

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Конспект лекций  
для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское  
строительство» дистанционной формы обучения

**I семестр**

Могилев 2014

## Список литературы

1. **Дарков, А.В.** Строительная механика : учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 10-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2005. – 656 с.
2. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / А.Е. Саргсян [и др.]. – 2-е изд. испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
3. **Ржаницын, А.Р.** Строительная механика : учебное пособие для строительных специальностей вузов / А.Р. Ржаницын. – 2-е изд. перераб. – М. : Высш. школа, 1991. – 439 с.
4. **Борисевич, А.А.** Строительная механика : учебник для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн. : БНТУ, 2007. – 821 с.
5. **Селюков, В.М.** Расчетно-проектировочные работы по строительной механике : учебн. пособие для вузов / В.М. Селюков. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1989. – 205 с.

## Введение.

*Краткий исторический очерк развития строительной механики. Задачи и методы строительной механики как науки о расчете на прочность, жесткость и устойчивость сооружений.*

Строительная механика (СМ) – наука о прочности, устойчивости, жесткости, долговечности и надежности инженерных конструкций и их отдельных элементов.

Начало строительной механики как науки связывают с именем Галилео Галилея (исследовал изгиб балок). Свой вклад сделали Гук (закон Гука), Эйлер и Лагранж (высшая математика, механика).

В XIX веке, после бурного начала строительства железных дорог, мостов, больших кораблей, плотин, различных промышленных сооружений, строительная механика стала самостоятельной наукой.

Поспособствовали развитию строительной механики такие российские ученые как Ломоносов, Кулибин, Ясинский, Журавский (разработал теорию расчета плоских ферм).

В советское время свой вклад внесли Власов, Смирнов и многие другие.

Во второй половине XX века в результате развития методов расчета и компьютерных технологий строительная механика поднялась на современный уровень.

Задачи строительной механики: 1) разработка методов определения усилий в сооружениях и их перемещений; 2) исследование устойчивости, жесткости, долговечности сооружений; 3) получение данных для их надежного и экономического проектирования.

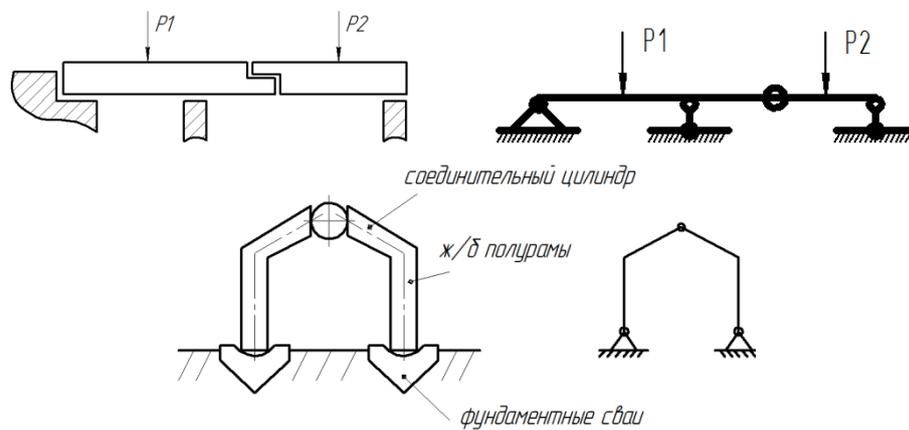
Строительная механика широко использует методы теоретической механики. Большую роль в решении проблем строительной механики играют аналитические и численные методы, которые даются в курсе высшей математики. Для последнего времени характерно использование матричного исчисления и итерационных методов, а графические и графо - аналитические методы применяются все реже.

*Понятие о расчетной схеме сооружений. Многообразие расчетных схем. Основные элементы сооружений.*

Все особенности сооружений учесть невозможно, поэтому приходится рассматривать их в упрощенном виде.

Расчетной схемой – называют идеализированную, упрощенную схему действительного сооружения, но в которой отражаются его основные свойства, нагрузки и воздействия.

Любое сооружение представляет собой пространственный объект, соответственно и внешняя нагрузка, действующая на него, также является пространственной. Значит, и расчетную схему сооружения надо выбирать пространственную. Однако такая схема приводит к сложной задаче составления и решения большого числа уравнений. Поэтому реальное сооружение необходимо стремиться привести к плоской системе.



Правильная расчетная схема должна отражать основные особенности сооружения, поскольку неправильный выбор расчетной схемы может привести к неверным результатам.

Следует отметить, что для одного и того же сооружения можно выбирать разные расчетные схемы. Выбор хорошей расчетной схемы приводит к экономии вычислений и повышению точности результатов расчета.

Различают: 1) плоские и пространственные расчетные схемы, 2) расчетные схемы по типу или способу соединения элементов, 3) по направлению опорных реакций, 4) по статическим и динамическим особенностям.

В сооружениях используются элементы следующих типов:

- 1) стержни – прямые или криволинейные элементы, поперечные размеры  $a$  и  $b$  которых намного меньше длины  $l$  (рис. 1 а, б, в);
- 2) пластины – элементы, толщина которых  $t$  меньше остальных размеров  $a$  и  $b$  (рис. 1 г);
- 3) оболочки – криволинейные пластины в одном или двух направлениях (рис. 1 д, е);
- 4) массивные тела – элементы, все три размера которых одного порядка (рис. 1 ж).

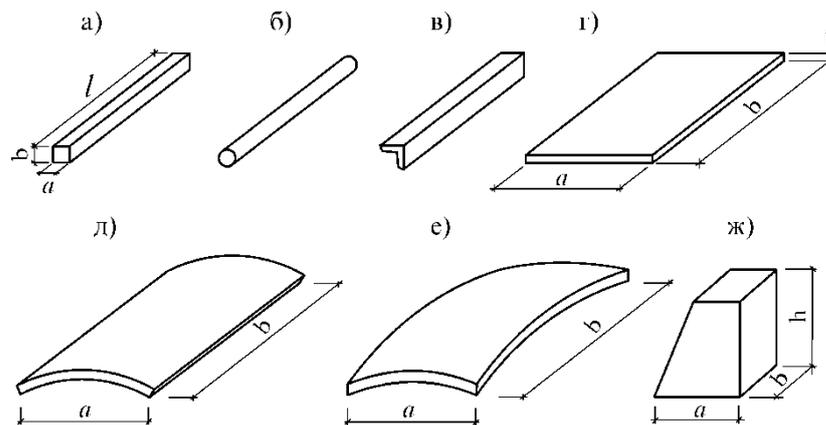


Рис. 1

Простейшие сооружения, состоящие из таких элементов, можно подразделять на следующие типы – стержневые сооружения (рис. 2 а, б), складчатые сооружения (рис. 2 в), оболочки (рис. 2 г) и массивные сооружения – подпорные стенки (рис. 2 д) и каменные своды (рис. 2 е), комбинированные (Например, у которого основание массивное, средняя часть может состоять из колонн стержневого типа и плит, а верхняя часть – из плит или оболочек).

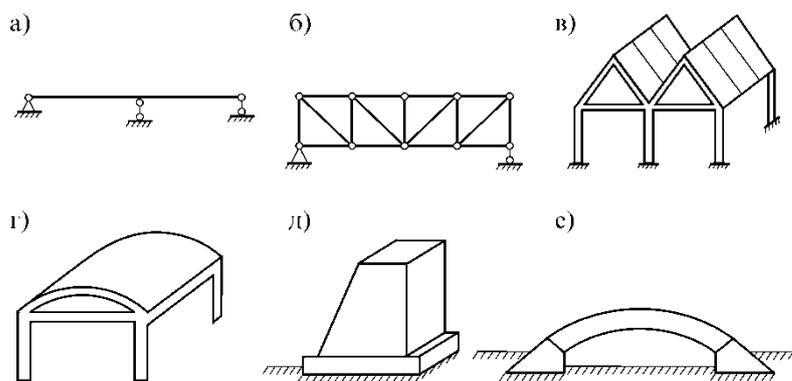


Рис. 2

### *Механические свойства материалов. Гипотезы и уравнения СМ.*

Большинство материалов сооружений при действии малых нагрузок являются упругими и подчиняются закону Гука. При возрастании нагрузки этот закон перестает выполняться. В нашем курсе будем рассматривать только упругие материалы. Поскольку методы расчета конструкций наиболее хорошо разработаны для материалов, подчиняющихся закону Гука.

Примем некоторые гипотезы, которые позволяют выбирать более простые расчетные модели, упрощать и уменьшать объем вычислений:

1. Материал сооружения является упругим.
2. Перемещения точек сооружения намного меньше его размеров.
3. Перемещения пропорциональны величине нагрузки.
4. Выполняется принцип суперпозиции (независимости действия сил): результат воздействия нескольких сил равен сумме воздействий отдельных сил и не зависит от порядка приложения этих сил.

Исходные уравнения СМ можно разбить на 3 группы:

1) Уравнения равновесия – устанавливают взаимосвязь между внутренними и внешними усилиями, которые входят в уравнения линейно.

2) Уравнения совместности деформаций. В этих уравнениях деформации сжатия, изгиба связываются с перемещениями точек системы. В общем случае эти уравнения нелинейные, однако если учесть, что деформации и перемещения для реальных систем малы по сравнению с размерами конструкций, то уравнения становятся линейными.

3) Физические уравнения, связывающие напряжения с деформациями. При малых напряжениях эти уравнения можно получить на основе закона Гука и они будут линейными.

Если все 3 типа уравнений, составленных для данной конструкции линейные, то расчетная схема представляет линейно-деформированную систему и для нее справедлив принцип независимости действия сил.

*Основные способы соединения элементов в единую систему и прикрепления сооружений к основанию.*

Связи в расчетных схемах конструкций, соединяющие между собой отдельные ее элементы (стержни, пластины и т.д.) называются внутренними.

В реальных конструкциях внутренние связи выполнены в виде болтов, заклепок, сварочных соединений. В расчетных связи различают по числу степеней свободы, которых они лишают систему.

Виды внутренних связей:

- шарнирные (2 лишают) (рис. 3 а);
- шарнирно-подвижные (1 лишают) (рис. 3 б).

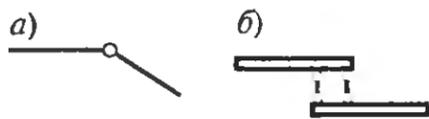


Рис. 3



Рис. 4

Взаимосвязь между рассматриваемой конструкцией и другими конструктивными элементами или окружающей средой в расчетных схемах учитывается с помощью внешних связей – опор.

Виды внешних связей (опор):

- шарнирно-подвижная (рис. 4 а) (изображение в табл.);
- шарнирно-неподвижная (рис. 4 б) (изображение в табл.);
- жесткое защемление (заделка) (рис. 4 в) (изображение в табл.).

Тип опоры	Условное обозначение	Реакции	Перемещения
Шарнирно-подвижная опора			 Δ – перемещение; φ – угол поворота
Шарнирно-неподвижная опора			
Заделка			 Перемещений нет

# Тема 1.Образование системы и ее степень свободы

## Образование систем.

Стержневые системы – системы, состоящие из отдельных стержней, соединенных между собой в узлах с помощью болтов, заклепок, сварки и т.д.

Типы простых систем:

1. Балка – изгибаемый брус. Она бывает однопролетной или многопролетной. Типы однопролетных балок: простая балка (рис. 1 а), консоль (рис. 1 б) и консольная балка (рис. 1 в).

Типы многопролетных балок: разрезные (рис. 1 г), неразрезные (рис. 1 д) и составные (рис. 1 е):

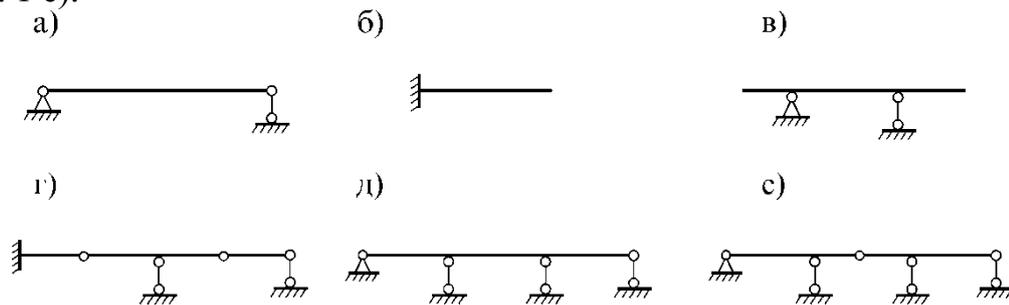


Рис. 1

2. Рама – система прямых (ломаных или кривых) стержней. Ее стержни могут соединяться жестко или через шарнир. Вот некоторые типы рам: простая рама (рис. 2 а), составная рама (рис. 2 б), многоэтажная рама (рис. 2 в).

