, движение частей всевозможных машин,

механизмов и двигателей, деформация элементов тех или иных конструкций и сооружений, течение жидкостей и газов и многое другое.

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел и называется **механикой**.

Круг проблем, рассматриваемых в механике, очень велик и с развитием этой науки в ней появился целый ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых деформируемых тел, жидкостей и газов. К этим областям относятся теория упругости, теория пластичности, гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика и ряд разделов так называемой **прикладной механики**, в частности: сопротивление материалов, статика сооружений, теория механизмов и машин, гидравлика, а также многие специальные инженерные дисциплины.

Однако во всех этих областях наряду со специфическими для каждой из них закономерностями и методами исследования опираются на ряд основных законов или принципов и используют многие понятия и методы, общие для всех областей механики.

Рассмотрение этих общих, понятий, законов и методов и составляет предмет так называемой **теоретической (или общей) механики**.

В основе механики лежат законы, называемые законами классической механики (или законами Ньютона), которые установлены путём обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и нашли подтверждение в процессе всей общественно-производственной практики человечества.

Роль и значение теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Одновременно законы и методы механики как естественной науки, т. е. науки о природе, позволяют изучить и объяснить целый ряд важных явлений в окружающем нас мире и способствуют дальнейшему росту и развитию естествознания в целом.

История развития и становления теоретической механики - это отдельный предмет. Ограничимся лишь перечислением основных периодов развития механики:

1. Донаучный - заканчивается 4-м веком до н.э.; характеризуется живым созерцанием и накоплением материала,

который ещё не подвергается существенной абстрактно-теоретической обработке;

2. Элементарный период - заканчивается серединой 17-го столетия; характеризуется рассмотрением простых видов механического движения, слабыми методами исследования и наличием несовершенных теорий («слабыми» и «несовершенными» с позиций сегодняшнего дня);

3. Период формирования современных понятий и формулировок законов - заканчивается 30-ми годами 18-го столетия; характеризуется созданием мощных методов исследования (дифференциального и интегрального исчисления) и построением совершенных теорий;

4. Период триумфального шествия теорий механического движения и преувеличения их значимости в вопросах познания окружающего мира - 18-19 века. В этот исторический период открытия происходят одно за другим. Характерным в этом смысле является пример предсказания и обнаружения планеты Нептун. Научные успехи в вопросах механики приводят к широкому распространению в обществе ложной точки зрения, заключающейся в том, что все природные явления можно объяснить с позиций законов механического движения. Такая система взглядов, во многом оказавшая отрицательное влияние на развитие науки вообще, получила название «механицизм».

5. Период формирования теоретических основ различных прикладных вопросов механики - появляются теория механизмов и машин, теория уравнивания роторов, теория колебаний, теория устойчивости, теория гироскопов, ракетодинамика, механика сплошной среды, робототехника и другие. Заканчивается примерно 1970-м годом.

6. Современный период - характеризуется появлением мощного метода исследований с помощью компьютерной техники, позволившей существенно расширить классы решаемых практических задач.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

1.1 Предмет теоретической механики

Теоретическая механика состоит из трех основных частей: статики, кинематики и динамики.

В зависимости от них известны различные последовательности изложения курса - его могут начинать со статики, с кинематики и с динамики. Наиболее распространена последовательность «статика - кинематика - динамика». Она и принята в данном изложении. По тем причинам, что такой подход:

во-первых, позволяет постепенно продвигаться от простого знания к сложному;

в-вторых, изучение других учебных предметов прежде всего требует знания раздела «Статики»; в частности, без знания этого раздела невозможно изучить курс «Сопротивления материалов».

Статика изучает законы равновесия материальных тел и способы преобразования систем сил из сложных в более простые.

Кинематика изучает движение материальных тел с геометрической точки зрения, т.е. без учета сил вызывающих эти движения.

Динамика изучает движение материальных тел с учетом сил вызывающих эти движения.

Теоретическая механика – это наука о наиболее общих законах простейшей формы движения материи, ставящая своей главной задачей познание количественных закономерностей наблюдаемых в природе человеком механических движений.

Теоретическая механика – раздел физики, в котором изучается механическое движение материальных тел, т.е. изменение с течением времени положение их относительно друг друга.

Так как состояние покоя есть частный случай механического движения, то в задачи теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел, т.е. задачи статики.

Теоретическая механика является фундаментальной, общетехнической дисциплиной, служащей базой таких технических дисциплин как, сопротивление материалов, теория машин и механизмов, основы проектирования механизмов, теория упругости, гидравлика, аэродинамика и др.

Для изучения теоретической механики необходимо владеть элементарной и высшей математикой, основами физики, начертательной геометрией и черчением.

1.2. Основные понятия теоретической механики

Материальная точка - тело, размерами которого в условиях конкретной задачи можно пренебречь.

Механическая система - любая совокупность материальных точек.

Материальное тело - механическая система образованная непрерывной совокупностью материальных точек.

Твердое тело - материальное тело, расстояние между любыми точками которого остается неизменным.

Сила - векторная величина являющаяся мерой механического действия одного тела на другое. Сила (рис 1.1) определяется числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Единица измерения силы в системе СИ - один Ньютон (1Н).

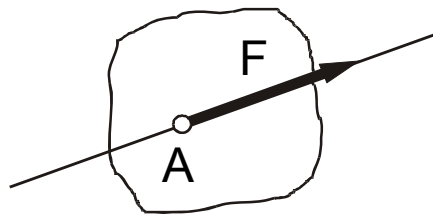


Рис. 1.1

Линия действия силы - прямая, по которой направлена сила.

Система сил - любая совокупность сил, действующих на механическую систему.

Эквивалентные системы сил - системы сил, под действием каждой из которых твердое тело будет находиться в одинаковом кинематическом состоянии.

Уравновешенная система сил - система сил, которая будучи приложена к телу, не меняет его кинематического состояния.

Силы, действующие на механическую систему, делятся на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на материальные точки (тела) рассматриваемой системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих рассматриваемой системе.

Внутренними называются силы взаимодействия между материальными точками (телами) рассматриваемой системы.

1.3. Проекция силы на ось

Проекция силы на ось (рис 1.2) есть алгебраическая величина равная произведению модуля вектора силы на косинус угла между этим вектором и положительным направлением оси.

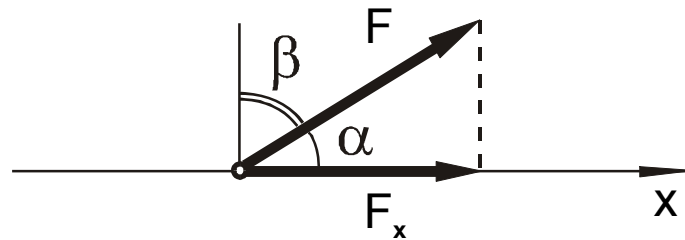


Рис. 1.2

$F_x = F \cos \alpha$ или $F_x = F \sin \beta$. Частные случаи (рис 1.3).

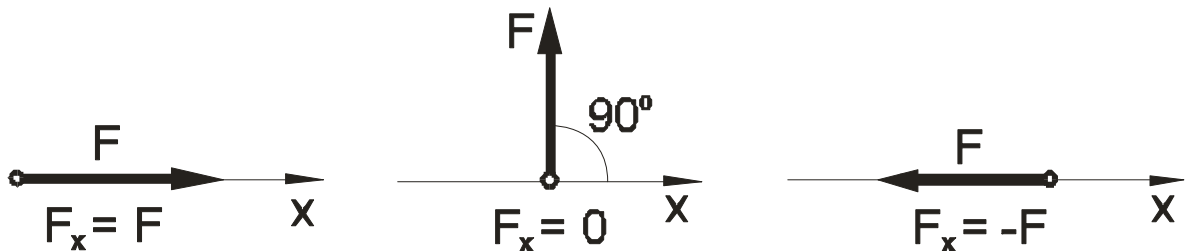


Рис. 1.3

На практике проекция силы вычисляется как произведение модуля силы на косинус острого угла между линией действия силы (рис 1.4) и осью. Знак проекции определяется по чертежу.

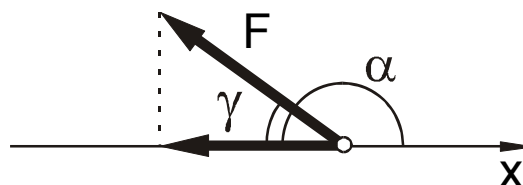


Рис. 1.4

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = -F \cdot \cos \gamma.$$

При определении проекции силы на ось можно использовать метод двойного проектирования (рис 1.5).

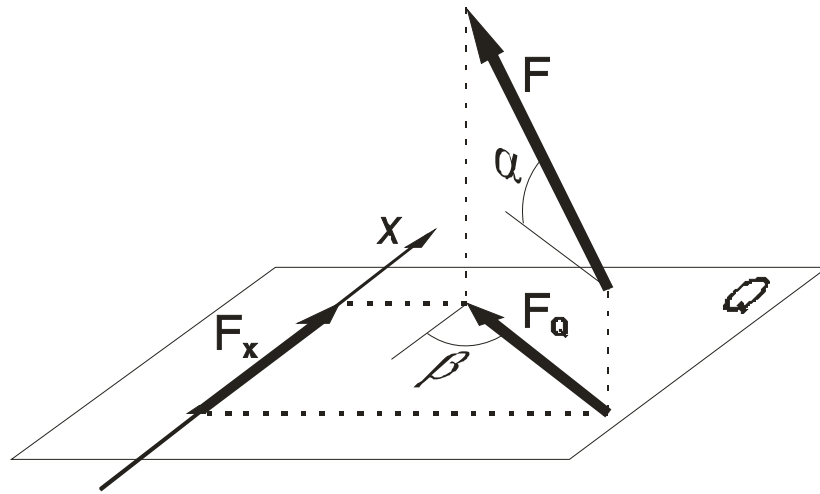


Рис. 1.5

$$F_x = F \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Проекция силы на оси прямоугольной системы координат (рис 1.6).

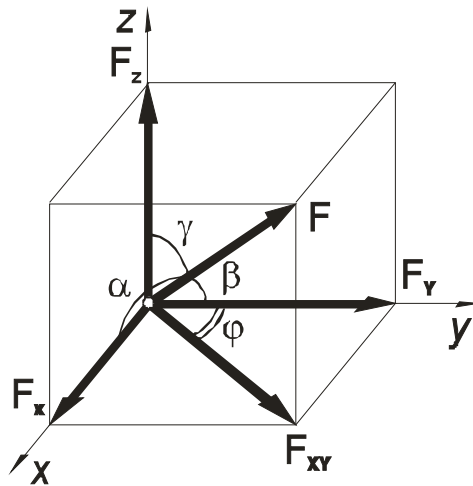


Рис. 1.6

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \cos \beta, \quad F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad F_x = F \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varphi, \quad F_y = F \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi, \quad F_z = F \cdot \cos \gamma.$$

Таким образом, сила F разложена по трем ортогональным составляющим.

1.4. Момент силы относительно точки и оси

Момент силы характеризует вращательное действие силы.

Момент силы относительно точки (центра) есть вектор (рис 1.7), численно равный произведению модуля силы на плечо, т.е. на кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, наблюдается происходящим против хода часовой стрелки.

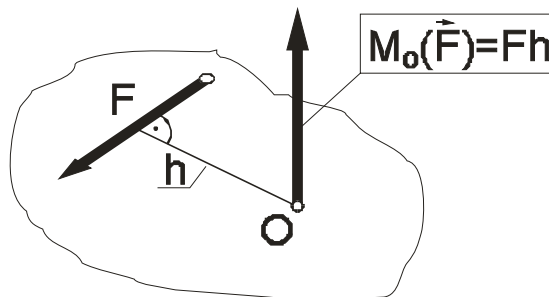


Рис. 1.7

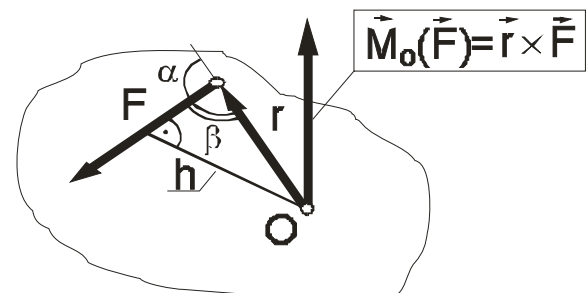


Рис. 1.8

Если из точки O в точку приложения силы провести радиус-вектор r , то вектор момента силы M_O относительно точки O можно рассматривать (рис 1.8) как векторное произведение радиус вектора r , проведенного из этой точки в точку приложения силы на вектор силы F .

В самом деле

$$M_O(F) = r F \sin \alpha = F r \sin(180^\circ - \alpha) = F r \sin \beta = F h,$$

где h - плечо силы.

Момент силы относительно точки равен нулю если $h=0$, т.е. линия действия силы проходит через точку.

Момент силы относительно оси (рис 1.9) равен произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент считается положительным, если, (см. рис 1.9) смотря навстречу оси, «вращение» плоскости, под действием спроектированной на неё силы, наблюдается происходящим против хода часовой стрелки, и в обратном направлении (по ходу) - отрицательным.

Момент силы относительно оси равен нулю, если F параллельна оси z или $h=0$, т.е. линия действия силы параллельна или пересекает ось.

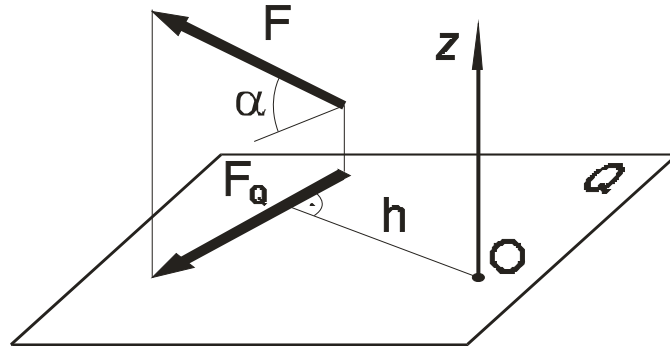


Рис. 1.9

$$M_z(F) = M_O(F_0) = (F \cos \alpha) h.$$

Момент силы относительно осей и начала отсчета прямоугольной системы координат (рис 1.10) можно определить зная координаты точки приложения силы (x, y, z) и проекции силы на оси (X, Y, Z) .