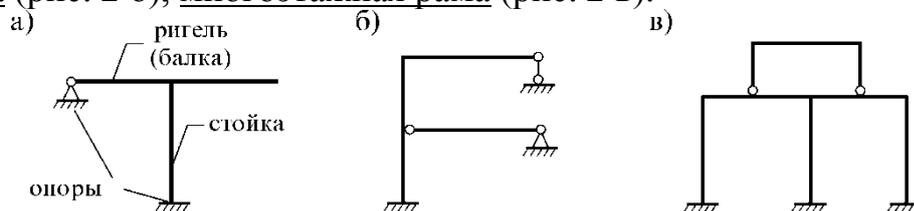


Рис. 2

3. Ферма – система стержней, соединенных шарнирами. Типов ферм много. Например, бывают стропильная ферма (рис. 3 а), мостовая ферма (рис. 3 б), крановая ферма (рис. 3 в), башенная ферма (рис. 3 г).

В большинстве случаев соединения в узлах фермы жесткие – бесшарнирные. Опытные и теоретические данные показывают, что жесткие соединения допустимо условно заменить шарнирами для упрощения расчета.

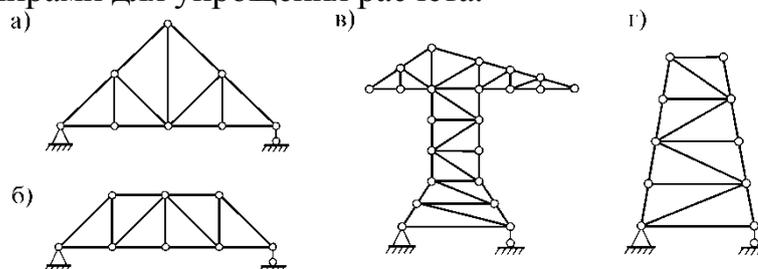


Рис. 3

4. Арка – система из кривых стержней. Некоторые типы арок: трехшарнирная (рис. 4 а), одношарнирная (рис. 4 б), бесшарнирная (рис. 4 в) арки.

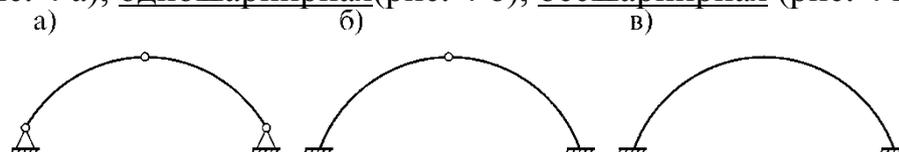


Рис. 4

Существуют более сложные системы как комбинации простых систем. Они называются комбинированными системами. Например: арочная ферма (рис. 5 а), ферма с аркой (рис. 5 б), висячая система (рис. 5 в):

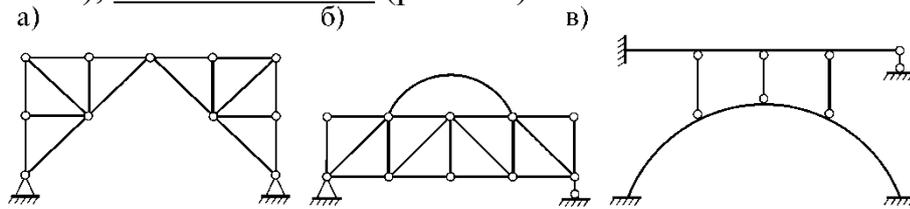


Рис. 5

Внешняя нагрузка может вызвать значительные перемещения элементов сооружения, в результате которых оно может перестать служить своему назначению. Поэтому ставится требование: перемещения сооружения должны быть малыми.

*Неизменяемые, изменяемые и мгновенно изменяемые системы. Степень свободы системы и число «лишних» связей.*

Кинематический анализ – это анализ геометрической структуры сооружения с целью исключения больших перемещений.

При кинематическом анализе внешняя нагрузка не рассматривается, а элементы системы считаются достаточно жесткими.

В кинематическом анализе различаются три типа расчетных схем:

- 1) геометрически неизменяемые системы(ГНС),
- 2) геометрически изменяемые системы(ГИС),
- 3) мгновенно изменяемые системы(МИС).

Геометрически неизменяемая система– это система, перемещения которой возможны только при деформации ее элементов. Простейшей ГНС является шарнирный треугольник (рис. 6 а).

Геометрически изменяемая система – это система, элементы которой могут получать перемещения даже без их деформаций. Например, изменяемой является шарнирный четырехугольник (рис. 6 б).

Мгновенно изменяемая система – система, способная получать лишь мгновенные перемещения (рис. 6 в – по касательной к дугам).

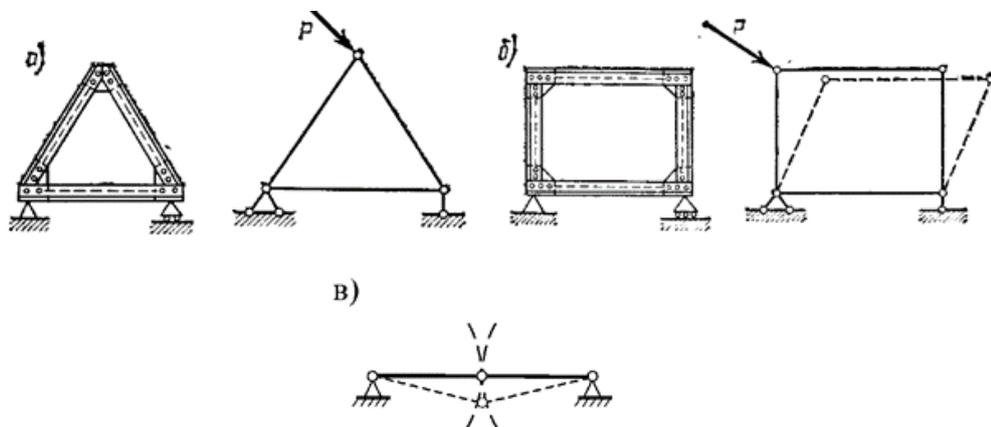


Рис. 6

Расчетная схема любого инженерного сооружения не должна быть изменяемой или мгновенно изменяемой. Если изменяемость системы обычно возникает из-за недостатка связей, то мгновенная изменяемость возникает при их неправильной установке (рис. 7 а, г, д, е).

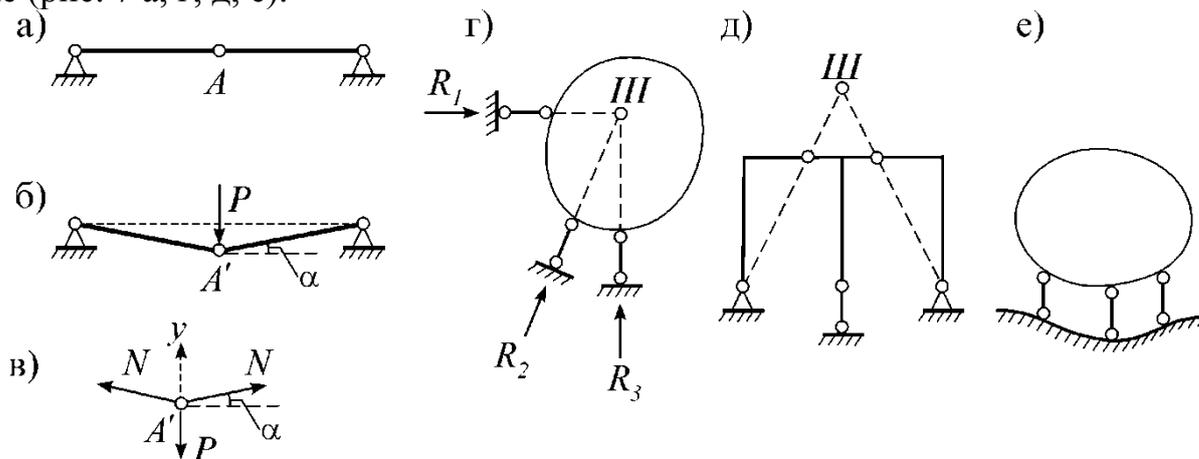


Рис. 7

Обнаружить мгновенную изменяемость очень важно уже на этапе кинематического анализа, так как позволяет вносить коррективы в расчетную схему сооружения.

В качестве примера рассмотрим балку (рис. 7 а) и выясним, почему же она является мгновенно изменяемой.

1. При действии на эту балку сосредоточенной силы  $P$  ее положение изменится (рис. 7 б). Запишем условие равновесия системы сходящихся сил в точке  $A'$  (рис. 7 в):

$$\sum Y = N \sin \alpha \cdot 2 - P = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Если в этой формуле  $\alpha = 0$ , т.е. когда стержни  $AB$  и  $BC$  лежат на одной прямой, то  $N = \infty$ . Таким образом, мгновенная изменяемость опасна тем, что усилия в элементах системы могут быть очень большими.

2. Если в последней формуле примем  $P = 0$ , внутреннее усилие становится неопределенным:  $N = 0/0$ .

Этот результат лежит в основе метода нулевой нагрузки. Суть этого метода заключается в следующем:

- удалить все силы, действующие на систему;
- вычислить внутренние усилия, включая и опорные реакции. Если они все будут равны нулю, то система неизменяема. Если же хотя бы одно усилие будет неопределенным (типа  $0/0$ ), то данная система является мгновенно изменяемой.

Количественная оценка кинематических свойств системы основана на определении ее степеней свободы.

Число степеней свободы (W) – это минимальное число независимых параметров, необходимых для определения положения всех точек системы.

Введем следующие понятия:

Диск (D) – неизменяемая часть системы, состоящая из одного или нескольких жестко связанных элементов;

Шарнир (Ш) – связь, дающая возможность взаимного поворота соседним дискам;

Опорный стержень (C<sub>0</sub>) – связь, ограничивающая перемещение диска в одном направлении по отношению к земле.

Шарнир, объединяющий два диска, называется простым шарниром (рис. 8 а). Если шарнир объединяет несколько дисков, то он называется сложным шарниром (рис. 8б). Сложный шарнир эквивалентен  $(k-1)$  простому шарниру, где  $k$  – число дисков, объединяемых шарниром.

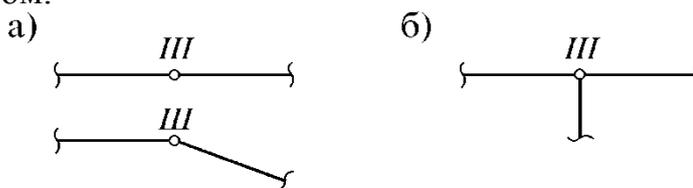


Рис. 8

Кинематические связи должны обеспечивать неподвижность системы относительно земли (основания), а также неизменяемость ее внутренней структуры. Если при удалении одной связи из неизменяемой системы она становится изменяемой, то эта связь называется необходимой. Если после этого система остается неизменяемой, то связь называется избыточной.

Каждый диск в плоскости имеет 3 степени свободы (каждый жесткий блок пространственной системы имеет 6 степеней свободы). Простой шарнир убирает две степени свободы, опорный стержень – одну (заделка=3 опорным стержням).

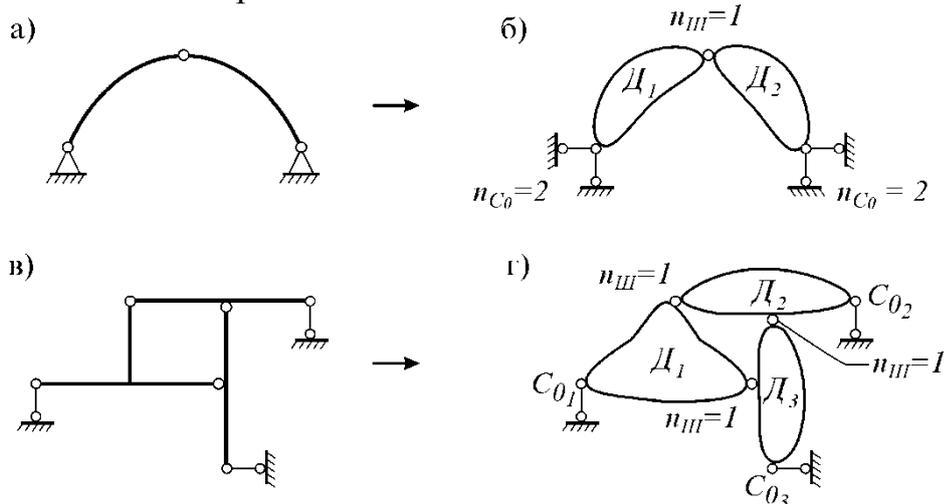
Число степеней свободы плоской стержневой системы определяется по формуле, называемой основной формулой кинематического анализа:

$$W = 3D - 2Ш - C_0.$$

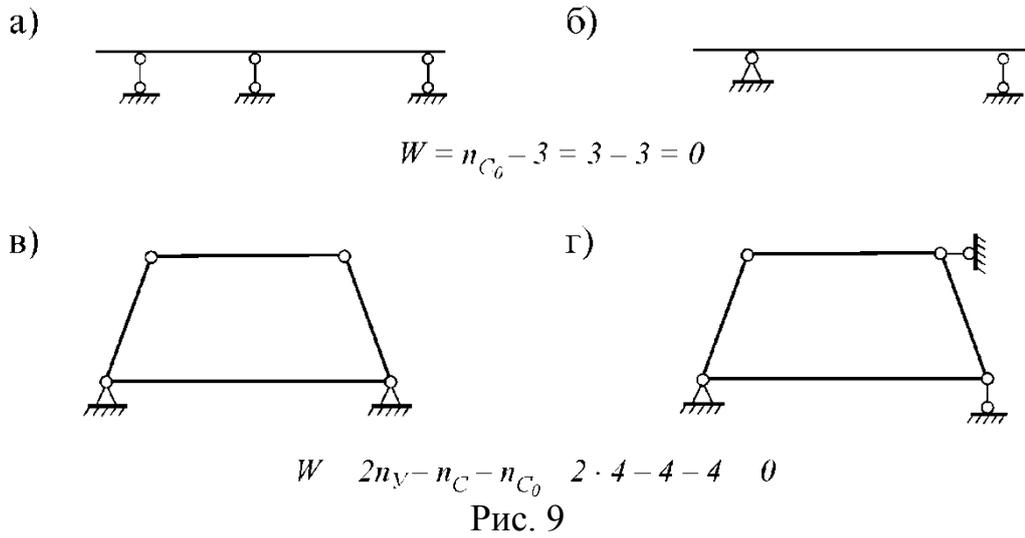
После расчета по этим формулам возможны три случая:

- 1)  $W > 0$  – такая система геометрически изменяема ( $W=1$  - механизм) и не может служить в качестве расчетной схемы;
- 2)  $W = 0$  – в системе имеется достаточное число связей; если они введены правильно, то система неизменяема и статически определима;
- 3)  $W < 0$  – в системе есть избыточные связи. Если эти связи введены правильно, то система неизменяема и статически неопределима.

Отсюда следует, что расчетная схема сооружения должна удовлетворять необходимому условию геометрической неизменяемости  $W \leq 0$ .



Выполнение условий, рассмотренных выше необходимо, но не достаточно. Например, число степеней свободы систем (рис. 9 а, в) одинаково:  $W=0$ , поэтому необходимое условие их геометрической неизменяемости выполняется. Но, тем не менее, они оба геометрически изменяемы. Причиной их изменяемости является неправильная установка связей. Для того чтобы они стали неизменяемыми, одну связь в этих системах нужно переставить (рис. 9 б, г).

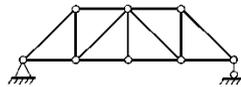


Из этих примеров следует, что для полной уверенности в неизменяемости системы нужна дополнительная проверка системы – проверка геометрической структуры. Ее суть заключается в проверке способов объединения элементов между собой и с землей. Для такой проверки необходимо:

- выделить в системе неизменяемые фигуры – диски;
- последовательно объединять эти диски между собой, используя способы образования неизменяемых систем.

Рассмотрим простейшие способы образования геометрически неизменяемых систем:

1. Новый узел к диску должен добавляться способом диады – двумя непараллельными стержнями (рис. 10 а) (системы, полученные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов, причем каждого двумя стержнями, не лежащими на одной прямой – геометрически неизменяемы (ферм из треугольников)).



2. Два диска должны объединяться:

- способом триады – тремя непараллельными и непересекающимися в одной точке стержнями (исходя из правила) (рис. 10 б);
- одним шарниром и одним стержнем (направление стержня не должно проходить через шарнир) (рис. 10 в). Этот способ вытекает из способа триады;

3. Три диска должны объединяться тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис. 10 г). Шарниры могут быть условными (рис. 10 д).

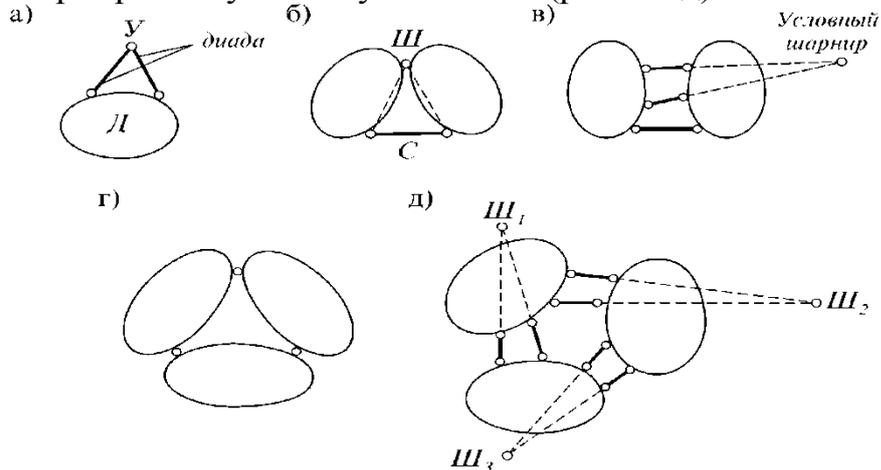


Рис. 10

## Тема 2. Методы определения усилий от неподвижной нагрузки.

*Виды нагрузок. Методы определения усилий в статически определимых системах.*

Внешние силы, действующие на сооружение, называются нагрузкой.

Кроме того, за нагрузку могут приниматься различные сочетания внешних сил, изменение температуры, осадки опор и т.д.

Нагрузки различают:

– по способу приложения: объемная нагрузка действует во всех точках сооружения (собственный вес, инерционные силы и др.); поверхностная нагрузка распределена по поверхности (снег, ветер и др.).

– по времени действия: постоянная нагрузка действует постоянно и зачастую сохраняется в течение всей жизни сооружения (собственный вес); временная нагрузка действует только в определенный период или момент (снег, ветер).

– по способу действия: статическая нагрузка действует так, что сооружение сохраняет статическое равновесие; динамическая нагрузка вызывает инерционные силы и нарушает это равновесие (источниками динамической нагрузки являются различные машины и механизмы, землетрясения и др.); подвижные нагрузки (поезд, автотранспорт, группа людей и т.д.).

Нагрузка, распределяясь между элементами сооружения, вызывает внутренние напряжения и деформации. В строительной механике определяются их обобщенные характеристики – внутренние усилия и перемещения. А сами напряжения и деформации определяются через внутренние усилия по известным формулам сопротивления материалов.

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, вызывая в них опорные реакции.

При определении опорных реакций используется *принцип освобождения от связей*: всякое тело можно освободить от связей, заменив их реакциями. После этого из уравнений равновесия можно определять величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы записываются в трех формах:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

В элементах плоской стержневой системы возникают три усилия: продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q$ , изгибающий момент  $M$ . Для любого поперечного сечения стержня положительные значения указанных усилий определяются как на рис. 1 (только для эпюр)

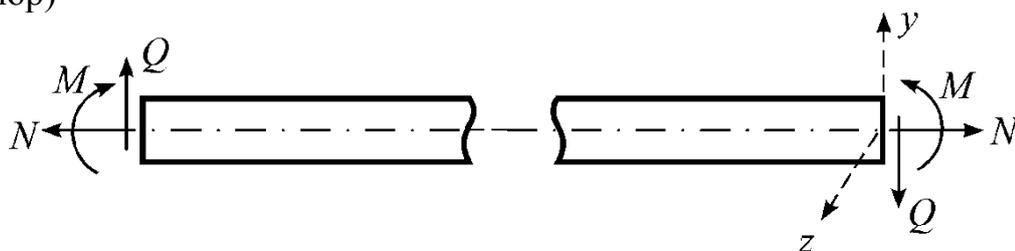


Рис. 1

Изгибающий момент  $M$  – это сумма моментов всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения относительно оси  $z$ :

Поперечная сила  $Q$  – это сумма проекций на ось  $y$  всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения:

Продольная сила N – это сумма проекций всех сил на ось  $x$ , лежащих слева (или справа) от сечения (продольная сила положительна, если вызывает растяжение элемента, и отрицательна, если вызывает его сжатие).

При построении эпюр для поперечных и продольных сил положительные значения откладываются вверх от оси эпюры, отрицательные – вниз от оси эпюры. Для изгибающего момента положительные значения откладываются вниз, а отрицательные – вверх, в результате этого эпюра  $M$  изображается на стороне растянутого волокна.

Между эпюрами  $M$  и  $Q$  существует зависимость – поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки (теорема Журавского).

$$Q = dM/dx$$

Положения для проверки правильности построения эпюр:

1. Порядок линии эпюры  $Q$  на единицу меньше линии эпюры  $M$ .

На участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра  $M$  ограничена параболой второй степени, а эпюра  $Q$  – наклонной прямой (при распределенной нагрузке эпюра  $M$  обращена выпуклостью в ту сторону, в которую направлена нагрузка). Между сосредоточенными силами (при отсутствии распределенной нагрузки) эпюра  $M$  ограничена наклонной прямой, а эпюра  $Q$  – горизонтальной прямой.

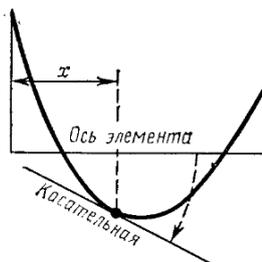
2. На участках эпюры  $Q$  одного знака эпюра  $M$  имеет одну монотонность (участкам с отрицательными значениями  $Q$  соответствуют участки с восходящими (слева на право) ординатами эпюры  $M$ ).

3. Чем круче касательная, проведенная к эпюре  $M$ , тем больше абсолютное значение  $Q$  (числовое значение  $Q$  равно тангенсу угла между касательной и осью балки).

4. В сечениях, где эпюра  $Q$  пересекает ось эпюры ( $Q=0$ ) на эпюре  $M$  находится максимум или минимум (экстремум).

5. Точка приложения сосредоточенных сил соответствует перелому в эпюре  $M$  и скачку в эпюре  $Q$ . Когда сила направлена вниз, то и скачок в эпюре  $Q$  (слева – на право) должен быть вниз; когда сила – вверх, то скачок – вверх (величина скачка равна величине сосредоточенной силы). Аналогичное для сосредоточенных моментов и эпюр моментов.

По эпюре  $M$  можно определить знак  $Q$ . Для этого ось эпюры  $M$  нужно повернуть до совпадения с касательной к ней. Если поворот будет по часовой стрелке,  $Q$  будет со знаком «+», а если против часовой стрелки, то со знаком «-». При этом угол поворота должен быть меньше  $90^\circ$ .