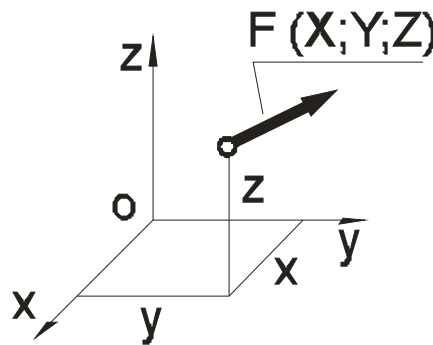


Рис. 1.10

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX,$$

$$M_o = M_x + M_y + M_z$$

Для лучшего запоминания данных формул используют способ перестановки индексов, пояснение которому дается на рис 1.11.

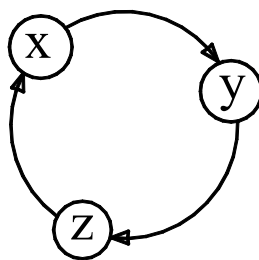


Рис. 1.11.

1.5. Пара сил

Две параллельные, равные по величине и направленные в противоположные стороны силы (рис 1.12), называют *парой сил*

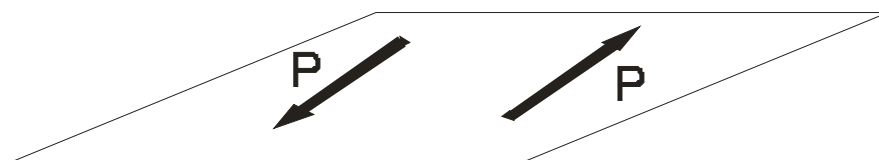


Рис. 1.12

Плоскость, в которой расположены силы, называется *плоскостью действия пары сил*.

Суммарная проекция пары сил на любую ось равна нулю, однако, силы пары не уравниваются. Пара сил стремится повернуть то тело, к которому она приложена.

Действие пары сил на тело характеризуется моментом.

Суммарный момент пары сил относительно любой точки плоскости её действия не зависит от положения этой точки на плоскости и равен произведению модуля одной из сил пары на плечо, т. е. кратчайшее расстояние между линиями действия сил (рис 1.13).

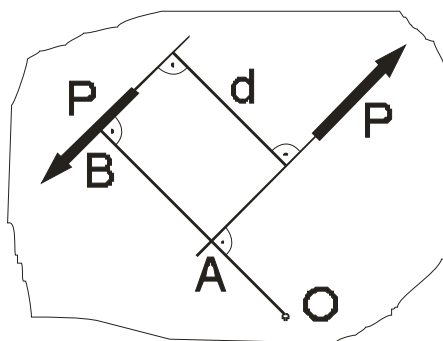


Рис. 1.13

$$M = P d,$$

$$M_O = P OB - P OA = P(OA + d) - P OA = P OA + P d - P OA = P d$$

Момент пары сил - величина векторная. Вектор пары сил перпендикулярен плоскости действия пары и направлен в ту сторону откуда "вращение" пары наблюдается происходящим против хода часовой стрелки (рис 1.14).

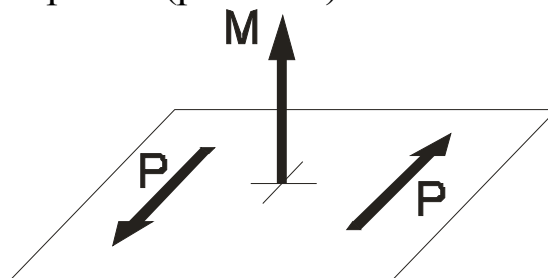


Рис. 1.14

Не изменяя действие пары сил на твердое тело, пару сил можно переносить в любую плоскость параллельную плоскости её действия, а также изменять её силы и плечо, сохраняя неизменным модуль и направление её момента.

Таким образом, вектор момента пары сил является свободным вектором. Линия действия вектора не определена и его можно переносить параллельно самому себе в любую точку пространства. При этом вектор момента определяет все три элемента пары сил, а именно, положение плоскости действия пары (вектор перпендикулярен плоскости действия пары сил), направление вращения пары (вектор направлен в сторону откуда вращение наблюдается происходящим против хода часовой стрелки) и модуль момента (длина вектора пропорциональна величине момента).

Пары сил, как векторные величины, можно складывать по правилу параллелограмма или построением многоугольника моментов пар сил (рис. 1.15).

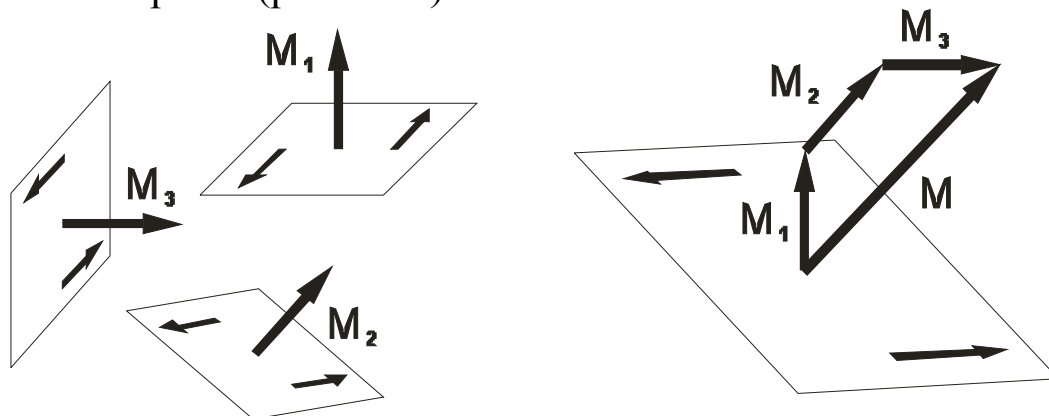


Рис. 1.15

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

При рассмотрении пар сил лежащих в одной плоскости указывают только направление в котором пара стремится повернуть тело. Момент пары считается положительным, если пара стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки и отрицательным если по ходу. Примеры изображения, в этом случае, пар сил на схемах, показаны на рис. 1.16.

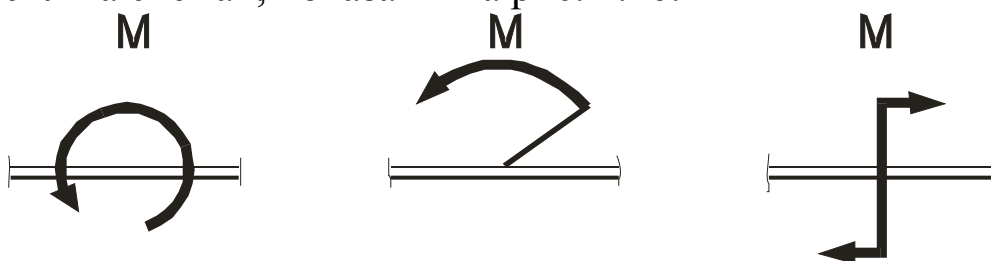


Рис. 1.16

2. ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ

2.1. Аксиомы статики

1. **Аксиома инерции.** Под действием уравновешенной системы сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

2. **Аксиома равновесия двух сил.** Если тело находится в равновесии под действием двух сил (рис. 2.1), то эти силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

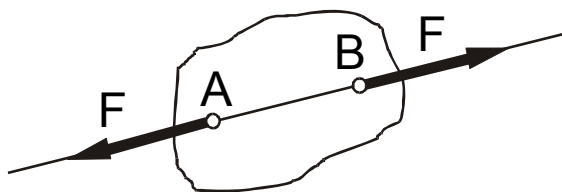


Рис. 2.1

3. **Аксиома присоединения или исключения уравновешенной системы сил.** Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему уравновешенных сил.

Следствие: не нарушая состояния тела, точку приложения силы можно переносить вдоль линии её действия.

4. **Аксиома параллелограмма сил.** равнодействующая двух пересекающихся сил (рис. 2.2) приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

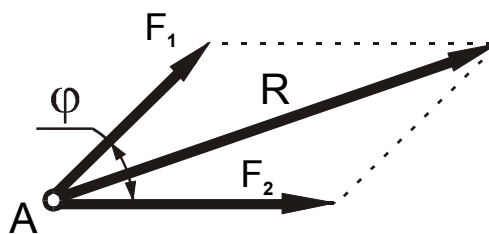


Рис. 2.2

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

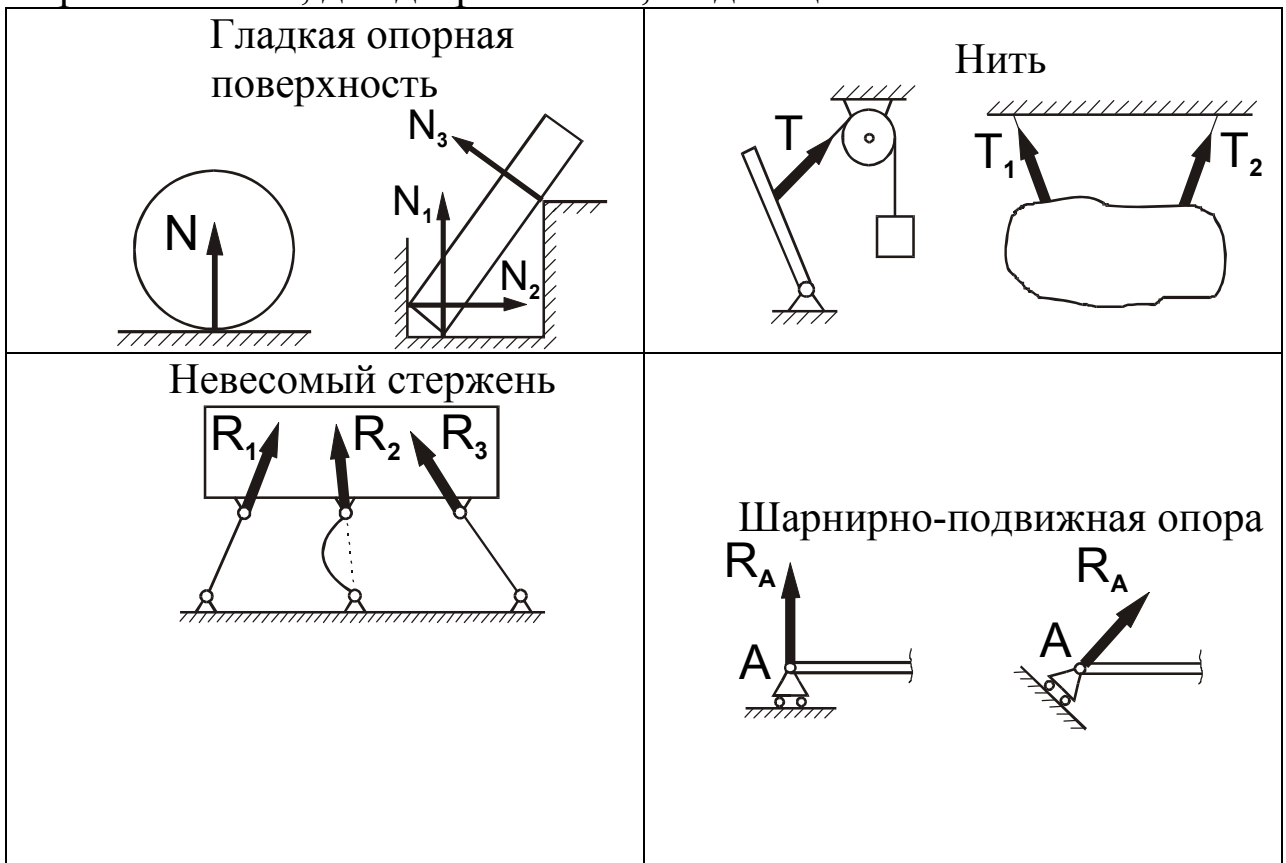
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi} \quad (1.1)$$

2.2. Связи и их реакции

По определению, тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространство, называется **свободным** (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещения которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела, называется **несвободным**.

Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют **связью**.

В дальнейшем будем рассматривать связи, реализуемые какими-нибудь телами, и называть связями сами эти тела. Примерами несвободных тел являются груз, лежащий на столе, дверь, подвешенная на петлях и т. п. Связями в этих случаях будут: для груза - плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери - петли, не дающие ей отойти от косяка.



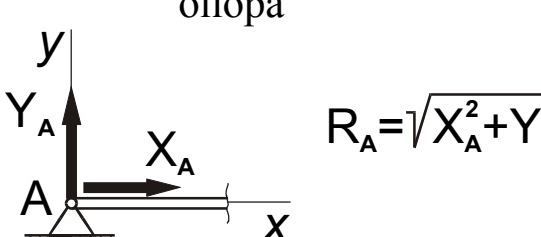
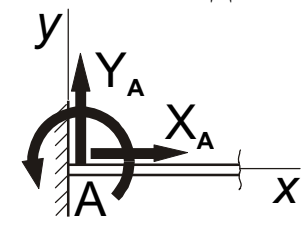
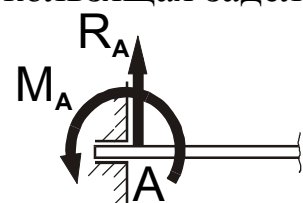
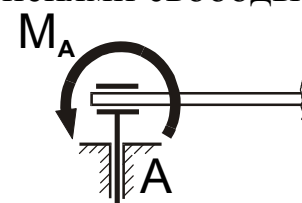
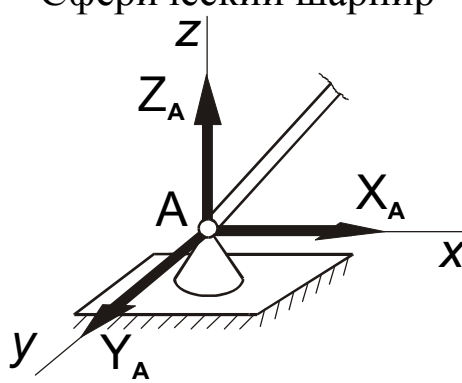
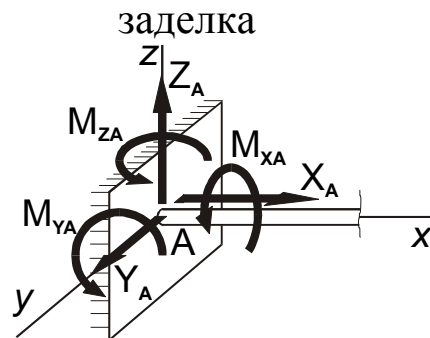
<p>Шарнирно-неподвижная опора</p>  $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$	<p>Жесткая заделка</p> 
<p>Скользящая заделка</p> 	<p>Скользящая заделка с двумя степенями свободы</p> 
<p>Сферический шарнир</p>  $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$	<p>Пространственная жесткая заделка</p>  $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$ $M_A = \sqrt{M_{XA}^2 + M_{YA}^2 + M_{ZA}^2}$

Рис. 2.3.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто **реакцией связи**.