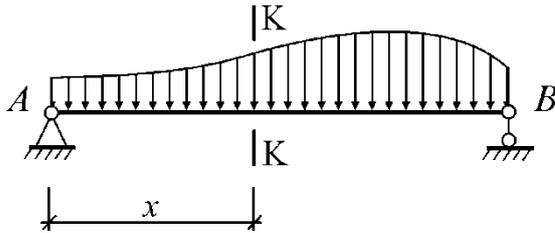
Усилия в статически определимых системах определяются методами простых сечений, совместных сечений, вырезания узла и замены связей.

Метод простых сечений.

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу и определять его из уравнений статики (равновесия).

Например, внутренние усилия балки (рис. 2 а) в сечении  $K$  определяются как на рис. 2 б.

а)



б)

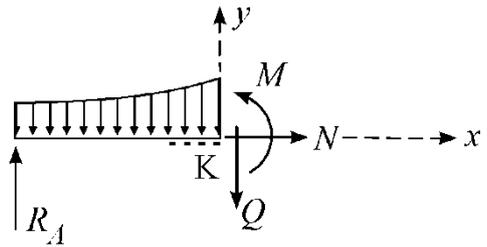


Рис. 2

Сущность метода:

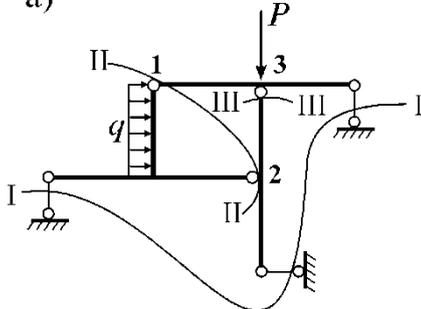
- 1) поделить систему на участки;
- 2) выбрать участок и провести поперечное сечение;
- 3) выбрать одну (наиболее простую) из отсеченных частей;
- 4) составить три уравнения равновесия;
- 5) из них определить внутренние усилия  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ;
- 6) для данного участка построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ;
- 7) повторить пункты 2-6 для остальных участков.

Метод совместных сечений.

Этот метод используется при расчете многодисковых систем.

Например, для расчета трехдисковой рамы (рис. 3 а) проводятся три совместных сечения  $I$ ,  $II$ ,  $III$ . В результате выявляются девять неизвестных реакций (рис. 3 б): опорные реакции  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $H$  и междисковые реакции  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ . Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, т.е.  $3 \times 3 = 9$  уравнений, из их решения определяются все 9 реакций.

а)



б)

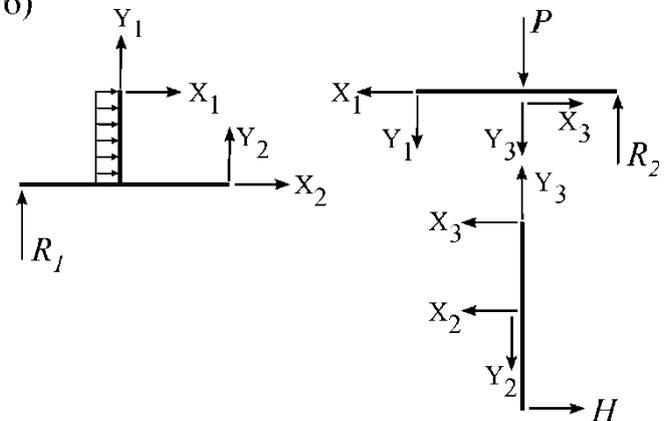


Рис. 3

Сущность метода:

- 1) совместными сечениями разделить систему на части (диски);
- 2) обозначить опорные и междисковые реакции;
- 3) для каждого диска записать уравнения равновесия;
- 4) решить систему полученных уравнений;
- 5) каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
- 6) объединить все эпюры в общие эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

Метод вырезания узла.

Используется для определения усилий простых систем.

Сущность метода:

- 1) вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями;
- 2) силы, действующие в узле, проецируются на две оси;
- 3) из полученных уравнений определяются искомые усилия.

Например, при расчете балочно-ферменной системы (рис. 4 а), после того как определены опорные реакции (рис. 4 б), вырезается узел А (рис. 4 в) и составляются уравнения равновесия:

$$\Sigma X = N_2 \cos 45 - N_1 \cos 45 = 0,$$

$$\Sigma Y = N_1 \sin 45 + N_2 \sin 45 + P/2 = 0.$$

Из них определяются искомые продольные силы:  $N_1 = N_2 = -\frac{P}{4 \sin 45}$ .

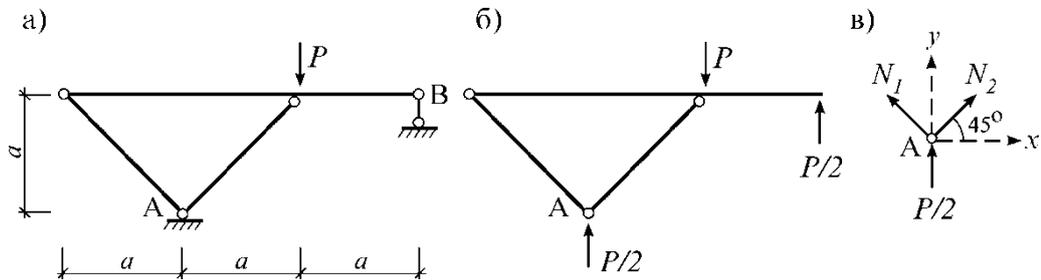


Рис. 4

### Метод замены связей.

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

#### Сущность метода:

- 1) сложная система превращается в более простую путем перестановки связи (или нескольких связей) в другое место;
- 2) из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи;
- 3) полученная система рассчитывается известными способами.

### Тема 3. Расчет балок на неподвижную нагрузку

*Расчет многопролетных балок и простейших стержневых систем на неподвижную нагрузку*

Многопролетные (разрезные) статически определимые балки (рис. 1, а, в) представляют собой систему простых балок. При этом различают основные и вспомогательные балки. К основным относят геометрически неизменяемые системы, прикрепленные к основанию при помощи двух шарнирных опор или заделки. Вспомогательной балкой называется балка, которую можно удалить без нарушения неизменяемости оставшейся части. Вспомогательную балку можно рассчитывать независимо от оставшейся части, причем ее опорные реакции будут служить внешними силами для оставшейся.

В зависимости от расположения опор и шарниров, многопролетные балки могут быть разными (рис. 1).

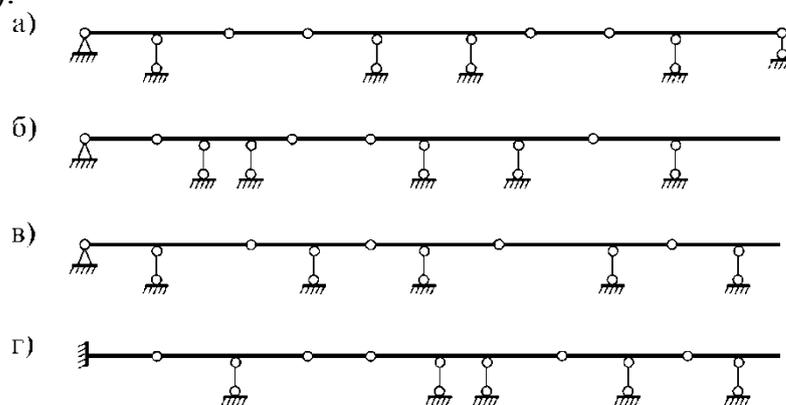


Рис. 1

Для геометрической неизменяемости и статической определимости многопролетных балок должно выполняться условие

$$n_{ш} = n_{с0} - 3$$

где  $n_{ш}$  – число шарниров;

$n_{с0}$  – число опорных стержней.

Правила для установки шарниров для многопролетных балок:

- 1) в каждом пролете может быть установлено не более двух шарниров;
- 2) пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров (кроме балок с заделками);
- 3) пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим (начиная со второго пролета).

Взаимодействие частей многопролетной балки легче изучать путем составления их поэтажных схем. Все основные балки изображаются на нижнем этаже. Те части балки, которые примыкают к основным балкам и могут нести нагрузку только при опирании на основные балки, изображаются этажом выше и т.д. Например, рассмотренные на рис. 1 многопролетные балки можно представить в виде следующих этажных схем (рис. 2).

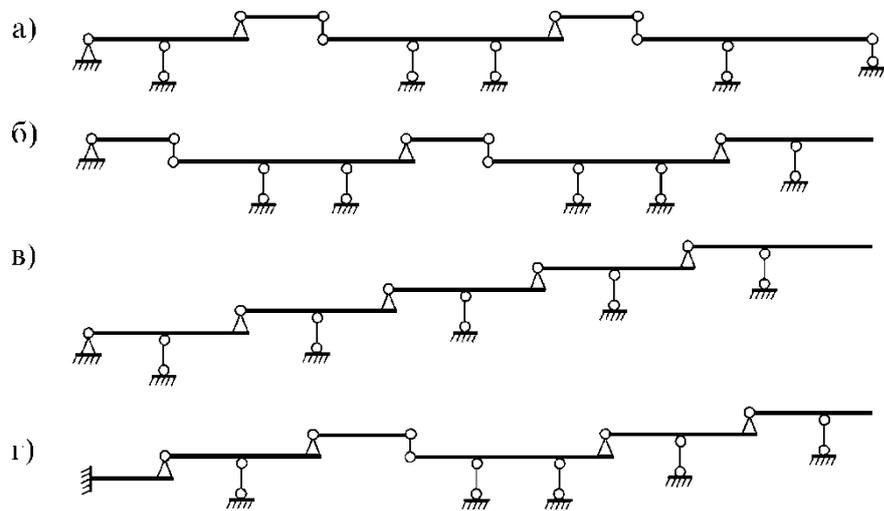


Рис. 2

Расчет многопролетных балок начинается с самого верхнего этажа. Вначале определяются опорные реакции и внутренние усилия ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ) этой части балки от приложенной к ней нагрузки. После этого переходим к нижележащему этажу. Однако, кроме своей нагрузки, к нему следует приложить и давление от вышележащего этажа (которое равно реакции вышележащего этажа, но направлено в противоположную сторону). Затем определяются его реакции и внутренние усилия. Далее расчет продолжается до самого нижнего этажа.

Рассмотрим пример (рис. 3 а). Вначале строим поэтажную схему (рис. 3 б), проводим расчет подвесной балки (рис. 3 в), а затем главной балки (рис. 3 г). Полученные эпюры для отдельных частей балки объединяем в общие эпюры  $M$  и  $Q$  (рис. 3 д, е).

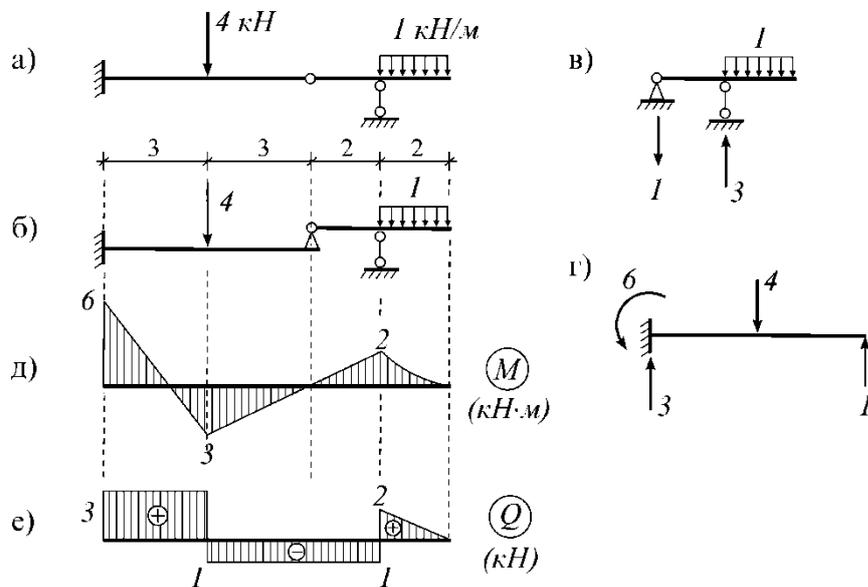


Рис. 3

## Тема 4. Линии влияния

*Виды подвижных нагрузок. Понятие об особенностях расчета на подвижную нагрузку. Линия влияния.*

Подвижной нагрузкой называется нагрузка, движущаяся по сооружению с некоторой скоростью.