Значение реакции связи зависит от других действующих сил и наперед неизвестно (если никакие другие силы на тело не действуют реакции равны нулю); для ее определения надо решить соответствующую задачу механики.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не даст перемещаться телу.

Когда связь может препятствовать перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции такой связи тоже наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи. Правильное определение направлений

реакций связей играет при решении задач механики очень важную роль.

Рассмотрим поэтому подробнее, как направлены реакции некоторых основных видов связей (рис. 2.3).

2.3. Принцип освобождаемости от связей

Одним из основных положений механики является принцип освобождаемости от связей, согласно которому всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное (рис. 2.4), если условно отбросив наложенные на него связи их действие заменить реакциями.

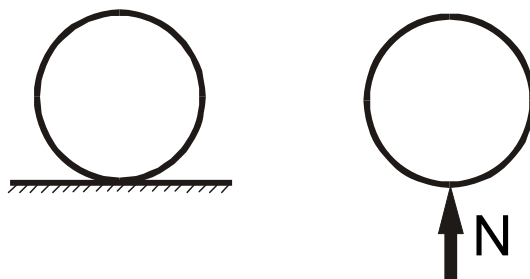


Рис. 2.4

3. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ СИЛ

3.1. Понятие о главном векторе. Основные способы его вычисления

Пусть $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n$ - произвольная система сил.

Величину \vec{R}_Γ , определяемую из условия: $\vec{R}_\Gamma = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v$ называют главным вектором рассматриваемой системы сил.

Геометрическое представление понятия «главный вектор» иллюстрировано на рис. 3.1, где AD, AB, BC и CD - направленные отрезки, в одном масштабе, изображающие главный вектор \vec{R}_Γ и его составляющие \vec{F}_1, \vec{F}_2 и \vec{F}_3 .

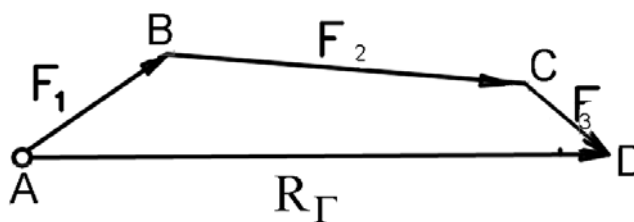


Рис. 3.1

Представленный на рис. 3.1 графический способ определения главного вектора на практике целесообразно применять лишь для плоских систем сил. По причинам же универсальности и компьютеризации общества основным способом определения главного вектора следует считать аналитический.

Опишем его на примере.

ПРИМЕР 3.1 - На вычисление (аналитическим способом) главного вектора

Дано: к вершинам куба приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$; точки их приложения и направления указаны на рис. 3.2, а модули равны: $F_1 = 50 \text{ Н}$; $F_2 = \sqrt{2} \cdot 100 \text{ Н}$; $F_3 = 100 \text{ Н}$; $F_4 = 200 \text{ Н}$.

Требуется: определить главный вектор заданной системы сил (модуль и направляющие косинусы).

Решение:

$$X_{\Gamma} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 - (\sqrt{2} \cdot 100) \cdot \sqrt{2} / 2 + 0 + 200 = 100 \text{ Н}$$

$$Y_{\Gamma} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0 + 0 + 100 + 0 = 100 \text{ Н}$$

$$Z_{\Gamma} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = -50 + (\sqrt{2} \cdot 100) \cdot \sqrt{2} / 2 + 0 + 0 = 50 \text{ Н}$$

Модуль главного вектора

$$R_{\Gamma} = \sqrt{X_{\Gamma}^2 + Y_{\Gamma}^2 + Z_{\Gamma}^2} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 50^2} = 150 \text{ Н}$$

Его направляющие косинусы

$$\text{Cos}\alpha = \text{Cos}\beta = \frac{100}{150} = 0,667; \text{Cos}\gamma = \frac{50}{150} = 0,333.$$

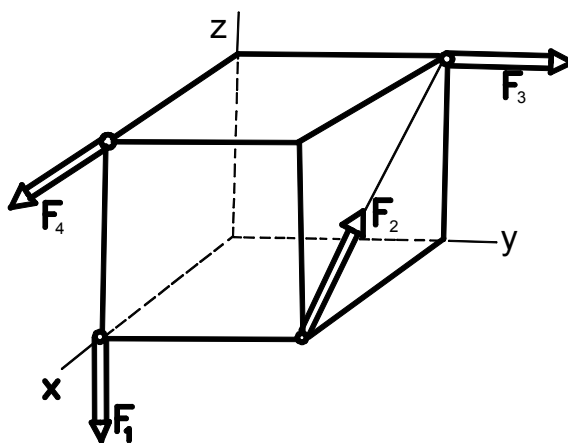


Рис. 3.2

Главный вектор \vec{R}_{Γ} его составляющие $\vec{X}_{\Gamma} = X_{\Gamma} \cdot \vec{i}$, $\vec{Y}_{\Gamma} = Y_{\Gamma} \cdot \vec{j}$, $\vec{Z}_{\Gamma} = Z_{\Gamma} \cdot \vec{k}$ направляющие углы α , β , γ изображены на рис. 3.3

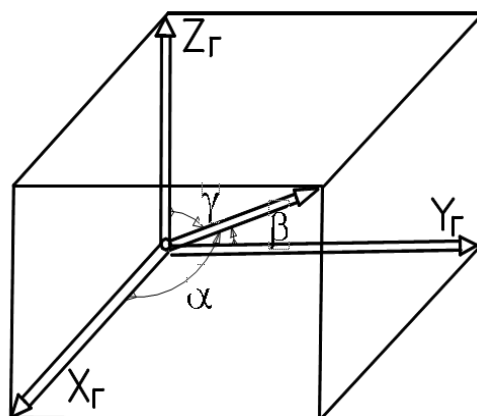


Рис. 3.3

3.2. Понятие о главном моменте. Аналитический способ его вычисления

С математической точки зрения рассматриваемое понятие тождественно изложенному в предыдущем подразделе (где рассматривалось понятие «главный вектор»).

Пусть имеем систему из n сил - $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n$ и пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_v, \dots, \vec{r}_n$ - радиус-векторы, определяющие положение точек приложения этих сил в произвольной правой системе координат.

Величину \vec{M}_{GO} , определяемую из выражения

$$\vec{M}_{GO} = \sum_{v=1}^n \vec{m}_{v0} = \sum_{v=1}^n (\vec{r}_v \times \vec{F}_v)$$

называют «главным моментом заданной системы сил относительно центра O».

Величины M_{GX}, M_{GY}, M_{GZ} , подчинённые условию

$$\vec{M}_{GO} = M_{GX} \cdot \vec{i} + M_{GY} \cdot \vec{j} + M_{GZ} \cdot \vec{k},$$

называют «главными моментами заданной системы сил относительно осей соответственно X, Y, Z».

$$M_{GX} = \sum_{v=1}^n m_{vx}, \quad M_{GY} = \sum_{v=1}^n m_{vy}, \quad M_{GZ} = \sum_{v=1}^n m_{vz}, \quad \text{где}$$

m_{vx}, m_{vy}, m_{vz} ($v = 1, 2, \dots, n$) - моменты сил заданной системы ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n$) относительно осей соответственно X, Y, Z.

ПРИМЕР 3.2 - На вычисление главного момента (аналитическим методом)

Дано: проекции сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ и координаты точек их приложения определяются из приводимой таблицы

X, н	Y, н	Z, н	x, м	y, м	z, м
0	100	60	1,0	0,0	0,0
100	80	0	0,8	-0,5	0,0
50	0	80	0,5	0,6	1,0
-40	0	0	0,4	0,0	-0,8

Требуется: определить главный момент заданной системы сил относительно начала координат (который обозначим точкой O).

Решение.

$$m_{1x} = y_1 \cdot Z_1 - z_1 \cdot Y_1 = 0 \cdot (-60) - 0 \cdot 100 = 0;$$

$$m_{2x} = y_2 \cdot Z_2 - z_2 \cdot Y_2 = (-0,5) \cdot 0 - 0 \cdot 80 = 0;$$

$$m_{3x} = y_3 \cdot Z_3 - z_3 \cdot Y_3 = 0,6 \cdot 80 - 1,0 \cdot 0 = 48;$$

$$m_{4x} = y_4 \cdot Z_4 - z_4 \cdot Y_4 = 0 \cdot 0 - (-0,8) \cdot 0 = 0.$$

$$\sum_{\nu=1}^4 m_{\nu X} = 48 \text{ Нм.}$$

Аналогично

$$m_{1y} = z_1 \cdot X_1 - x_1 \cdot Z_1 = 0 \cdot 0 - 1,0 \cdot (-60) = 60;$$

$$m_{2y} = z_2 \cdot X_2 - x_2 \cdot Z_2 = 0 \cdot 100 - 0,8 \cdot 0 = 0;$$

$$m_{3y} = z_3 \cdot X_3 - x_3 \cdot Z_3 = 1,0 \cdot 50 - 0,5 \cdot 80 = 10;$$

$$m_{4y} = z_4 \cdot X_4 - x_4 \cdot Z_4 = (-0,8) \cdot (-40) - 0,4 \cdot 0 = 32.$$

$$\sum_{\nu=1}^4 m_{\nu y} = 102 \text{ Нм.}$$

$$m_{1z} = x_1 \cdot Y_1 - y_1 \cdot X_1 = 1,0 \cdot 100 - 0 \cdot 0 = 100;$$

$$m_{2z} = x_2 \cdot Y_2 - y_2 \cdot X_2 = 0,8 \cdot 80 - (-0,5) \cdot 100 = 114;$$

$$m_{3z} = x_3 \cdot Y_3 - y_3 \cdot X_3 = 0,5 \cdot 0 - 0,6 \cdot 50 = -30;$$

$$m_{4z} = x_4 \cdot Y_4 - y_4 \cdot X_4 = 0,4 \cdot 0 - 0 \cdot (-40) = 0.$$

$$\sum_{\nu=1}^4 m_{\nu z} = 184 \text{ Нм.}$$

Итак, главный момент заданной системы сил:

$$\vec{M}_{ГО} = 48 \cdot \vec{i} + 102 \cdot \vec{j} + 184 \cdot \vec{k}.$$

Его модуль:

$$M_{ГО} = \sqrt{48^2 + 102^2 + 184^2} = 216 \text{ Нм.}$$

Направляющие косинусы главного момента:

$$\text{Cos}\alpha = \frac{48}{216} = 0,222; \quad \text{Cos}\beta = \frac{102}{216} = 0,473; \quad \text{Cos}\gamma = \frac{184}{216} = 0,852.$$

3.3. Зависимость между главными моментами относительно различных центров приведения

Эта зависимость определяется правилами векторной алгебры. На рис. 3.4: O – некий базовый центр (например - начало системы $Oxyz$); A – произвольно взятый другой (новый) центр.

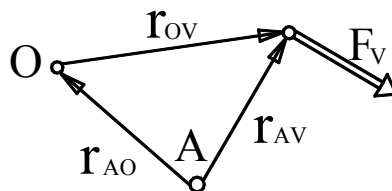


Рис. 3.4

В соответствии с правилами векторной алгебры и ранее принятыми понятиями для произвольной системы сил \vec{F}_v ($v = 1, 2, \dots, n$) получаем:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{GA} &= \sum \vec{m}_{vA} = \sum (\vec{r}_{Av} \times \vec{F}_v) = \sum [(\vec{r}_{AO} + \vec{r}_{Ov}) \times \vec{F}_v] = \\ &= (\vec{r}_{AO} \times \sum \vec{F}_v) + \sum (\vec{r}_{Ov} \times \vec{F}_v) = \vec{r}_{AO} \times \vec{R}_G + \sum \vec{m}_{vO} = \vec{r}_{AO} \times \vec{R}_G + \vec{M}_{GO}.\end{aligned}$$

Итак:

$$\vec{M}_{GA} = \vec{M}_{GO} + \vec{r}_{AO} \times \vec{R}_G \quad -$$

Главный момент произвольной системы сил относительно любого центра A больше главного момента этой же системы относительно ранее взятого центра O на величину, равную векторному произведению радиус-вектора, проведенного из нового центра в старый, на главный вектор.

Следствие: у системы сил с нулевым главным вектором главный момент не зависит от положения центра (относительно которого он вычисляется).

3.4. Инварианты системы сил

Инвариантом системы сил относительно изменения её центра приведения называют величину (векторную или скалярную), не изменяющуюся при переходе от одного центра приведения к другому, т.е. величину, имеющую одно и тоже значение в любом центре приведения.

Первый инвариант. Главный вектор системы сил не зависит от центра приведения.

Второй инвариант.

Умножим скалярно обе части последнего равенства на \vec{R}_G :
 $\vec{M}_{GA} \cdot \vec{R}_G = \vec{M}_{GO} \cdot \vec{R}_G + (\vec{AO} \times \vec{R}_G) \cdot \vec{R}_G$.

Так как вектор $(\vec{AO} \times \vec{R}_G)$ перпендикулярен вектору \vec{R}_G , то их скалярное произведение равно нулю. Следовательно

$$\vec{M}_{GA} \cdot \vec{R}_G = \vec{M}_{GO} \cdot \vec{R}_G,$$

т.е. скалярное произведение главного момента на главный вектор не зависит от центра приведения. При этом

$$\vec{M}_{GO} \cdot \vec{R}_G = M_{GO} R_G \cos(\widehat{\vec{M}_{GO}; \vec{R}_G}) = M_{Gx} R_{Gx} + M_{Gy} R_{Gy} + M_{Gz} R_{Gz}.$$

Таким образом, при перемене центра приведения не изменяется главный вектор и скалярное произведение главного момента на главный вектор численно равно проекции главного момента на направление главного вектора. Указанные величины называют **векторным и скалярным инвариантами системы сил**.

3.5. Приведение произвольной системы сил к заданному центру

Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку тела, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы, относительно новой точки её приложения (Рис. 3.5). Данный метод носит название метода Пуансо.

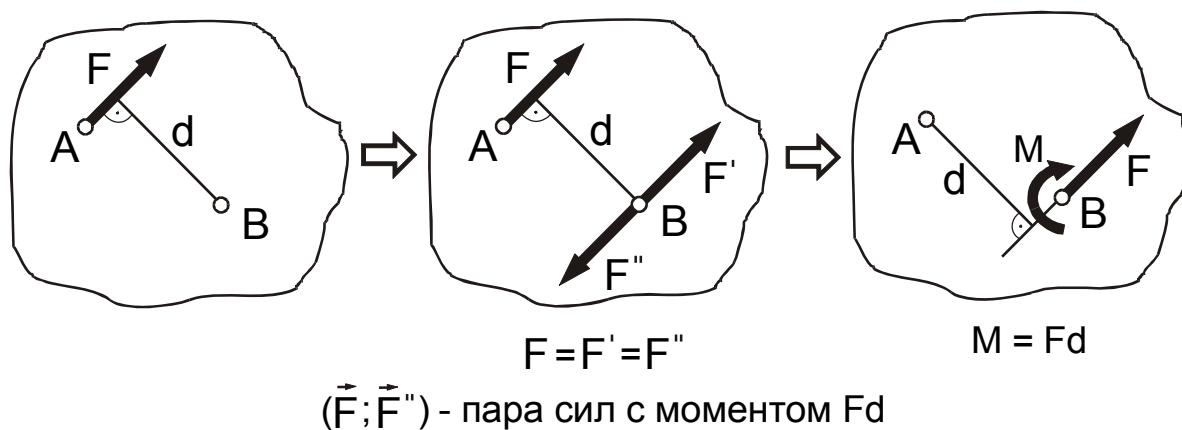


Рис. 3.5

Процесс замены силы, такой же силой приложенной в другой точке и моментом, называется приведением силы к заданному центру.

Пусть дана произвольная система сил (F_1, F_2, \dots, F_n) . Приведем (см. предыдущий подраздел) каждую силу к некоторому центру. Получим:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow \{ \vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n; (\vec{F}_1; \vec{F}'_1), (\vec{F}_2; \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n; \vec{F}'_n) \}.$$

Таким образом, система из n сил, заменена системой из $3n$ сил, т. е. в центре приведения к телу приложена система n сходящихся сил

$$\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n,$$

и на тело действует n пар сил

$$(\vec{F}_1; \vec{F}'_1), (\vec{F}_2; \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n; \vec{F}'_n).$$

Систему сходящихся сил можно заменить одной силой которая будет являться **главным вектором** заданной системы сил, т. е.

$$\vec{R}_r = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i.$$

Систему присоединенных пар сил можно заменить одной парой, векторный момент которой будет являться **главным моментом** заданной системы сил относительно центра приведения

$$\vec{M}_{r0} = \vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_0(\vec{F}_n) = \sum \vec{M}_{0i}(\vec{F}_i).$$

Таким образом, **любую произвольную систему** сил можно в общем случае привести к силе, равной ее главному вектору и приложенной в центре приведения, и паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.

3.6. Аксиома о равновесии

Понятие «равновесие свободного тела» (кратко: «равновесие тела») в полном своём объёме требует знаний кинематики, но в инженерной практике чаще предстаёт в форме покоя тела.

Поэтому, при изучении статики можно считать, что «равновесие тела» - это его покой.

Аксиома о равновесии: если главные вектор и момент всех приложенных к телу сил равны нулю, то такое тело находится в равновесии. Справедливо и обратное утверждение – если тело находится в равновесии, то главные вектор и момент всех действующих на него сил равны нулю.

Уравновешенная система сил - это система сил с нулевыми главными вектором и моментом.

3.7. Основные разновидности систем сил

сходящаяся система сил (линии действия всех сил пересекаются в одной точке);

произвольная плоская система сил, плоская параллельная система сил (система сил линии действия которых лежат в одной плоскости).

произвольная пространственная; пространственная параллельная (в ней могут быть как сонаправленные, так и противоположно направленные силы).

4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

4.1. Геометрический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил

Система сил линии действия которых пересекаются в одной точке называется **сходящейся**.

Пусть задана система сходящихся сил (рис. 4.1) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Перенесем точки приложения всех сил по линиям их действия в точку пересечения этих линий. В результате, получаем систему сил, приложенных в одной точке (рис. 4.2), эквивалентную исходной.

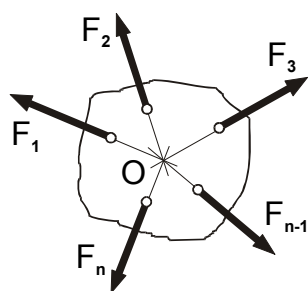


Рис. 4.1

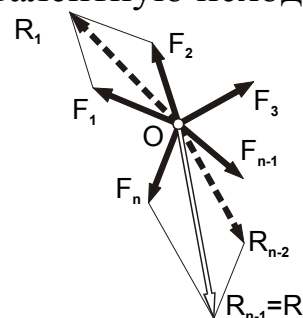


Рис. 4.2

Складываем силы (см. рис. 4.2) по правилу параллелограмма:

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \\ \vec{R}_2 &= \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \\ \vec{R}_{n-1} &= \vec{R}_{n-2} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Равнодействующая сходящейся системы сил равна векторной сумме всех сил системы и проходит через точку пересечения их линий действия.

Таким образом, систему сходящихся сил можно заменить одной силой которая будет являться главным вектором заданной системы сил.

Равнодействующая системы сходящихся сил может быть определена также построением многоугольника сил (рис. 4.3).

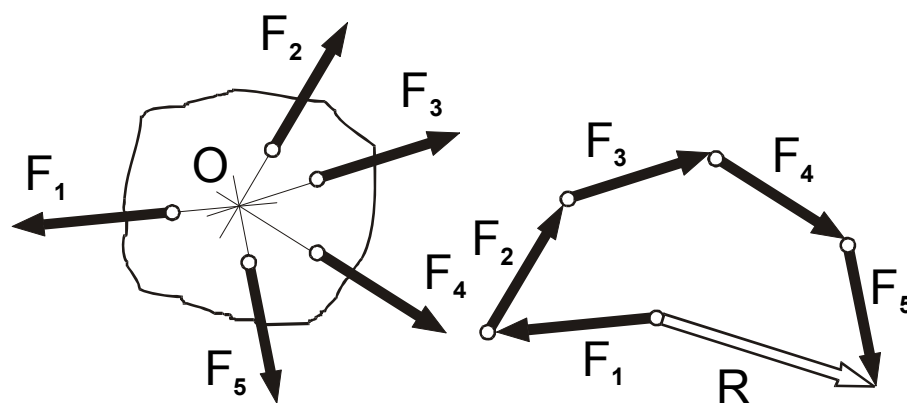


Рис. 4.3

Многоугольник, изображенный на рис.4.3, называется **СИЛОВЫМ**.

4.2. Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил

Итак, равнодействующая системы сходящихся сил равна геометрической сумме этих сил, т.е.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n. \quad (4.2)$$

На основании законов векторной алгебры имеем: проекция равнодействующего вектора на ось равна сумме проекций на эту ось всех векторов его составляющих, значит:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}, \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Формулам (4.3) можно придать следующий вид:

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}, \quad R_z = \sum F_{iz} \quad (4.4)$$

Таким образом, проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраической сумме проекций всех сил системы на соответствующие оси.

Вычислив проекции равнодействующей, можно определить:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}, \quad (4.5)$$

где α , β и γ – углы, образуемые равнодействующей соответственно с осями x , y и z .

Так как, любая система сходящихся сил может быть заменена одной равнодействующей силой, то для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая системы сил равнялась нулю:

$$\vec{R} = 0 \quad (4.6)$$

Силовой многоугольник уравновешенной системы сходящихся сил должен быть замкнут.

Векторное равенство (4.6) эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0. \quad (4.7)$$

Принимая во внимание равенство (4.4), получаем аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0 \quad (4.8)$$

т.е. для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на три координатные оси была равна нулю.

Для сходящейся системы сил, расположенных в одной плоскости, получаем два уравнения равновесия

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (4.9)$$

ПРИМЕР 4.1. Фонарь (рис. 4.4) весом P подвешен на двух проволоках, образующих с вертикальными стенами углы α и β . Найти натяжения этих проволок.

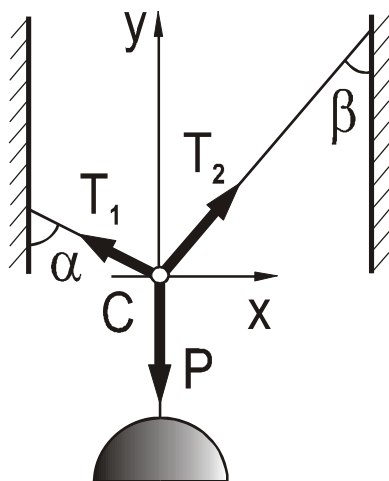


Рис.4.4

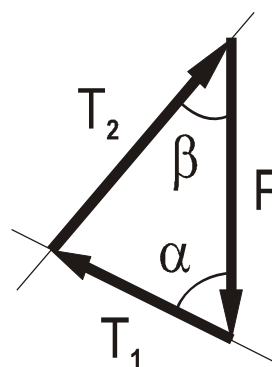


Рис.4.5

РЕШЕНИЕ. Применяя принцип освобождаемости от связей, рассмотрим равновесие узла С (см. рис. 4.4).

1. Графический способ решения. Строим замкнутый многоугольник сил, действующих на узел С (рис. 4.5).

Зная углы α и β , а также величину силы P , определяем:

$$\frac{T_1}{\sin\beta} = \frac{P}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}; \quad \frac{T_1}{\sin\beta} = \frac{P}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad T_1 = \frac{P \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}; \quad \frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad T_2 = \frac{P \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (4.10)$$

2. Аналитический способ решения. Составляем уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил (см. рис.4.4), действующих на узел С.

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 & \quad -T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = 0, \\ \sum F_{iy} = 0 & \quad T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta - P = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.11) определяем

$$T_1 = \frac{T_2 \sin\beta}{\sin\alpha}. \quad (4.12)$$

Подставляем (4.12) в (4.11)

$$\frac{T_2 \sin\beta}{\sin\alpha} \cos\alpha + T_2 \cos\beta - P = 0. \quad (4.13)$$

Откуда

$$T_2 = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha} = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (4.14)$$

Зная T_2 , находим T_1 :

$$T_1 = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (4.15)$$

4.3 Теорема о равновесии трех непараллельных сил

Если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил (рис. 4.6, а), то эти силы лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются в одной точке.

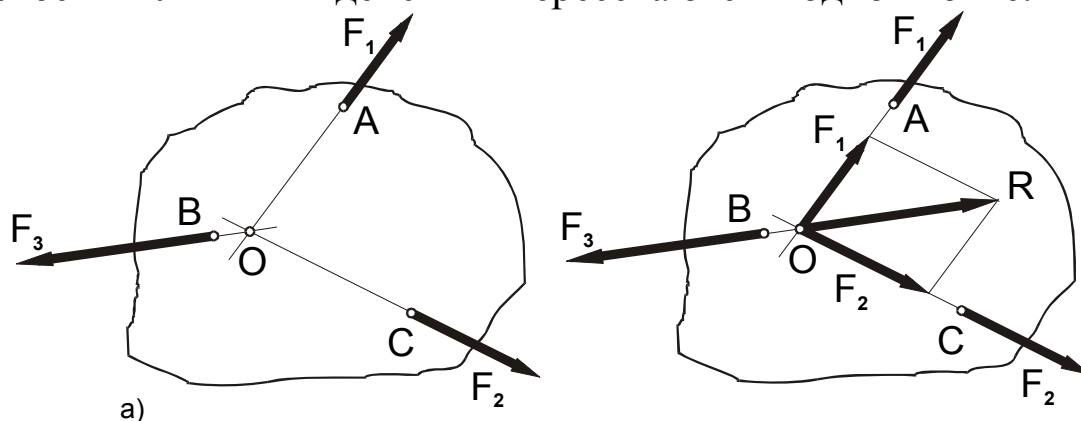


Рис. 4.6

ПРИМЕР 4.2. Определить реакции опор угольника (рис. 4.7), находящегося в равновесии под действием силы $P=1000$ Н, если $a=3$ м, $b=4$ м.

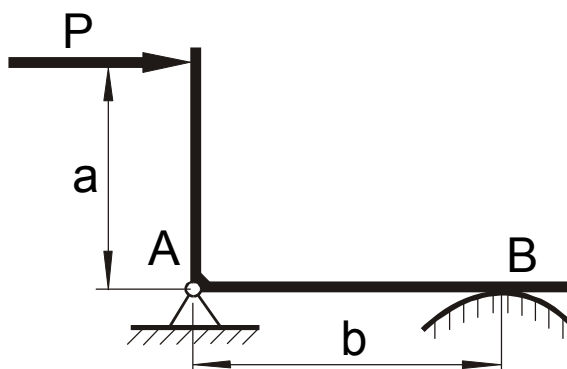


Рис. 4.7

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим равновесие угольника. Применяя принцип освобождения от связей (рис. 4.8), покажем действующие на него активную силу \vec{P} и реакцию опорной поверхности В (\vec{R}_B).

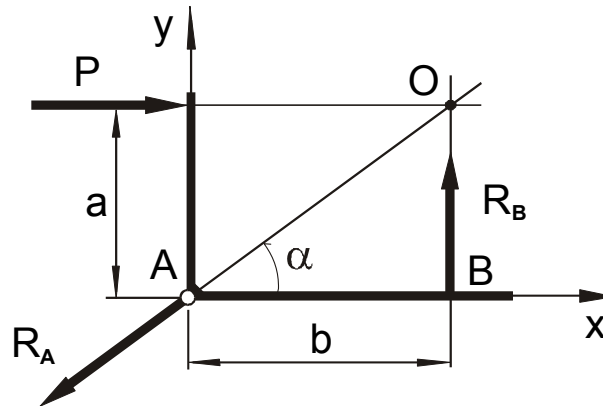


Рис. 4.8

На основании теоремы о трех силах, силу действующую в шарнире А, направляем по линии проходящей через точку пересечения линий действия двух первых сил.

Для полученной плоской системы сходящихся сил составляем два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 & P - R_A \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_{iy} &= 0 & R_B - R_A \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8, \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6. \quad (4.17)$$

Из (4.16)

$$R_A = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{1000}{0,8} = 1250 \text{ Н.} \quad R_A = 1250 \text{ Н.} \quad (4.18)$$

Из (4.16), с учетом значения R_A :

$$R_B = R_A \sin \alpha = 1250 \cdot 0,6 = 750 \text{ Н.} \quad R_B = 750 \text{ Н.} \quad (4.19)$$

4.4 Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона)

Пусть задана система сходящихся сил (F_1, F_2, \dots, F_n) (рис. 4.9). Точка O - произвольная точка пространства, r - радиус-вектор проведенный из точки O в точку пересечения линий действия рассматриваемой системы сил.