К примеру, такой нагрузкой является транспорт (рис. 1 а). Его можно рассматривать как систему взаимосвязанных параллельных сил, движущихся по сооружению (рис. 1 б).

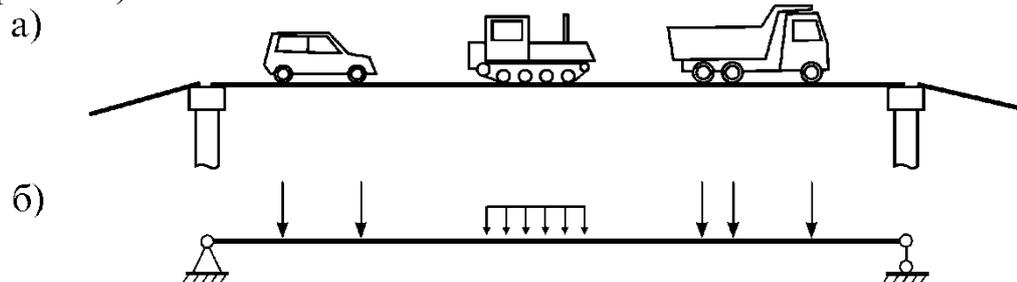


Рис. 1

Подвижная нагрузка вызывает в элементах сооружения переменные внутренние усилия. Расчет сооружения на подвижную нагрузку, даже без учета динамических эффектов (например, ускорений и инерционных сил), сложнее расчета на постоянную нагрузку. Потому что приходится решать несколько задач:

- 1) определять наиболее опасное (расчетное) положение нагрузки;
- 2) определять наибольшее (расчетное) значение этой нагрузки;
- 3) рассчитывать сооружение на расчетную нагрузку.

Расчет на подвижную нагрузку можно вести двумя методами.

### Общий метод.

Сущность метода:

- 1) подвижная нагрузка рассматривается целиком и обозначается одной координатой;
- 2) искомое внутреннее усилие выражается как функция этой координаты;
- 3) эта функция исследуется на экстремум ( $\max$ ,  $\min$ ) и определяется расчетное положение нагрузки;
- 4) вычисляется расчетное значение внутреннего усилия.

### Метод линий влияния.

Сущность метода:

- 1) искомая величина (внутреннее усилие, реакция и др.) определяется как функция от подвижной единичной силы;
- 2) строится график этой функции;
- 3) находятся расчетное положение и расчетное значение искомой величины.

Метод линий влияния более прост для реализации и позволяет достаточно просто определять расчетное положение и расчетное значение нагрузки.

Линия влияния (ЛВ) – это график зависимости искомой величины от подвижной единичной силы  $P=1$ .

Ординаты ЛВ характеризуют изменение исследуемого фактора, возникающего в одном определенном сечении при передвижении силы  $P=1$  по длине балки, в отличии

от эпюр, характеризующих распределение исследуемого фактора по различным сечениям балки при неподвижной нагрузке.

*Статический метод построения линий влияния опорных реакций и внутренних сил для простых и консольных балок.*

Основан на составлении уравнений равновесия. При этом подвижная нагрузка считается статической (неподвижной).

Рассмотрим консольную балку, на которую действует подвижная нагрузка  $P=1$  (рис. 2 а).

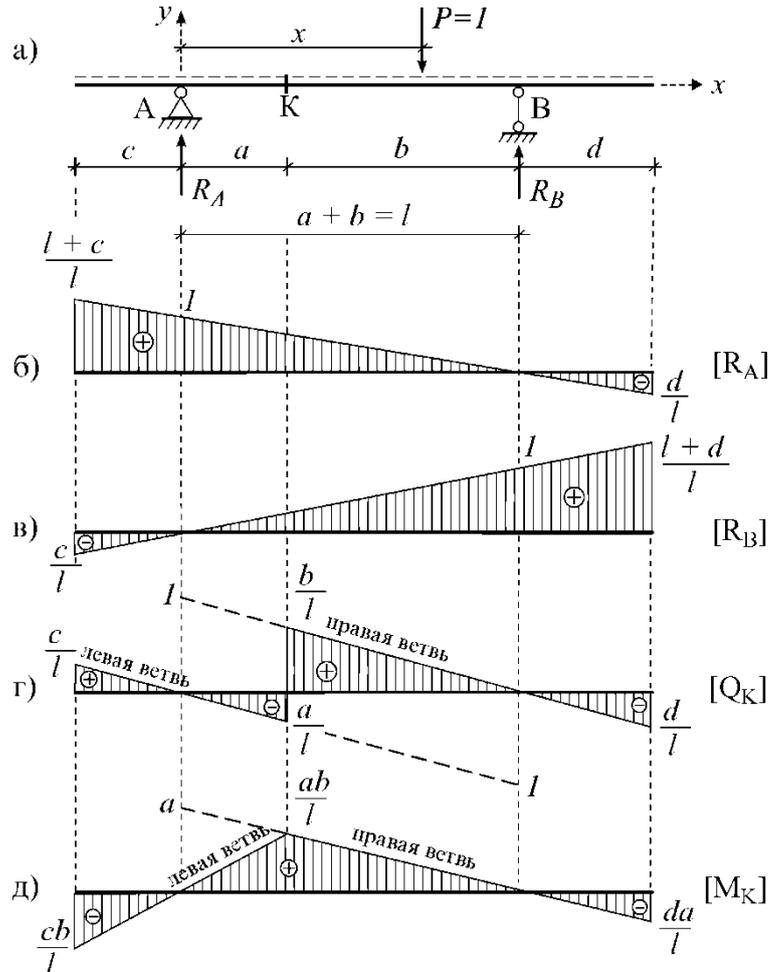


Рис. 2

1) Определяются опорные реакции и строятся их ЛВ

Сумма моментов в правой опоре:

$$\Sigma M_B = R_A \cdot l - 1 \cdot (l - x) = 0.$$

Отсюда  $R_A = \frac{l-x}{l}$ .

Для построения графика этой функции найдем положение двух точек:

если  $x=0$ , то  $R_A=1$ ; если  $x=l$ , то  $R_A=0$ .

Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции  $R_A$  (рис. 2 б).

Для определения правой опорной реакции составим уравнение

$$\Sigma M_A = R_B \cdot l - 1 \cdot x = 0.$$

Отсюда  $R_B = \frac{x}{l}$ .

Если  $x=0$ , то  $R_B=0$ ; если  $x=l$ , то  $R_B=1$ . Через эти точки проводим прямую и строим ЛВ реакции  $R_B$  (рис. 2 в).

Для того чтобы найти величину реакции  $R_A$  при заданном положении груза  $P=1$  надо измерить под этим грузом ординату линии влияния (в принятом масштабе).

Если на балку действует груз  $P_1$ , то для определения опорной реакции надо ординату линии влияния от груза  $P=1$  умножить на величину  $P_1$ . В случае действия нескольких сосредоточенных усилий (грузов) необходимо найти числовые значения опорных реакций отдельно от каждой силы, а затем их суммированием получить полную реакцию от заданной системы сосредоточенных сил.

2) Строятся линии влияния поперечной силы и момента

Они зависят от положения силы  $P=1$  относительно сечения, в котором определяются, т.е. рассматривается два случая – сила  $P=1$  расположена слева и справа относительно сечения.

Знаки для изгибающего момента и поперечной силы берутся аналогично как при построении эпюр.

а) Единичная сила правее сечения К:

Рассматриваем левую часть (меньше сил):  $M_K = R_A \cdot a$  или  $M_K = \frac{l-x}{l} \cdot a$ .

Рассмотрим две точки положения единичной силы:  $x=a$ ,  $x=l+d$ . Соответственно  $M_K = \frac{ab}{l}$  и  $M_K = -\frac{da}{l}$ .

Рассматриваем левую часть (меньше сил):  $Q_K = R_A$  или  $Q_K = \frac{l-x}{l}$ .

Рассмотрим две точки положения единичной силы:  $x=a$ ,  $x=l+d$ . Соответственно  $Q_K = \frac{b}{l}$  и  $Q_K = -\frac{d}{l}$ .

Эти функции определяют правые ветви ЛВ поперечной силы и момента в сечении К (рис. 2 г, д).

б) Единичная сила левее сечения К

Рассматриваем правую часть (меньше сил):  $M_K = R_B \cdot b$  или  $M_K = \frac{x}{l} \cdot b$ .

Рассмотрим две точки положения единичной силы:  $x=a$ ,  $x=-c$ . Соответственно  $M_K = \frac{ab}{l}$  и  $M_K = -\frac{cb}{l}$ .

Рассматриваем левую часть (меньше сил):  $Q_K = -R_B$  или  $Q_K = -\frac{x}{l}$ .

Рассмотрим две точки положения единичной силы:  $x=a$ ,  $x=-c$ . Соответственно  $Q_K = -\frac{a}{l}$  и  $Q_K = \frac{c}{l}$ .

Эти функции определяют левые ветви ЛВ поперечной силы и момента в сечении К (рис. 5.2 г, д).

Полученные ЛВ опорных реакций и внутренних усилий используются как известные решения при расчете аналогичных балок и как промежуточные решения при расчете многопролетных балок.

*Кинематический метод построения линий влияния опорных реакций и внутренних сил для простых и консольных балок.*

Кинематический способ построения линий влияния для внутренних усилий основан на принципе возможных перемещений Лагранжа: для системы, находящейся в равновесии, сумма работ всех действующих на систему сил на возможных малых перемещениях равна нулю.

Для построения линии влияния какого-либо усилия (опорной реакции, поперечной силы, изгибающего момента) в заданном сечении балки необходимо удалить ту связь, усилие в которой определяем от единичной подвижной силы, и заменить удаленную связь искомым усилием, в результате система превратится в механизм с одной степенью свободы. По направлению искомого усилия задается бесконечно малое обобщенное перемещение системе с исключенной связью, таким образом, чтобы искомое усилие совершало положительную работу (направление перемещения совпадало с искомым усилием). На основании принципа возможных перемещений составляется условие равновесия, из которого и определяется неизвестное усилие.

Построим линии влияния опорной реакции в опоре 2 (рис. 3).

Для этого исключаем опорную связь и заменяем ее искомой реакцией.

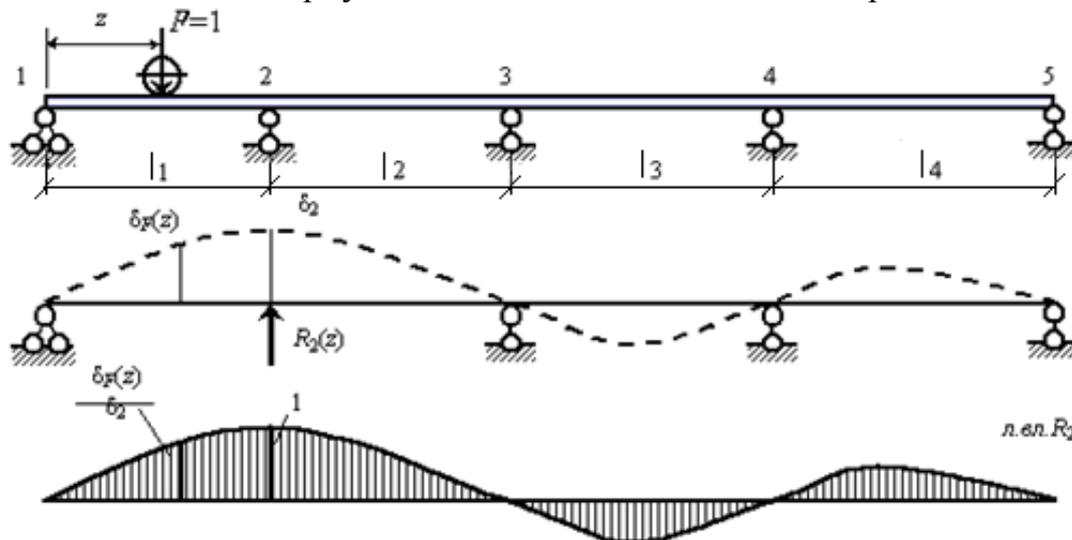


Рис. 3. Построение линии влияния опорной реакции  $R_2$

Задаем балке бесконечно малое линейное перемещение  $\delta_2$ . Записываем условие равновесия по принципу Лагранжа (знаки: + при совпадении направления силы и перемещения):