Суммарный момент сил относительно точки O :

$$\Sigma \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n).$$

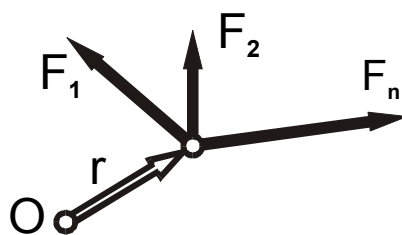


Рис. 4.9

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \Sigma \vec{F}_i = \vec{R}, \quad \Sigma \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O(\vec{R}).$$

Таким образом, момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно какой либо точки равен сумме моментов сил её составляющих.

Теорема о моменте равнодействующей справедлива не только для системы сходящихся сил, но и для всякой системы сил имеющей равнодействующую.

5. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

5.1. Частные случаи приведения плоской системы сил

Плоской системой сил называется система сил линии действия которых лежат в одной плоскости.

В результате приведения плоской системы сил к заданному центру могут встретиться следующие случаи:

1. $R_{\Gamma} \neq 0, M_{\Gamma O} \neq 0$. Система сил может быть приведена к одной силе (равнодействующей).

Докажем первое утверждение. Пусть к телу приложена некоторая плоская система сил (рис. 5.1). Приводя эту систему сил к произвольно выбранному центру O , получаем одну силу

$$\vec{R}_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

приложенную в точке O , и одну пару сил с моментом

$$\vec{M}_{\Gamma O} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(F_i), \vec{M}_{\Gamma O} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(F_i),$$

Равнодействующая плоской системы сил равна по модулю и направлению главному вектору этой системы, но её линия действия должна отстоять от первоначального центра приведения на расстояние $d = M_{\Gamma O} / R_{\Gamma}$, отложенным в ту сторону, чтобы момент равнодействующей, относительно первоначального центра, совпадал по направлению с главным моментом.

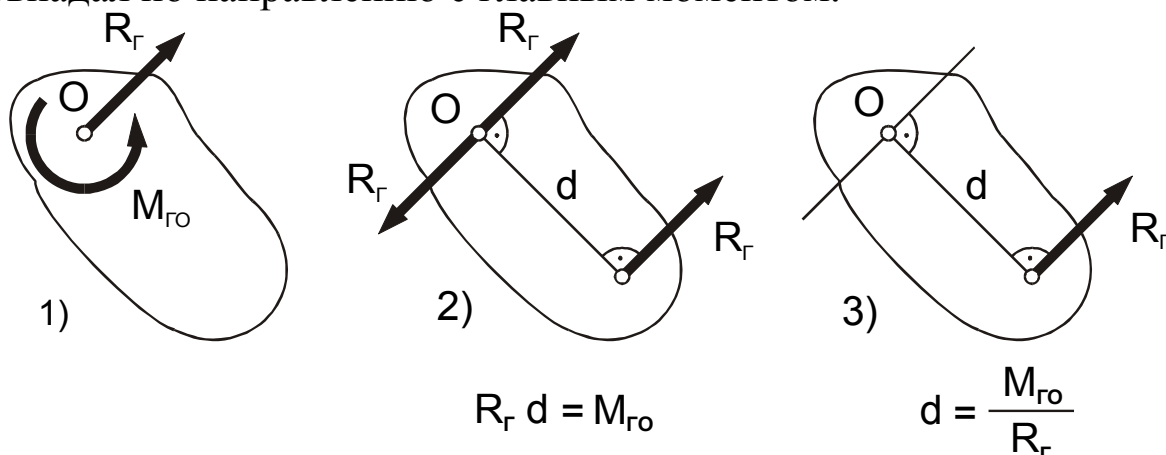


Рис. 5.1

2. $R_{\Gamma} \neq 0, M_{\Gamma O} = 0$. Система сил приводится к одной силе (равнодействующей), проходящей через данный центр приведения.

3. $R_{\Gamma} = 0, M_{\Gamma O} \neq 0$. Система сил эквивалентна одной паре сил.

4. $R_{\Gamma}=0$, $M_{\Gamma O}=0$. Система сил эквивалентна нулю, т.е. силы уравновешены.

5.2. Условия равновесия плоской системы сил

Для равновесия плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы сил относительно любой точки плоскости, равнялись нулю, т.е.

$$\vec{R}_{\Gamma}=0, \vec{M}_{\Gamma O}=0.$$

Учитывая, что

$$R_{\Gamma} = \sqrt{R_{\Gamma x}^2 + R_{\Gamma y}^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}, \quad M_{\Gamma O} = \sum M_O(\vec{F}_i).$$

получаем аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum M_{iO} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Возможны также другие формы уравнений равновесия, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum M_B(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum M_B(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum M_C(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

При этом должны выполняться условия:

для первого случая $AB \not\parallel Ox$,

для второго случая $ABC \rightarrow \Delta$.


Для плоской системы параллельных сил (рис. 5.2), аналитические условия равновесия выразятся в виде двух уравнений в двух формах, т.е.:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma F_{ix} = 0 \\ \Sigma M_o(\vec{F}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

или

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \Sigma M_B(\vec{F}_i) = 0 \end{array} \right\}$$

При этом должны выполняться условия:

для второго случая должно выполняться условие АВ  ОХ.

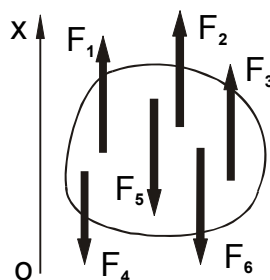


Рис. 5.2

5.3. Сосредоточенные и распределенные силы

Силы приложенные к твердому телу в какой либо точке называются сосредоточенными. Однако, реально, существуют лишь системы распределенных сил, приложенных к телу по объему или к его поверхности, а иногда к некоторой линии (для протяженных тел, поперечными размерами которых можно пренебречь). Распределенные силы характеризуются величиной интенсивности, т.е. величиной силы приходящейся на единицу объема, единицу площади или длины тела.

В основном действуют параллельные системы распределенных сил. Например: силы тяжести, силы давления ветра на стену здания, воды на плотину, сыпучего груза на площадку и т.п.

Для сил распределенных по отрезку прямой (рис. 5.3) , интенсивность (q) - это частное от деления равнодействующей dQ системы сил приложенных к бесконечно малому участку линии, на длину dx этого участка, т.е.

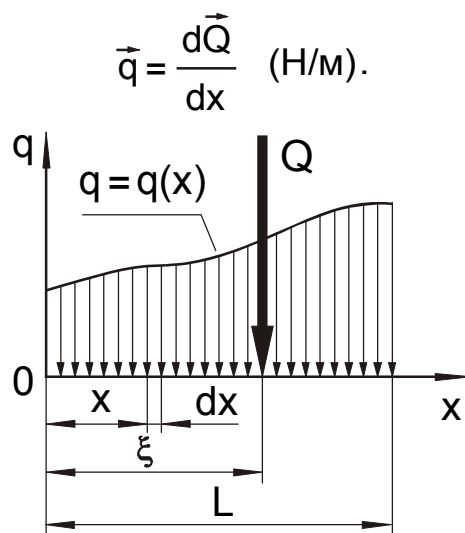


Рис. 5.3

При известном законе изменения $q=q(x)$ (см. рис. 5.3) равнодействующая распределенной нагрузки определится по формуле

$$\vec{Q} = \int_{x=0}^{x=L} \vec{q}(x) dx.$$

В соответствии с теоремой о моменте равнодействующей, выражение для определения точки приложения силы Q будет иметь вид:

$$Q \xi = \int_{x=0}^{x=L} q(x) x dx \quad \xi = \frac{1}{Q} \int_{x=0}^{x=L} q(x) x dx.$$

Для нагрузки изменяющейся по линейному закону (рис. 5.4) и (рис.5.5) формулы для определения Q и ξ будут иметь вид:

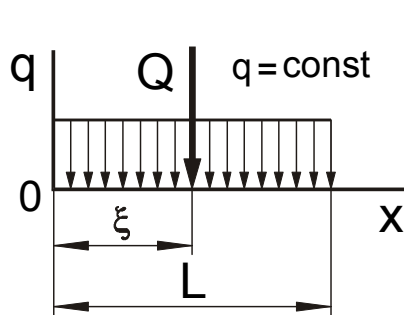


Рис. 5.4.

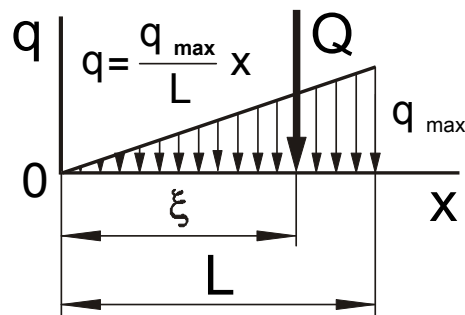


Рис. 5.5

$$Q = qL$$

$$\xi = \frac{1}{2}L$$

$$Q = \frac{1}{2}q_{\max}L$$

$$\xi = \frac{2}{3}L$$

Пример 5.1: Дано: $q = 10$, $M = 5$ кН/м, $P = 2$ кН. Найти реакции опор А и В (рис.5.6).

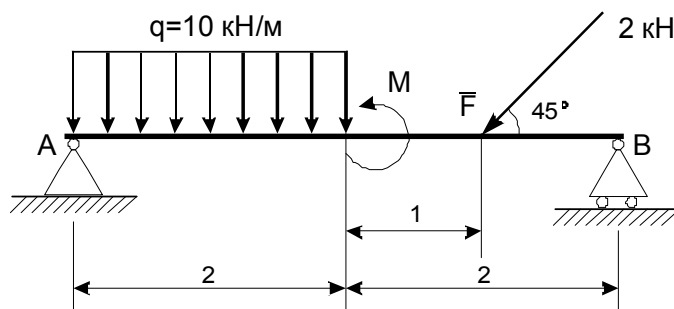


Рис. 5.6

Применим принцип освобождения от связей (рис. 5.7)

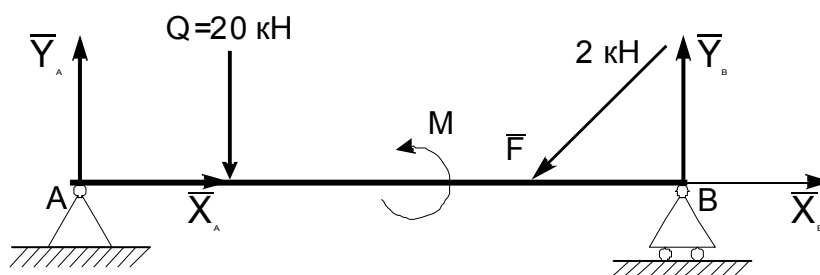


Рис. 5.7

$$\sum F_{yi} = 0 \quad R_{Ay} - Q - P \cdot \sin 45^\circ + R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -Q \cdot 1 + M - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0$$

$$R_B = \frac{Q - M + P \cdot \sin 45^\circ \cdot 3}{4} = 4.8 \text{ (кН)}$$

Подставляем R_B во второе уравнение ($\sum F_{yi} = 0$) и находим

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$$

6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

6.1. Понятие динамического винта

Совокупность трех сил (рис. 6.1) две из которых образуют пару, а третья перпендикулярна плоскости действия пары называется динамическим винтом (динамой).

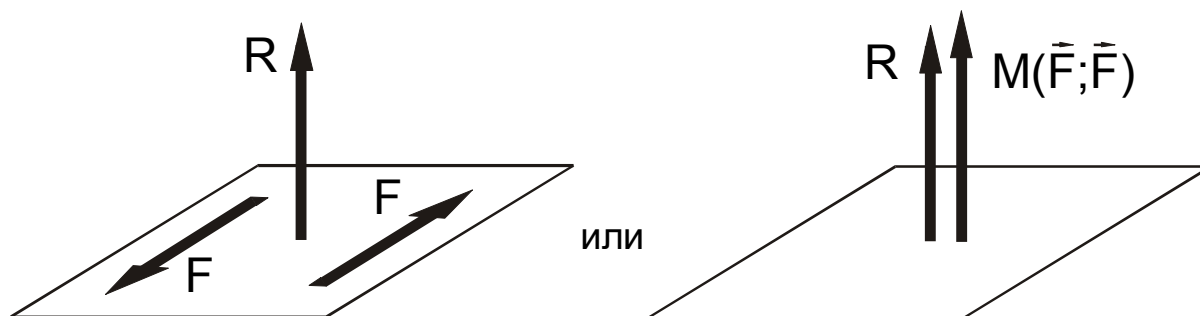


Рис.6.1

На рисунке: R - сила динамического винта, M - момент пары сил ($F; F$) или момент динамического винта. Прямая действия силы R - ось динамического винта.

6.2. Частные случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду

Вначале докажем **теорему**: если скалярный инвариант системы сил не равен нулю, то система сил приводится к динамическому винту.

Вспомним, что скалярный инвариант – это скалярное произведение главного момента на главный вектор численно равно проекции главного момента на направление главного вектора, т.е. $\vec{M}_{ГО} \cdot \vec{R}_Г$.

Доказательство. Пусть в произвольной точке O система приведена к силе, равной главному вектору $R_Г$ и паре сил с моментом равным главному моменту $M_{ГО}$. Так как $\vec{M}_{ГО} \cdot \vec{R}_Г \neq 0$, то оба вектора, $M_{ГО}$ и $R_Г$, не равны нулю и не перпендикулярны между собой (рис 6.2, а). В результате преобразований, проиллюстрированных на рис. 6.2, б, в, г, д, е, получаем то, что и требовалось доказать. То есть, заданная система сил приводится

в точке А к силе R_{Γ} и паре сил с моментом $M_{\Gamma O}$ расположенной в плоскости перпендикулярной силе R_{Γ} , т.е. к динамическому винту.