$$-P \cdot \delta_P(z) + R_2(z) \cdot \delta_2 = 0$$

Откуда

$$R_2(z) = P \cdot \delta_P(z) / \delta_2$$

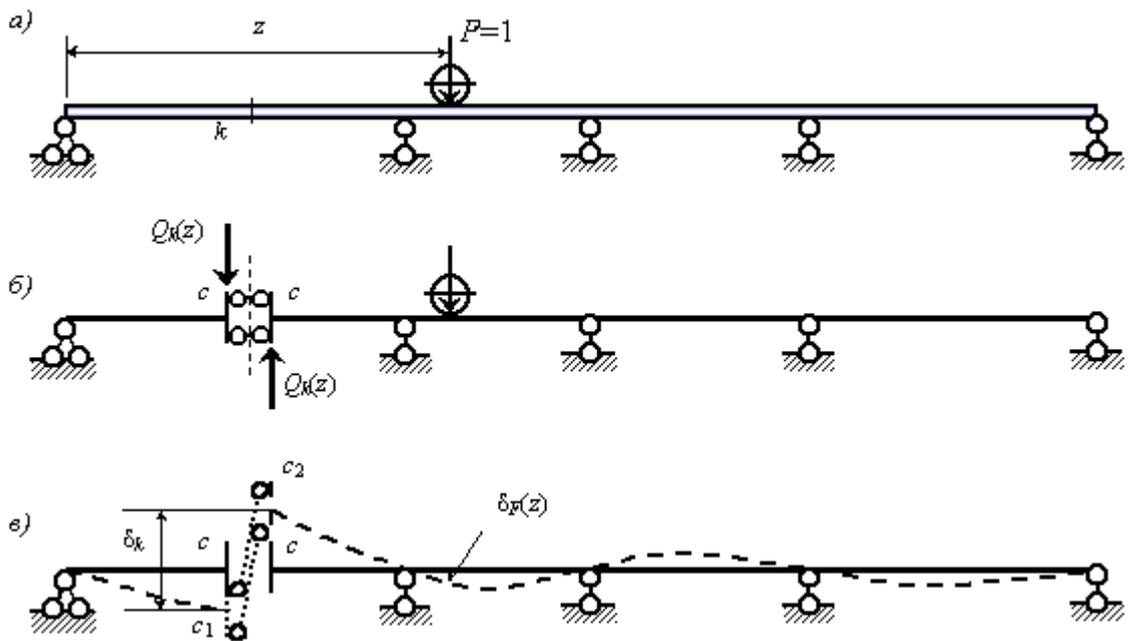
Так как сила  $P=1$ , то

$$R_2(z) = \delta_P(z) / \delta_2 \quad (1)$$

Поскольку при  $z = l_1$   $\delta_P(z) = \delta_2$ , то при этой позиции подвижного груза  $R_2 = 1$ . Если  $z = l_1 + l_2$ ,  $z = l_1 + l_2 + l_3$ ,  $z = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$  (подвижный груз находится на опорах 3, 4), то  $\delta_P(z) = 0$ . Следовательно, эпюра перемещений (рис. 3) является моделью линии влияния опорной реакции  $R_2$ ; ординаты ее равны прогибам балки  $\delta_P(z)$ , поделенным на  $\delta_2$ .

Построим ЛВ поперечной силы в сечении  $k$  (рис. 4, а).

Для этого необходимо построить эпюру прогибов от единичного смещения по направлению исключенной связи, как показано на рис. 4, б.



а – заданная схема; б – схема с исключенной связью; в – эпюра прогибов

Рис. 4. Построение линии влияния поперечной силы Q

В сечении условно вводится шарнирно подвижная связь.

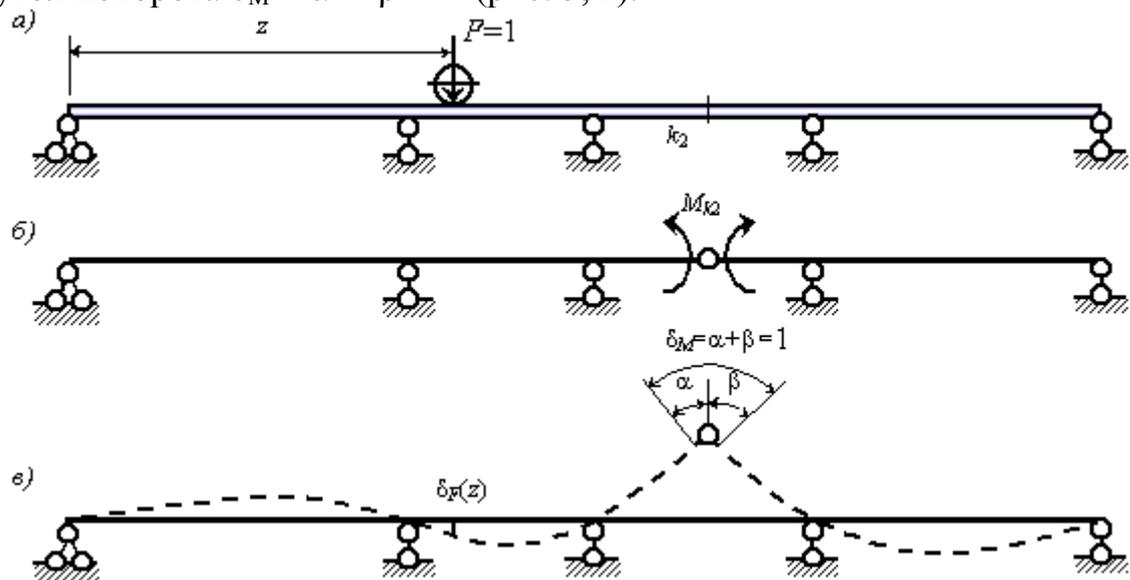
Работа сил на возможных перемещениях для рассматриваемой системы, находящейся в равновесии при показанном на схеме положении подвижного груза  $P=1$  запишется в виде:

$$P \cdot \delta_P(z) + Q_k(z) \cdot \delta_k = 0$$

откуда

$$Q_k = - P \cdot \delta_P(z) / \delta_k \quad (2)$$

При определении изгибающего момента в сечении  $k_2$  (рис. 5, а) удаляем моментную связь в этом сечении, для чего жесткую связь в сечении  $k_2$  заменяем шарнирной (рис. 5, б), и задаем обобщенное перемещение (в данном случае угловое) – взаимный угол поворота  $\delta_M = \alpha + \beta = 1$  (рис. 5, в).



а – заданная схема; б – схема с исключенной связью; в – эпюра прогибов

Рис. 5. Построение линии влияния изгибающего момента M

Из условия равновесия балки по принципу возможных перемещений

$$M_{k_2} \cdot \delta_M + P \cdot \delta_P(z) = 0$$

определяем:

$$M_{k_2} = - P \cdot \delta_P(z) / \delta_M \quad (3)$$

Поскольку в выражениях (1), (2), (3) знаменатель является постоянной величиной, то эпюру прогибов от единичного обобщенного смещения по направлению искомого усилия следует считать линией влияния этого усилия.

Однако вычисление прогибов в статически неопределимой балке с несколькими лишними связями является сложной задачей. Поэтому кинематический способ построения линий влияния используется для построения моделей линий влияния усилий.

Модели линий влияния позволяют решить важную задачу об опасном нагружении многопролетной балки временной нагрузкой при определении экстремальных усилий.

Так в балке, представленной при определении опорных реакций (рис. 3), наибольшее значение опорной реакции  $R_2$  получается при нагружении первого, второго и четвертого пролетов. Наибольший положительный момент в сечении  $k_2$  балки (рис. 5) получается при нагружении временной нагрузкой первого и третьего пролетов, наибольший отрицательный – при нагружении второго и четвертого пролетов.

## Тема 5. Линия влияния при узловой передаче нагрузки и определение усилий по линиям влияния

*Линии влияния при узловой передаче нагрузки. Построение линий влияния для многопролетных балок.*

В некоторых сооружениях нагрузка на их несущую часть может передаваться через вспомогательные балки. Например, такая конструктивная схема часто используется в мостах: там на главную балку накладываются поперечные балки, а на них – настил (рис. 1 а). В этих случаях основная балка называется главной балкой; балки, расположенные перпендикулярно к главной называются поперечными; верхние однопролетные балки, к которым непосредственно прикладывается нагрузка называются продольными (вспомогательными).

Такой способ передачи нагрузки на главную балку называется узловым, а сечения главной балки, в которых примыкают поперечные балки называются узлами. Участок балки между двумя соседними узлами называют панелью.

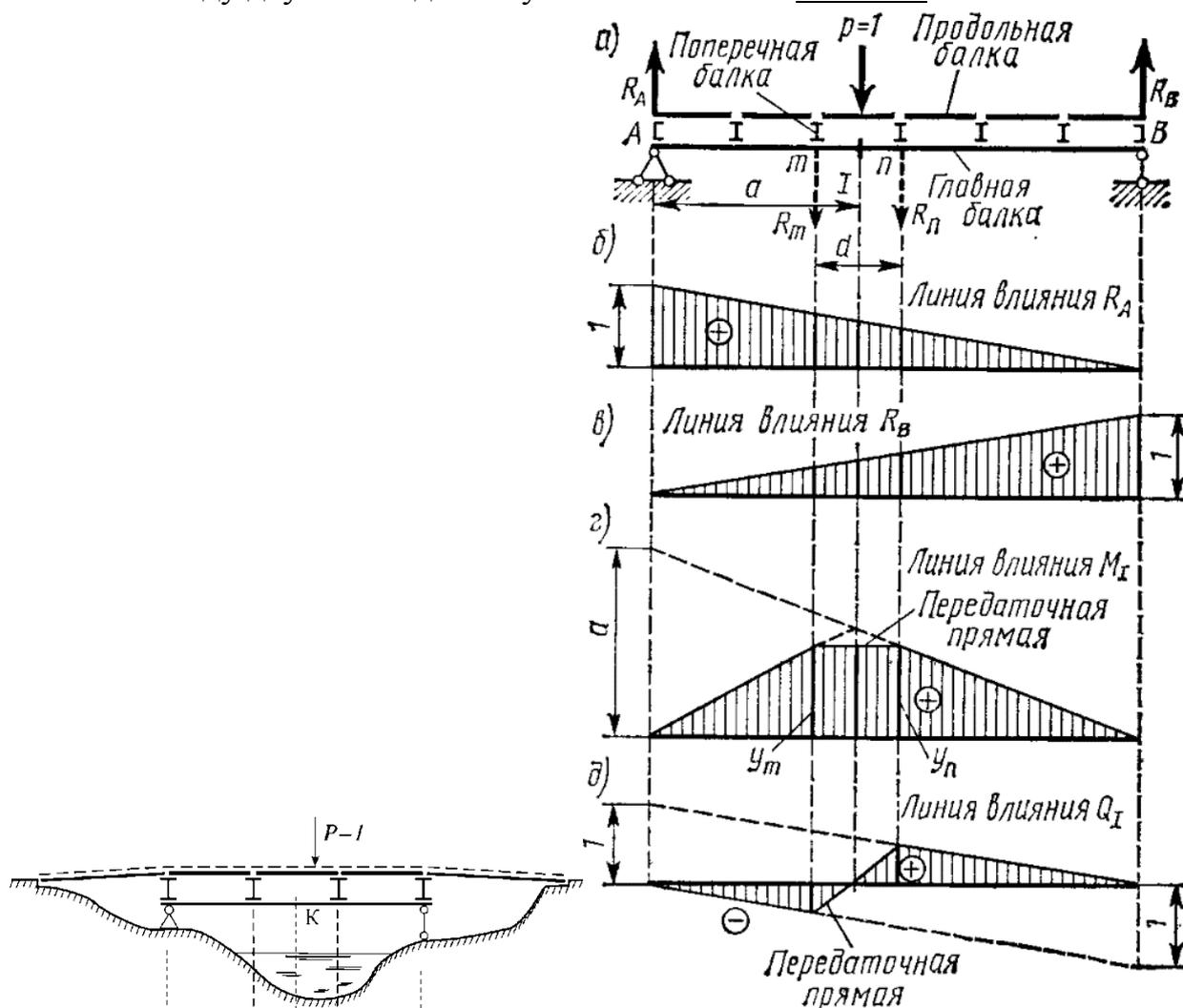


Рис. 1

Действие груза  $P$ , приложенного к продольной балке, передается на главную только в узлах, в которых расположены поперечные балки, поддерживающие данную продольную. На числовую величину опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  главной балки узловая передача нагрузки не влияет

Если бы нагрузка действовала только на главную балку, ЛВ момента  $M_K$  строилась как для простой балки. Поэтому, когда единичная сила находится над поперечными балками, ординаты ЛВ будут такими же. Но, когда единичная

находится между поперечными балками, ЛВ представляет собой прямую, соединяющую вершины крайних узловых ординат ЛВ рассматриваемой панели.