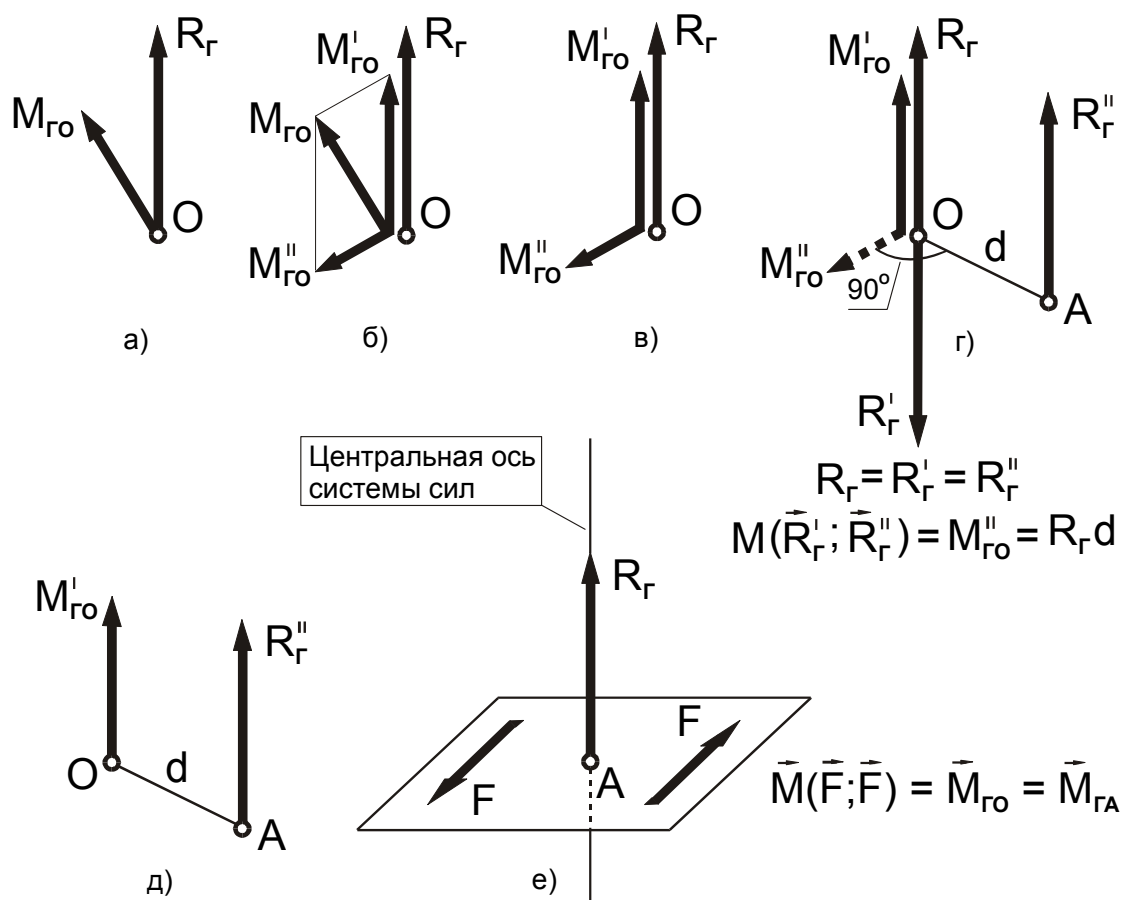


Рис. 6.2

Все возможные варианты приведения пространственной системы сил к простейшему виду представлены в таблице:

1	$\vec{M}_{\Gamma O} \cdot \vec{R}_{\Gamma} \neq 0$	$\vec{R}_{\Gamma} \neq 0$	$\vec{M}_{\Gamma O} \neq 0$	Динамический винт
2	$\vec{M}_{\Gamma O} \cdot \vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{R}_{\Gamma} \neq 0$	$\vec{M}_{\Gamma O} \neq 0$	Равнодействующая
3	$\vec{M}_{\Gamma O} \cdot \vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{M}_{\Gamma O} = 0$	Равнодействующая
4	$\vec{M}_{\Gamma O} \cdot \vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{M}_{\Gamma O} \neq 0$	Пара сил
5	$\vec{M}_{\Gamma O} \cdot \vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{R}_{\Gamma} = 0$	$\vec{M}_{\Gamma O} = 0$	Система сил эквивалентна нулю

6.3. Равновесие произвольной пространственной системы сил, случай параллельных сил

Необходимые и достаточные условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $R_{\Gamma}=0$, $M_{\Gamma O}=0$. Но векторы

$R_{\Gamma}=0, M_{\Gamma O}=0$ только тогда, когда $\bar{R}_x = \bar{R}_y = \bar{R}_z = 0$ и $M_x = M_y = M_z = 0$, т. е. действующие силы будут удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \sum m_y(\bar{F}_k) = 0, \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

Равенства выражают одновременно условия равновесия твердого тела, находящегося под действием любой пространственной системы сил.

Случай параллельных сил (Рис. 6.3). В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, можно выбрать координатные оси так, что ось z будет параллельна силам. Тогда проекции каждой из сил на оси x и y и их моменты относительно оси z будут равны нулю и система даст три условия равновесия:

$$\sum F_{kz} = 0, \sum m_x(\bar{F}_k) = 0, \sum m_y(\bar{F}_k) = 0$$

Остальные равенства обратятся при этом в тождества вида $0 = 0$.

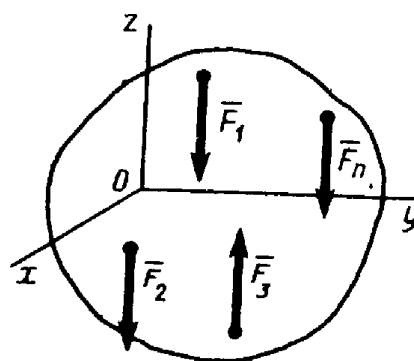
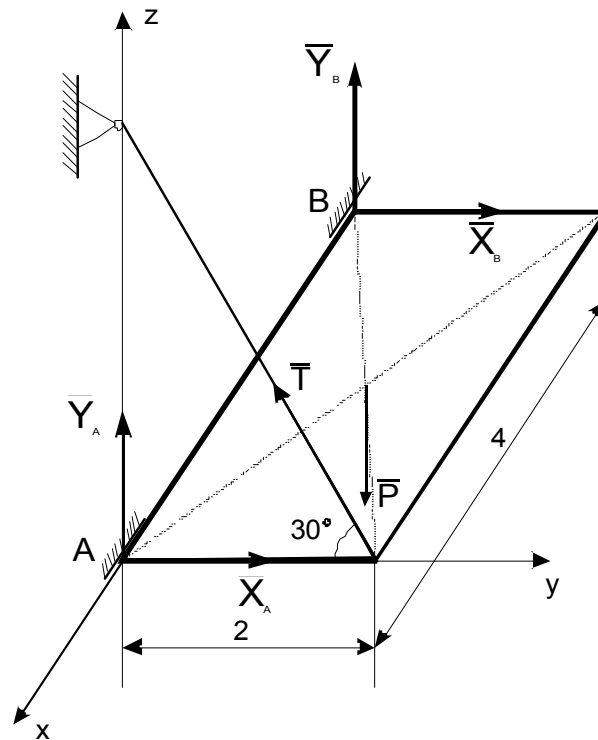


Рис. 6.3

Следовательно, для равновесия пространственной системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на ось, параллельную силам, и суммы их моментов относительно двух других координатных осей были равны нулю.

Пример 6.1

Дано: $P = 2000$ Н, $AB = 4$ м, $AK = 2$ м. Найти реакции опор R_A , R_B , силу натяжения троса T .



Решение:

1. $\sum F_{xi} = 0$
2. $\sum F_{yi} = R_{Ay} + R_{By} - T \cdot \cos 30^\circ = 0$
3. $\sum F_{zi} = R_{Az} + R_{Bz} + T \cdot \sin 30^\circ - P = 0$
4. $\sum M_x = -P \cdot 1 + T \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 = 0$
5. $\sum M_y = -P \cdot 2 + R_{Bz} \cdot 4 = 0$
6. $\sum M_z = -R_{By} \cdot 4 = 0$

Так как из последнего уравнения длина AB не может быть равна 0 (она равна 4), то $R_{By} = 0$.

Из четвертого уравнения находим T .

Из второго уравнения находим R_{Ay} .

Из пятого уравнения находим R_{Bz} .

Из третьего уравнения находим R_{Az} .

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}$$

$$R_B = \sqrt{R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = R_{Bz}$$

7. РАВНОВЕСИЕ СОЧЛЕНЕННЫХ СИСТЕМ ТЕЛ

7.1. Понятие сочлененной системы тел

Сочлененной системой тел называется совокупность тел соединенных между собой шарнирно, с помощью стержней, нитей, заделок и т.д. или просто опирающихся друг на друга.

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы сочлененных тел, соединенных какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть **внутренними**, в отличие от **внешних** связей, скрепляющих конструкцию с телами, в неё не входящими (например, с опорами).

Если после отбрасывания внешних связей конструкция остается жесткой, то для нее задачи статики решаются как для абсолютно твердого тела. Однако могут встречаться такие инженерные конструкции, которые после отбрасывания внешних связей не остаются жесткими. Примером такой конструкции является арка, показанная на рис.7.1. Если отбросить опоры A и B , то арка не будет жесткой: ее части могут поворачиваться вокруг шарнира C . На основании т.н. **принципа отвердевания** система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела.

Для арки, показанной на рис.7.1, количество неизвестных реакций (4) больше количества уравнений равновесия (3). Для решения задачи необходимо дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

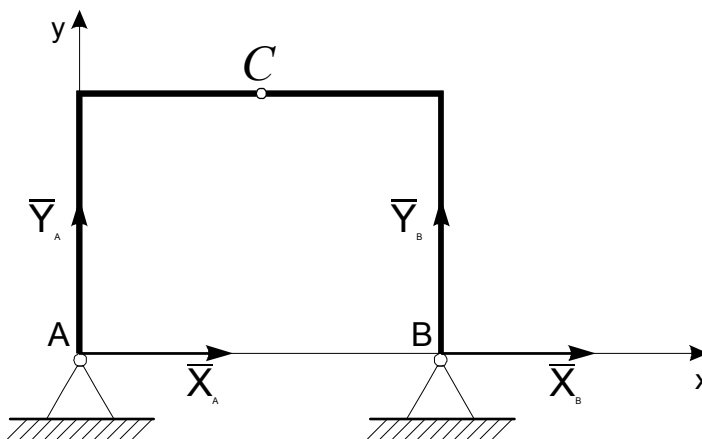


Рис.7.1

Составляя условия равновесия сил, действующих на арку, мы получим три уравнения с четырьмя неизвестными X_A , Y_A , X_B , Y_B . Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее половины, получим еще три уравнения, содержащие два новых неизвестных X_C , Y_C (рис.7.2). Решая полученную систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных.

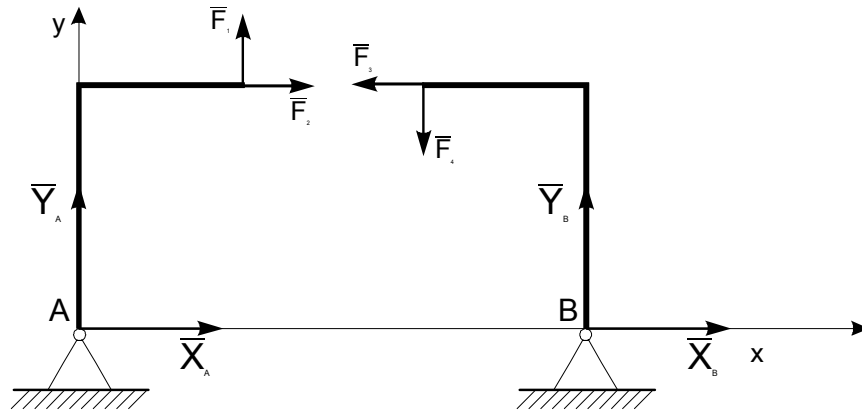


Рис.7.2

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу расчлняют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел в отдельности. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится $3n$ уравнений, позволяющих найти $3n$ неизвестных.

7.2. Решение задач

Условие задачи. Дано: $q=10\text{Н/м}$; $\alpha=45^\circ$; $l=3\text{м}$; найти реакции опор A и B (рис.7.3).

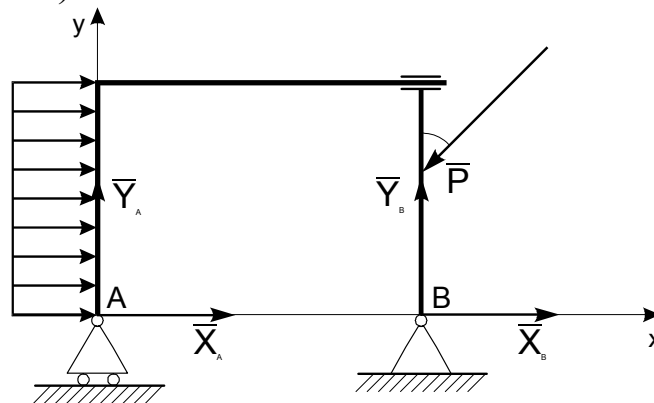


Рис.7.3

Решение. Разъединим систему на две части (рис.7.4).

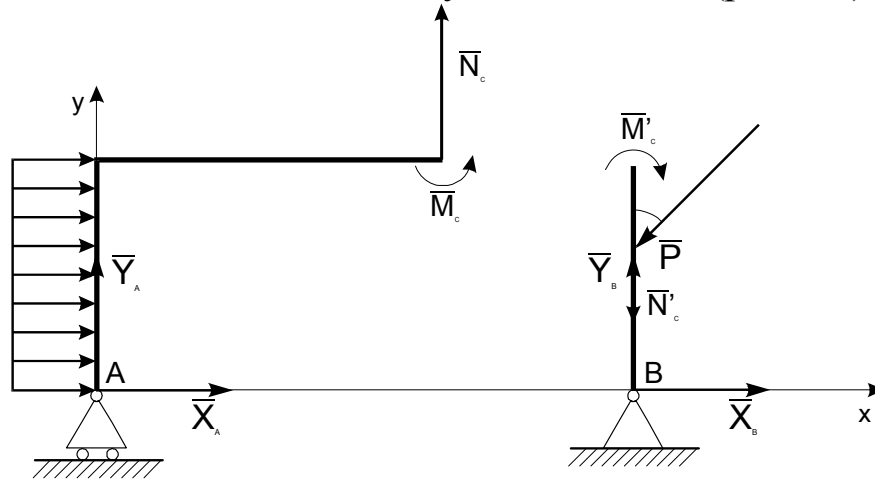


Рис. 7.4

Для левой части имеем:

$$\begin{aligned}
 Q &= q \cdot 3 = 30 \text{ Н}; \\
 \sum F_{ix} &= X_A + Q = 0; \\
 \sum F_{iy} &= Y_A + N_C = 0; \\
 \sum M_{iA} &= -Q \cdot 1,5 + N_C \cdot 4 + M_C = 0.
 \end{aligned}$$

Для правой части имеем:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{ix} &= X_B - P \cdot \sin \beta = 0; \\
 \sum F_{iy} &= Y_B - N_C - P \cdot \cos \beta = 0; \\
 \sum M_{iB} &= P \cdot \sin \beta \cdot 1,5 - M_C = 0.
 \end{aligned}$$

В задаче рекомендуется сделать проверку - составить уравнения моментов, например, относительно точки A , рассматривая систему как единое целое.