Порядок построения линии влияния при узловой передаче нагрузки:

1) Строится линия влияния без учета узловой передачи нагрузки (как если нагрузка приложена к главной балке);

2) На построенной линии влияния отмечаются узловые ординаты рассеченной панели (панели, имеющей сечение, для которого строится линия влияния) и эти ординаты соединяются прямой линией – передаточной прямой.

При построении ЛВ для многопролетных балок расчет начинается с балки, которой принадлежит рассматриваемое сечение, и только затем единичный груз перемещают по остальным элементам многопролетной балки, причем усилия от единичной нагрузки с основных балок передаются на вспомогательные. На вспомогательных балках ЛВ строится как при узловой передаче нагрузки.

*Определение усилий по линиям влияния. Свойство прямолинейности участка линии влияния.*

При определении усилий по ЛВ рассматривается действие двух видов нагрузки:

1) сосредоточенная сила; 2) равномерно распределенная нагрузка.

Пусть ЛВ какого-то усилия  $S$  определяется уравнением  $y=f(x)$ .

Действие сосредоточенной силы (рис. 2 а).

Если система упругая, то внутреннее усилие прямо пропорционально нагрузке. Поэтому  $S=Py$ . Если же действует несколько сил, то внутреннее усилие определяется по принципу суперпозиции (независимости действия сил):  $S=\sum P_i y_i$ , где  $y_i$  – ордината на эпюре под сосредоточенной силой.

Действие распределенной нагрузки (рис. 2 б).

Если рассматривать элементарную силу  $q(x)dx$  как сосредоточенную силу, то

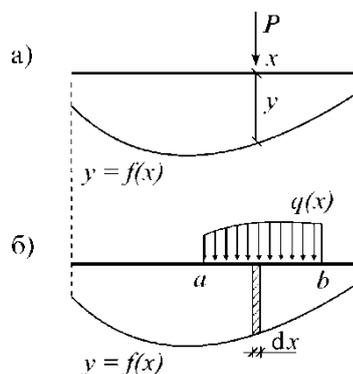


Рис. 2

$$S = \int_a^b q(x)y dx.$$

Когда же распределенная нагрузка постоянна, т.е.  $q(x)=q=const$ , то

$$S = q \int_a^b y dx = q \omega. \quad (1)$$

где  $\omega$  – площадь фигуры, образованной линией влияния и нейтральной осью под соответствующей распределенной нагрузкой.

Если распределенная нагрузка расположена над ЛВ, состоящей из нескольких участков разных знаков, то усилие равно произведению интенсивности нагрузки на алгебраическую сумму площадей отдельных участков ЛВ:

$$S=q(\omega l + \omega^2 + \omega n)$$

Усилие от изгибающего момента учитывается по формуле

$$S=M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i.$$

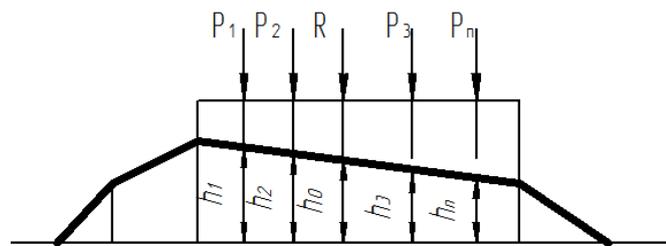
$M_i, \operatorname{tg} \alpha_i$  - значения изгибающего момента и тангенса угла наклона линии влияния момента к нейтральной оси в месте приложения изгибающего момента.

Если на сооружение действует несколько сосредоточенных сил, моментов и распределенных нагрузок, то по принципу суперпозиции

$$S=\sum P_i y_i + \sum q_j \omega_j + \sum M_k \operatorname{tg} \alpha_k.$$

Сосредоточенная сила и распределенная нагрузка – положительны, если совпадают с направлением единичного усилия (сверху вниз). Изгибающий момент – положителен, если направлен по часовой стрелке, тангенс – положителен, если часть линии влияния, на которой приложен момент, до ее совмещения с нейтральной осью надо повернуть по часовой стрелке, при этом угол поворота должен быть меньше  $90^\circ$ . Значения ординат и площадей линии влияния берутся со своими знаками.

*Свойство прямолинейности участка линии влияния* - усилие от сосредоточенных сил и распределенной нагрузки, расположенных над прямолинейным участком линии влияния, может быть определено умножением равнодействующей силы  $R$  на ординату  $h_0$  линии влияния под этой силой.



$$P_1 \cdot h_1 + P_2 \cdot h_2 + P_3 \cdot h_3 + P_n \cdot h_n = R \cdot h_0$$

## Тема 6. Невыгоднейшее положение подвижной нагрузки. Матрица влияния

Определение невыгоднейшего положения различного вида подвижных нагрузок по линиям влияния.

Расположение нагрузки на сооружении, при котором она вызывает наибольшее значение рассматриваемого усилия называется невыгоднейшим или опасным.

I. Действие на сооружение подвижной равномерно распределенной нагрузки.

В соответствии с формулой  $S = q \cdot \omega$  максимальное значение усилия получится при наибольшем значении площади  $\omega$ , а это будет если нагрузка  $q$  расположится над всей площадью линии влияния одного знака.

На рис. 1, а показано загрузение соответствующее  $Q_{\max}$ , т.е. загружена положительная часть ЛВ, на рис. 1, б показано загрузение соответствующее  $Q_{\min}$ , т.е. загружена отрицательная часть ЛВ.

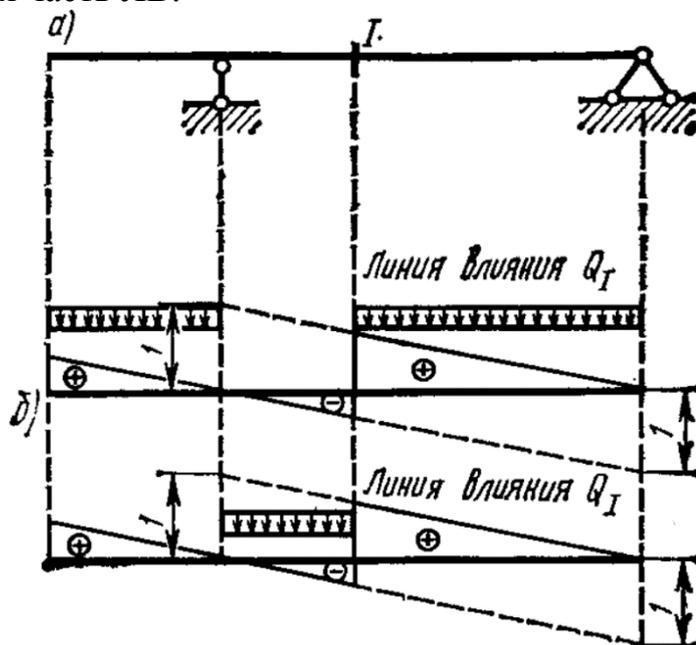
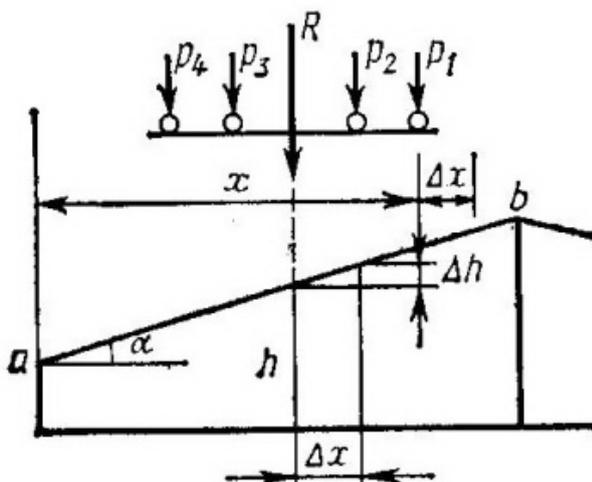


Рис. 1

II. Действие системы сосредоточенных подвижных жестко связанных сил.

Система сосредоточенных подвижных жестко связанных сил моделирует движение поезда. Если все грузы находятся на прямолинейном участке ЛВ, то их можно заменить равнодействующей  $R$ .

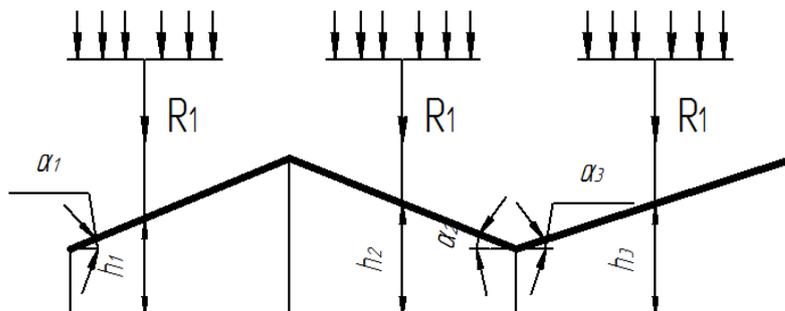


Если система грузов переместилась на расстояние  $\Delta x$ , но ни один груз не сошел с участка  $ab$ , то равнодействующая  $R$  тоже переместится на  $\Delta x$  и ордината по ней изменится на  $\Delta h$ :  $\Delta h = \Delta x \operatorname{tg} \alpha$

Соответственно, усилие получит приращение:

$$\Delta S = R \Delta h = R \Delta x \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

В общем случае, когда загружено несколько участков ЛВ, всю нагрузку равнодействующей заменить нельзя, но можно это сделать на каждом участке:



$$S = \sum_{i=1}^n R_i h_i$$

Если нагрузка переместится на расстояние  $\Delta x$  так, что все грузы останутся на своих участках, то их равнодействующие не изменятся, а усилие  $S$  получит приращение

$$\Delta S = \Delta x (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + R_3 \operatorname{tg} \alpha_3) = \Delta x \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (2)$$

Откуда

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (3)$$

Из формулы (2) следует, что приращение усилия линейно и зависит от  $\Delta x$  пока ни один груз не перейдет через вершину ЛВ. Критерием достижения  $S_{\max}$  будет изменение знака правой части выражения (3) при переезде грузов через одну вершину ЛВ или обращения в 0 этой суммы (соответствует горизонтальной линии на рис.2). Критерий не является корректным, т.к. показывает только локальный максимум, на практически этого бывает достаточно.

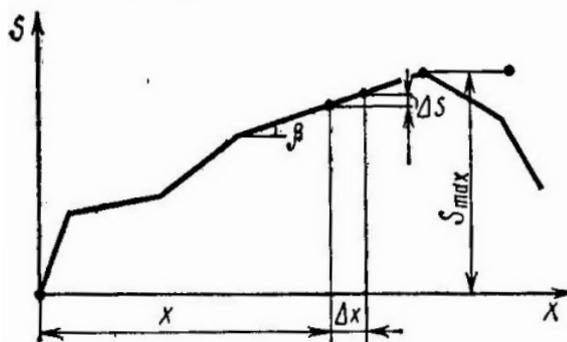


Рис. 2

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Наиболее частым является случай загрузки треугольной линии влияния (рис 3), тогда правая часть выражения (3) записывается в виде

$$R_{лев} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{лев} - R_{пр} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{пр} = \frac{R_{лев} \cdot y}{a} - \frac{R_{пр} \cdot y}{b} = \left( \frac{R_{лев}}{a} - \frac{R_{пр}}{b} \right) \cdot y$$

Знак данной зависимости не зависит от величины  $y$  и задача нахождения опасного нагружения сводится к определению того груза, переход которого через вершину ЛВ изменяет знак величины  $\frac{R_{лев}}{a} - \frac{R_{пр}}{b}$ . Этот груз называется критическим.