7.3. Статически определимые и статически неопределимые системы тел (конструкции)

При решении задач статики реакции связей всегда являются величинами заранее неизвестными; число их зависит от числа и вида наложенных связей. Чтобы соответствующая задача статики была разрешимой, надо, очевидно, чтобы число уравнений

равновесия равнялось числу неизвестных реакций, входящих в эти уравнения.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются **статически определенными**, а системы тел (конструкции), для которых это имеет место - **статически определенными**.

Задачи же, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются **статически неопределенными**, а системы тел (конструкции), для которых это имеет место - **статически неопределенными**.

Например, подвеска, состоящая из двух тросов (рис.7.5а), будет статически определенной, так как здесь две неизвестные реакции T_1 и T_2 войдут в два уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил. Подвеска же, состоящая из трех лежащих в одной плоскости тросов (рис.7.5б), будет статически неопределимой, так как в ней число неизвестных реакций равно трем (T_1, T_2, T_3), а уравнений равновесия по-прежнему только два.

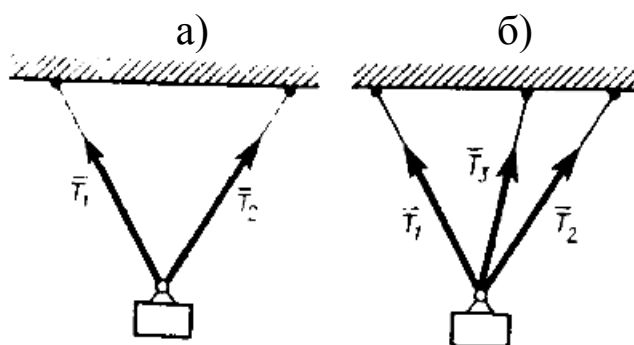


Рис.7.5

7.4. Решение задач статики

Решаемые методами статики задачи могут быть одного из следующих двух типов:

1) задачи, в которых известны (полностью или частично) действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении или при каких соотношениях между действующими силами тело будет находиться в равновесии

2) задачи, в которых известно, что тело заведомо находится в равновесии и требуется найти, чему равны при этом все или некоторые из действующих на тело сил. Реакции связей являются

величинами, наперед неизвестными во всех задачах статики.

Процесс решения сводится к следующим операциям.

1. Выбор тела (или тел), равновесие которого должно быть рассмотрено.

2. Изображение действующих сил.

3. Составление условий равновесия.

4. Определение искомых величин, проверка правильности решения и исследование полученных результатов.

Все расчеты при решении задач рекомендуется, как правило, производить в общем виде (алгебраически). Тогда для искомых величин будут получаться формулы, дающие возможность проанализировать найденные результаты. Кроме того, решение в общем виде позволяет иногда обнаружить сделанные ошибки путем проверки.

8. РАСЧЕТ ФЕРМ

8.1. Понятие о ферме

При устройстве перекрытий, постройке мостов, кранов, мачт, и т.п. применяются конструкции, называемые фермами.

Фермой (рис.8.1) называется геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из невесомых стержней, соединенных между собой шарнирами.

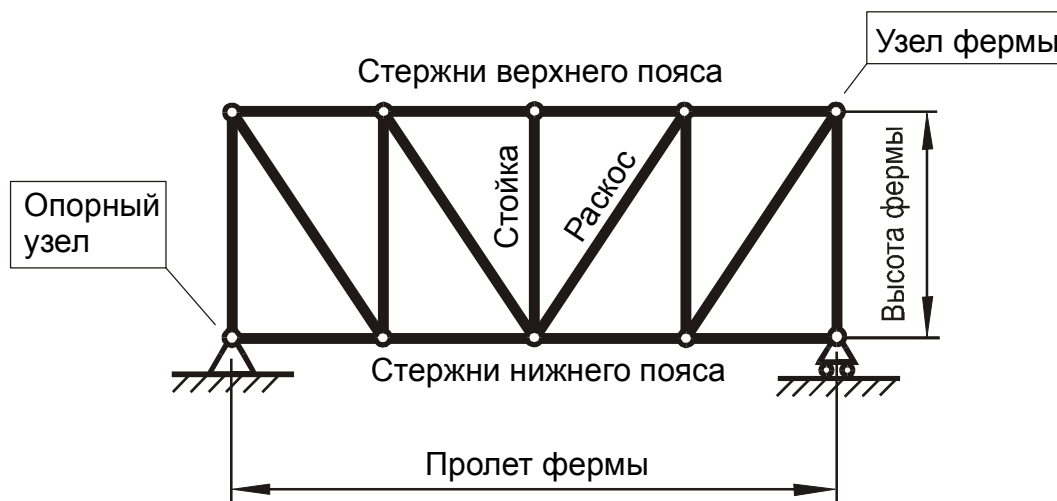


Рис. 8.1

Силы действующие на ферму должны быть приложены к шарнирам.

Если оси всех стержней и силы, действующие на ферму, лежат в одной плоскости, то такую ферму называют **плоской**.

Простейшей плоской фермой является показанная на рис.8.2 трехстержневая ферма. Всякая другая ферма, которая будет называться **простой**, может быть получена из простейшей путем последовательного присоединения к ней каждого нового узла (рис. 8.3) при помощи двух новых стержней.

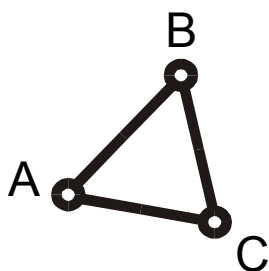


Рис. 8.2

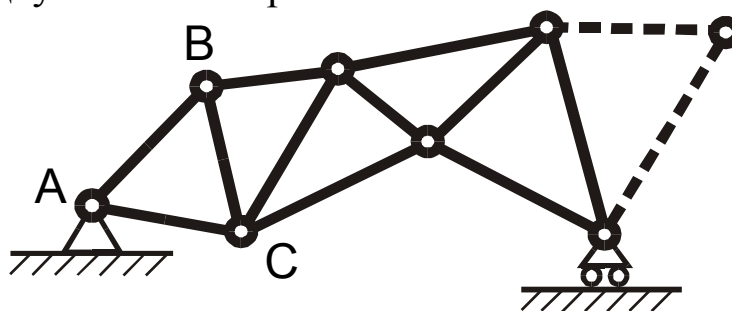


Рис. 8.3

8.2. Статически определимые и статически неопределимые фермы

Найдем связь между числом стержней S и числом узлов n в простой ферме.

Как показано выше, для образования простой фермы мы должны взять простейшую трехстержневую ферму и к ней присоединять каждый новый узел двумя новыми стержнями. Число присоединенных узлов будет равно $n-3$. Общее число стержней, необходимое для образования фермы, составит:

$$S = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3 .$$

Если число стержней и число узлов фермы удовлетворяет данному условию, то ферма является **статически определимой**, т.е. число независимых уравнений статики достаточно для определения усилия в каждом стержне. Простая ферма всегда статически определима.

Если $S > 2n - 3$ - ферма (рис. 8.4) **статически неопределима**.

Если $S < 2n - 3$ - ферма (рис. 8.5) неустойчива, т.е. конструкция получается подвижной (ферма становится механизмом).

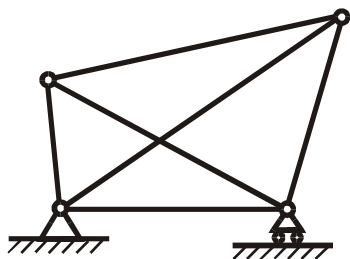


Рис. 8.4

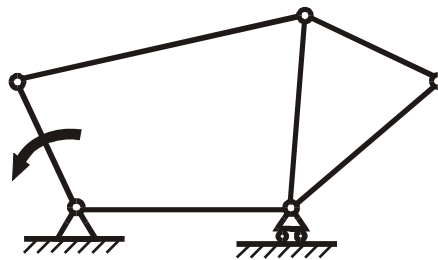


Рис. 8.5

8.3. Определение усилий в стержнях плоской фермы способом вырезания узлов

Основные допущения, принятые при расчете ферм:

- 1) стержни фермы считаются невесомыми;
- 2) внешние силы приложены в узлах фермы.

Способ вырезания узлов заключается в последовательном рассмотрении равновесия каждого узла фермы. Для

рассматриваемого узла составляют два уравнения равновесия в форме

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ и } \sum F_{iy} = 0.$$

Порядок рассмотрения равновесия узлов безразличен, лишь бы в рассматриваемом узле число неизвестных усилий не превышало двух.

В отдельных случаях, в начале целесообразно определить опорные реакции фермы.

8.4. Решение задач

Условие задачи. Определить реакции опор и усилия в стержнях показанной на рис. 8.6 плоской фермы. $P_1=10\text{кН}$, $P_2=15\text{кН}$.

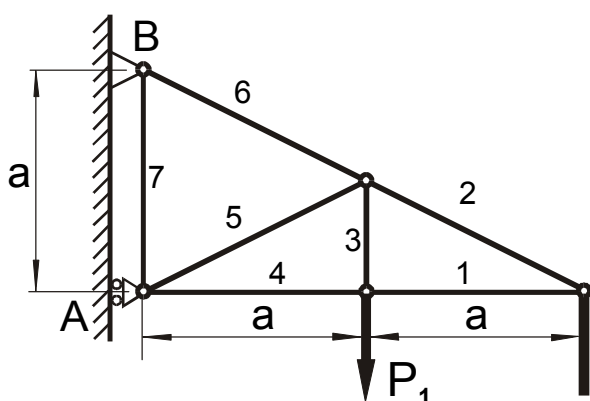


Рис. 8.6

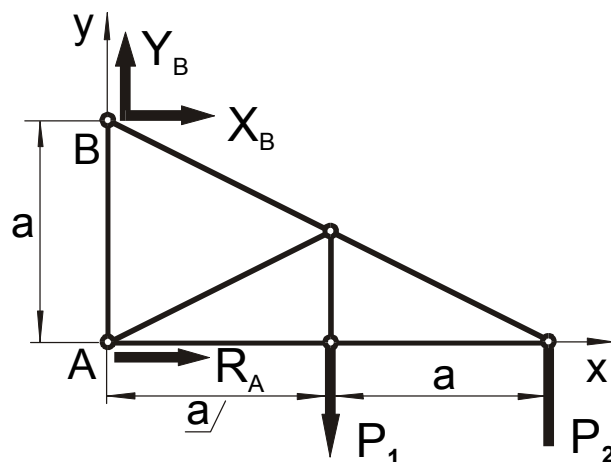


Рис. 8.7

Решение. Определим реакции опор. Применяя принцип освобождения от связей, рассмотрим равновесие фермы в целом. Показав действующие на неё активные силы P_1 , P_2 (рис. 8.7) и реакции связей R_A , X_B и Y_B , для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; & X_B + R_A &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; & Y_B - P_1 - P_2 &= 0; \\ \sum M_B(\vec{F}_i) &= 0; & R_A a - P_1 a - P_2 2a &= 0.\end{aligned}$$

Зная величину силы P определяем:

$$Y_B = P_1 + P_2 = 10 + 15 = 25 \text{ кН.}$$

$$Y_B = 25 \text{ кН}$$

Затем определяем

$$R_A = P_1 + 2P_2 = 10 + 2 \cdot 15 = 40 \text{ кН.}$$

$$R_A = 40 \text{ кН}$$

с учетом чего находим

$$X_B = -R_A = -40 \text{ кН.}$$

$$X_B = -40 \text{ кН}$$

Для определения усилий в стержнях фермы рассмотрим равновесие каждого из ее узлов. Силы, действующие на узлы фермы, при предположении что все стержни растянуты, показаны на рис. 8.8.

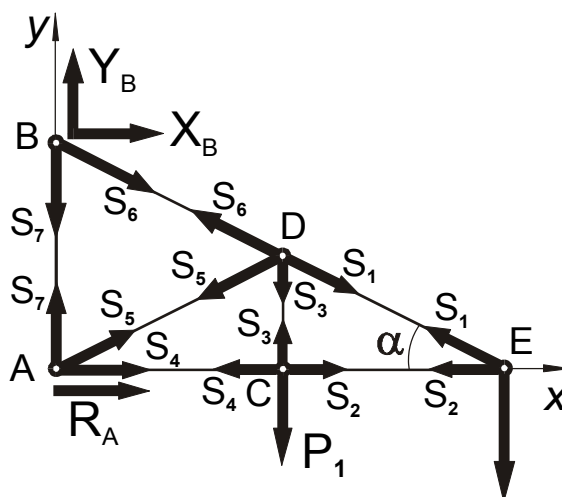


Рис. 8.8

Для каждого узла составляем два уравнения равновесия действующей на него плоской системы сходящихся сил. Оптимальной последовательностью рассмотрения равновесия узлов будет последовательность: E , C , D , A и B . В этом случае, из каждой

"двойки" уравнений будут последовательно находится все входящие в неё неизвестные силы:

$$\text{Узел E; } \quad \Sigma F_{ix} = 0; \quad -S_1 \cos \alpha - S_2 = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin \alpha - P_2 = 0. \quad (2)$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = 0,45; \quad \cos \alpha = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = 0,89 .$$

$$\text{Из (2) } S_1 = \frac{P_2}{\sin \alpha} = \frac{15}{0,45} = 33,33 \text{ кН.}$$

$$S_1 = 33,33 \text{ кН}$$

$$\text{Из (1) } S_2 = -S_1 \cos \alpha = -33,33 \cdot 0,89 = -29,67 \text{ кН.}$$

$$S_2 = -29,67 \text{ кН}$$

$$\text{Узел C; } \quad \Sigma F_{ix} = 0; \quad S_2 - S_4 = 0; \quad (3)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad S_3 - P_1 = 0. \quad (4)$$

$$\text{Из (3) } S_4 = S_2 = -29,67 \text{ кН.}$$

$$S_4 = -29,67 \text{ кН}$$

$$\text{Из (4) } S_3 = P_1 = 10 \text{ кН.}$$

$$S_3 = 10 \text{ кН}$$

54

$$\text{Узел D; } \quad \Sigma F_{ix} = 0; \quad S_1 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha - S_6 \cos \alpha = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad -S_1 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha + S_6 \sin \alpha - S_3 = 0. \quad (6)$$

Из (5) выражаем $S_6 = S_1 - S_5$ и подставляем в (6):

$$-S_1 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha + (S_1 - S_5) \sin \alpha - S_3 = 0,$$

откуда

$$S_5 = -\frac{S_3}{2 \sin \alpha} = -\frac{10}{2 \cdot 0,45} = -11,11 \text{ кН.}$$

$$S_5 = -11,11 \text{ кН}$$

Зная S_5 находим:

$$S_6 = 2,22 - (-11,11) = 13,33 \text{ кН.}$$

$$S_6 = 13,33 \text{ кН}$$

$$\text{Узел A; } \quad \Sigma F_{ix} = 0; \quad R_A + S_4 + S_5 \cos \alpha = 0; \quad (7)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; \quad S_7 + S_5 \sin \alpha = 0. \quad (8)$$

$$S_7 = S_5 \sin \alpha = -11,11 \cdot 0,45 = -5,00 \text{ кН.}$$

$$S_7 = -5,00 \text{ кН}$$

Знаки (-) в значениях S_2 , S_4 , S_5 и S_7 указывают на то, что эти стержни сжаты, а не растянуты, как предполагалось вначале.

8.5. Расчет ферм способом сечений

Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две

части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия так, чтобы в каждое из них вошло только одно неизвестное усилие.

Пусть требуется определить усилие в стержнях 6 и 9 фермы, изображенной на рис. 8.9.

Действующие вертикальные силы $P_1=P_2=P_3=P_4=20\text{кН}$ реакции опор $N_1=N_2=40\text{кН}$. Проводим сечение ab через стержни 4, 5, 6 и рассматриваем равновесие левой части фермы, заменяя действие на нее правой части силами, направленными вдоль стержней 4, 5, и 6. Чтобы найти S_6 , составляем уравнение моментов относительно точки C , где пересекаются стержни 4 и 5. Данная точка называется **точкой Риттера**.

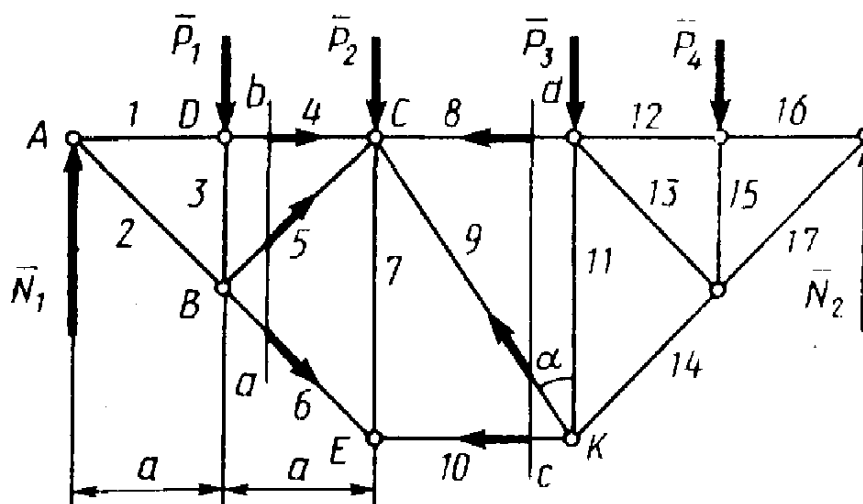


Рис. 8.9

Получим, считая $AD=DC=a$ и $BC \perp BE$:

$$-N_1 \cdot 2 \cdot a + P_1 \cdot a + S_6 \cdot BC = 0.$$

Отсюда находим S_6 . Плечо BC вычисляем по данным, определяющим направления и размеры стержней фермы.

В данном примере $\angle ABC = 90^\circ$ и $BC = a \cdot \sqrt{2}$. Следовательно, $S_6 = 42,3\text{кН}$; стержень растянут.

Чтобы определить усилие в стержне 9 той же фермы, проводим сечение dc через стержни 8, 9, 10 и, рассматривая равновесие

правой части, составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную стержням 8 и 10. Получим, что

$$S_9 \cdot \cos \alpha - P_3 - P_4 + N_2 = 0,$$

откуда находим S_9 .

9. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

9.1 Равновесие тел при наличии трения скольжения

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого с усилием \vec{S} (рис. 9.1) в плоскости, касательной к соприкасающимся поверхностям, возникает сила сцепления $\vec{F}_{сц}$. При этом полная реакция поверхности

$$R = \sqrt{F_{сц}^2 + N^2},$$

где N – нормальная реакция поверхности.

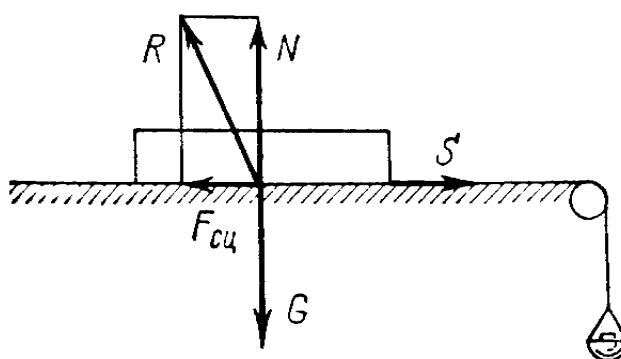


Рис.9.1

Итак, **силой сцепления** называется касательная составляющая полной реакции опорной поверхности которая уравновешивает силу стремящуюся сдвинуть покоящееся тело.

Если усилие \vec{S} (см. рис.9.1) изменять от 0 до некоторого максимального значения \vec{S}^{max} , при котором тело придет в движение, то сила $\vec{F}_{сц}$ сцепления также будет изменяться от 0 до своего максимального значения $\vec{F}_{сц}^{max}$ (**критический случай**).

Коэффициент пропорциональности между максимальным значением силы сцепления и нормальным давлением тела на поверхность называется **коэффициентом сцепления**.

$$f_{сц} = \frac{F_{сц}^{max}}{N}.$$

Откуда

$$F_{сц} \leq F_{сц}^{max};$$

$$F_{cц} \leq f_{cц} \cdot N.$$

Поэтому при решении задач значение силы $F_{cц}$ сцепления можно найти только для критического случая. В остальных же случаях сила сцепления находится из уравнений равновесия как составляющая полной реакции поверхности.

Сила трения скольжения - касательная составляющая полной реакции опорной поверхности, возникающая при скольжении тела.

Коэффициент пропорциональности между силой трения скольжения и нормальным давлением тела на поверхность называется **коэффициентом трения**.

$$f = \frac{F_{тр}}{N}.$$

Экспериментально установлено, что

$$f < f_{cц}.$$

Коэффициенты сцепления и трения, в первом рассмотрении, зависят от материалов соприкасающихся поверхностей, от разделяющих их оксидных пленок, покрытий, смазочных материалов, а также от макро- и микро геометрии поверхности. Значения данных коэффициентов устанавливаются опытным путем.

Угол, образованный полной реакцией поверхности с нормалью к этой поверхности в предельном состоянии покоя называется **углом сцепления** (рис. 9.2)

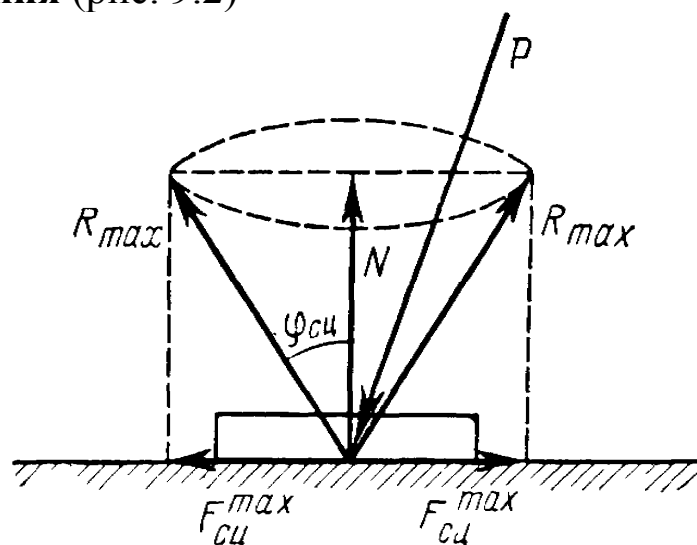


Рис.9.2

$$\operatorname{tg} \varphi_{c\mu} = \frac{F_{c\mu}^{max}}{N} = f_{c\mu}.$$

Конус с вершиной в точке касания тел, образующая которого составляет угол сцепления с нормалью к поверхности тел, называется **конусом сцепления** (см. рис.9.2).

Поверхность конуса сцепления представляет собой геометрическое место максимальных реакций \vec{R}_{max} опорной поверхности, поэтому пространство внутри конуса сцепления представляет собой совокупность возможных положений сдвигающей силы \vec{P} , при которых тело остается в покое (см. рис.9.2).

9.2. Равновесие тела при наличии трения качения

Пусть на каток радиуса R и весом P , опирающийся на горизонтальную поверхность, действует сила T , приложенная горизонтально к его центру (рис.9.3).

Под действием катка поверхность деформируется и точка приложения реакции N поверхности и силы $F_{c\mu}$ сцепления перемещается из A в C . Составим уравнение равновесия катка:

$$\sum F_{ix} = T - F_{c\mu} = 0, \sum F_{iy} = N - P = 0, \sum M_{iA} = f_k \cdot N - T \cdot R = 0$$

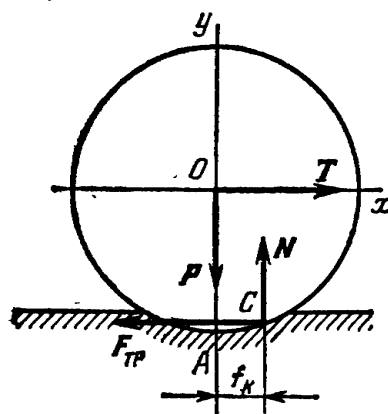


Рис.9.3

Откуда

$$F_{cy} = T ;$$

$$N = P .$$

Итак, на каток действуют две пары сил: (\vec{F}_{cy}, \vec{T}) и (\vec{N}, \vec{P}) , которые уравновешены. Первая пара сил с моментом $M=T \cdot R$ стремится привести каток в движение, а вторая пара противодействует этому стремлению. Момент

$$M_k = f_k \cdot N ,$$

противодействующей пары называется **моментом сопротивления качению**, а коэффициент f_k – **коэффициентом трения качения**. Коэффициент трения качения измеряется в единицах длины. Его определяют экспериментально.

Условия покоя катка:

1) отсутствие качения

$$M \leq M_k ;$$

$$T \cdot R \leq f_k \cdot N ;$$

$$T \leq \frac{f_k}{R} \cdot N .$$

2) отсутствие скольжения

$$T \leq F_{cy}^{max} ;$$

$$T \leq f_{cy} \cdot N .$$

Обычно

$$\frac{f_k}{R} \ll f_{cy} ,$$

поэтому при нарушении покоя каток начнет именно катиться, а не скользить.

9.3. Решение задач

Условие задачи. Определить величину груза P , удерживающего тело весом G на шероховатой наклонной

плоскости с углом наклона α , который больше угла сцепления $\varphi_{сц}$ (рис. 9.4).

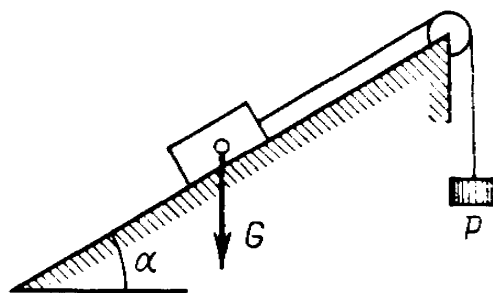


Рис.9.4

Решение. Необходимо иметь в виду, что направление силы сцепления $F_{сц}$ зависит от величины груза P . При максимально возможной величине P_{max} веса этого груза сила сцепления направлена вниз по наклонной плоскости, так как под действием реакции нити груз стремится перемещаться вверх по наклонной плоскости (рис.9.5а). При минимальной величине P_{min} веса груза сила сцепления направлена вверх по наклонной плоскости (рис.9.5б).

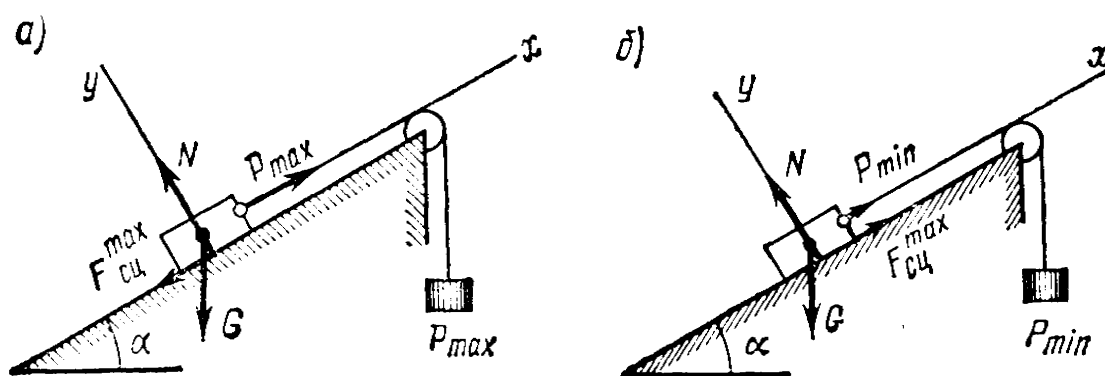


Рис.9.5

Составим уравнения равновесия сходящихся сил, действующих на тело, когда оно удерживается в предельном состоянии покоя максимальным грузом:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; & P_{\max} - F_{\text{сц}}^{\max} - G \sin \alpha &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & N - G \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда $N = G \cos \alpha$. Так как

$$F_{\text{сц}}^{\max} = f_{\text{сц}} N,$$

то

$$P_{\max} = f_{\text{сц}} N + G \sin \alpha = f_{\text{сц}} G \cos \alpha + G \sin \alpha.$$

Так как

$$f_{\text{сц}} = \operatorname{tg} \varphi_{\text{сц}} = \frac{\sin \varphi_{\text{сц}}}{\cos \varphi_{\text{сц}}},$$

то имеем

$$P_{\max} = G \frac{\cos \alpha \sin \varphi_{\text{сц}} + \sin \alpha \cos \varphi_{\text{сц}}}{\cos \varphi_{\text{сц}}} = G \frac{\sin (\alpha + \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}}.$$

Аналогично определяем

$$P_{\min} = G \frac{\sin (\alpha - \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}}.$$

Таким образом, условие равновесия сил, приложенных к телу, покоящемуся на шероховатой наклонной плоскости, имеет вид:

$$G \frac{\sin (\alpha - \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}} \leq P \leq G \frac{\sin (\alpha + \varphi_{\text{сц}})}{\cos \varphi_{\text{сц}}}.$$