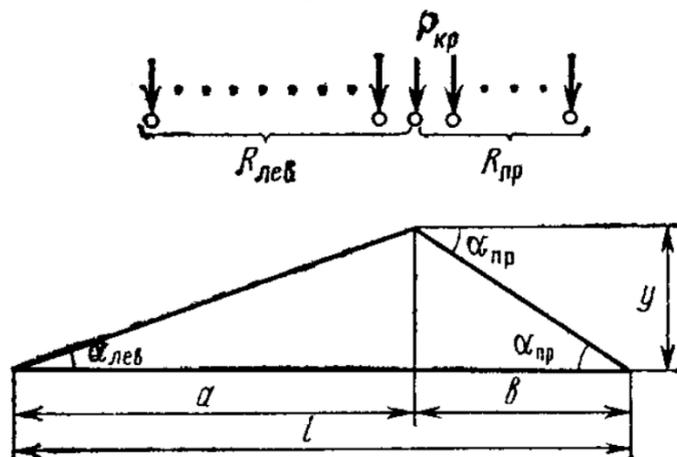


Рис. 3

Задачу нахождения критического груза можно сформулировать иначе. Допустим этот груз найден, тогда его можно разделить на две части, включив одну часть в  $R_{лев}$ , а другую – в  $R_{пр}$ , так чтобы  $\frac{R_{лев}}{a} - \frac{R_{пр}}{b} = 0$ . В этом случае  $\frac{R_{лев}}{R_{пр}} = \frac{a}{b}$ . Т.е. задач невыгодного нагружения упростилась до решения системы уравнений:

$$\frac{R_{лев}}{R_{пр}} = \frac{a}{b},$$

$$R = R_{лев} + R_{пр}$$

где  $R$  – полная равнодействующая.

Отсюда:

$$R_{лев} = \frac{R \cdot a}{l}; \quad R_{пр} = \frac{R \cdot b}{l}. \quad (4)$$

Формулы (4) могут быть применены только если поезд располагается над треугольной ЛВ. Т.к. невыгодное положение нагрузки не зависит от ординаты  $y$ , то можно для каждого вида подвижной нагрузки и различных значений  $l$  и  $a/l$  найти  $\bar{S}_{\max}$  при  $y=1$ . Далее действие подвижной нагрузки при невыгодном расположении заменить действием нагрузки, равномерно распределенной по всей длине  $l$ , называемой эквивалентной нагрузкой. Ее интенсивность  $q_3$  определяется исходя из следующей зависимости:

$$S_{\max} = y \cdot \bar{S}_{\max} = q_3 \cdot \left( \frac{1}{2} l \cdot y \right)$$

$$q_3 = \frac{2 \cdot \bar{S}_{\max}}{l}$$

При выполнении расчета инженер пользуется табличными значениями  $q_3$  и максимальное усилие определяется по формуле

$$S_{\max} = q_0 \cdot \omega$$

где  $\omega$  – площадь фигуры образованной ЛВ.

*Матрица влияния.*

При проведении расчетов с использованием ЭВМ применяются матрицы влияния (матрица, элементы которой являются ординаты линий влияния).

Например, задана балка (рис. 4, а).

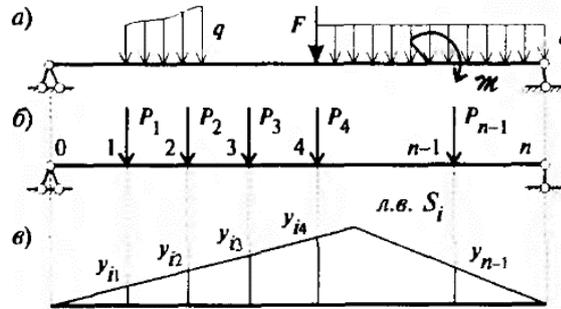


Рис. 4

Заданную систему заменяем дискретной схемой, для чего вводим сечения  $i=1,2,3\dots n$ , в которых необходимо вычислить усилия  $S_i$ . При этом распределенную нагрузку заменяем сосредоточенными силами, а момент – парой сил:  $P^T=(P_1, P_2, P_3\dots P_n)$  (рис. 4, б).

Далее строятся линии влияния для введенных сечений  $i=1,2,3\dots n$  (рис. 4, в). Согласно принципу независимости действия сил для каждого  $i$ -го сечения можно составить выражение искомого усилия в виде:

$$S_i = y_{i1} \cdot P_1 + y_{i2} \cdot P_2 + \dots + y_{in} \cdot P_n = \sum_{k=1}^n y_{ik} \cdot P_k$$

где  $y_{ik}$  – значение искомого усилия в  $i$ -м сечении от единичной силы  $P_k=1$ , приложенной в  $k$ -й точке.

Вводят вектор  $S^T=(S_1, S_2, S_3\dots S_n)$  и матрицу  $L_S$ , элементами которой являются ординаты линий влияния:

$$L_S = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

Эта матрица называется матрицей влияния усилия  $S$ . При помощи введенных обозначений эту матрицу можно записать в виде:

$$S = L_S \cdot P$$

На практике вначале строится матрица влияния изгибающих моментов  $L_M$ . Затем, используя формулу  $Q = \frac{dM}{dx}$ , осуществить переход от матрицы влияния изгибающих моментов к матрице влияния поперечных сил.

Преобразованная матрица моментов может быть получена путем перемножения матриц:

$$L_Q = K_{QM} \cdot L_M$$

где  $K_{QM}$  – матрица коэффициентов для преобразования матрицы влияния моментов  $L_{MB}$  матрицу влияния поперечных сил и имеет следующий вид с соответствующей матрице  $L_M$  размерностью.

$$K_{QM} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## Тема 7. Расчет трехшарнирных систем

Образование трехшарнирных систем. Сопоставление трехшарнирной системы с балкой.

Трехшарнирная система – это система из двух дисков, связанных между собой и основанием тремя шарнирами.

Трехшарнирные системы бывают двух видов: арочные (рис. 1 а) и подвесные системы (рис. 1 б).

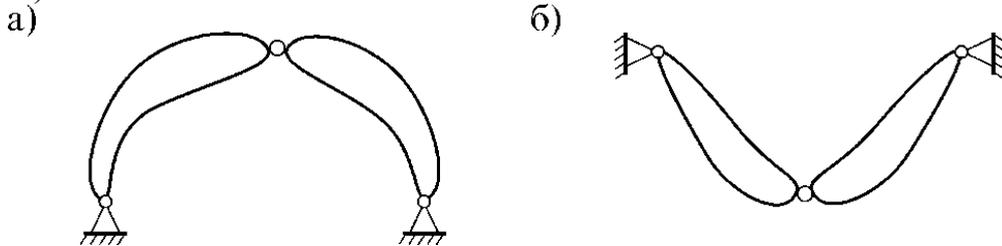


Рис. 1

Их расчет мало отличается друг от друга. Поэтому остановимся на арочных системах, которые бывают трех типов: трехшарнирные рамы (рис. 2 а), трехшарнирные арочные фермы (рис. 2 б) и трехшарнирные арки (рис. 2 в):

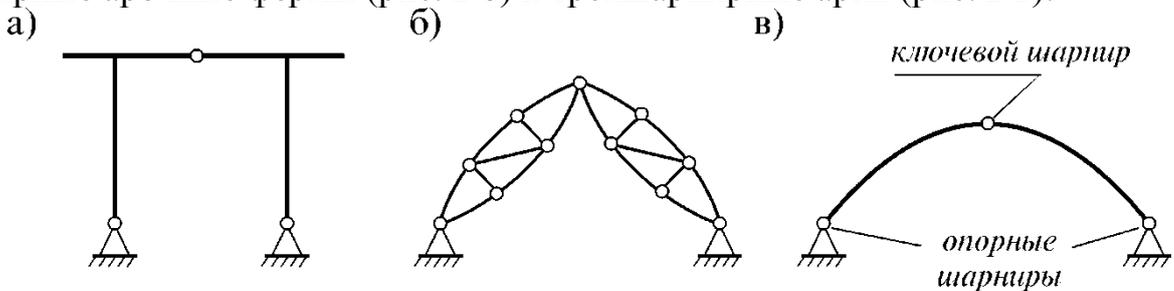
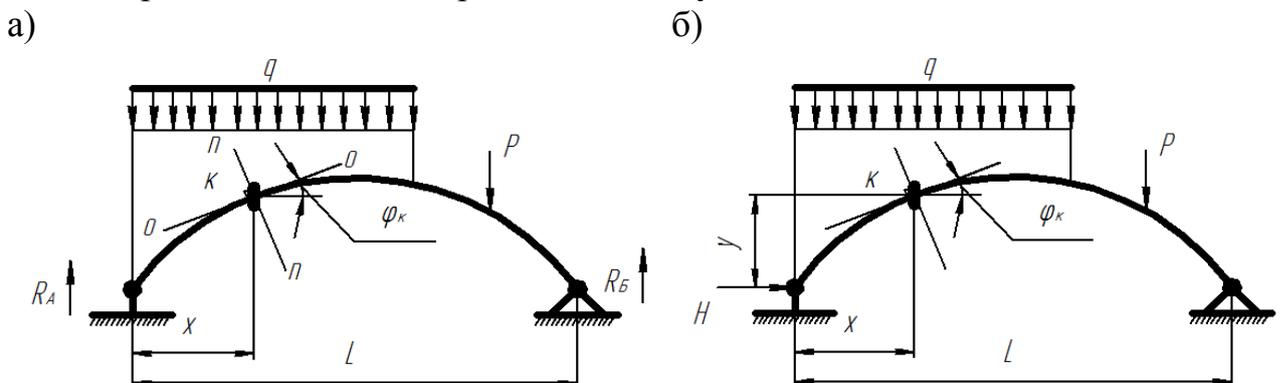


Рис. 2

Особенность трехшарнирных систем состоит в том, что в них возникает распор (горизонтальная реакция) даже от вертикальной нагрузки.

Докажем, что арочные системы по сравнению с балочными экономически более выгодны. Рассмотрим балку прямоугольного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$  с кривой осью. Рассмотрим сечение  $k$  с координатами  $x$  и  $y$ .



Изгибающий момент в сечении  $k$ :

$$M_k = R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

Для определения продольной силы  $N_k$  в сечении спроецируем все силы, лежащие левее сечения  $k$  на касательную о-о к этому сечению:

$$N_k = -R_A \cdot \sin \varphi_k + q \cdot x \cdot \sin \varphi_k$$

Под действием  $M_k$  и  $N_k$  возникают нормальные напряжения:

$$\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W}$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения балки, равный  $bh$ ;

$W$  – момент сопротивления сечения балки, равный  $bh^2/6$ .

Рассмотрим, как изменяются нормальные напряжения в сечении  $k$ , если на подвижной опоре  $A$  приложить горизонтальную силу  $H$ , направленную вправо.

Изгибающий момент при этом уменьшится на  $H \cdot y$ :

$$M_k = (R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}) - H \cdot y$$

Продольная сила увеличится на  $H \cdot \cos \varphi_k$

$$N_k = (-R_A \cdot \sin \varphi_k + q \cdot x \cdot \sin \varphi_k) - H \cdot \cos \varphi_k$$

Т.о., нормальные напряжения в сечении  $k$  увеличатся из-за увеличения продольной силы на:

$$\frac{H \cdot \cos \varphi_k}{F} = \frac{H \cdot \cos \varphi_k}{b \cdot h}$$

и уменьшатся в результате уменьшения изгибающего момента.

$$\frac{H \cdot y}{W} = \frac{6 \cdot H \cdot y}{b \cdot h^2}$$

Т.к. их отношение:

$$\frac{6 \cdot H \cdot y}{b \cdot h^2} \cdot \frac{H \cdot \cos \varphi_k}{b \cdot h} = \frac{6y}{h \cdot \cos \varphi_k}$$

Вертикальная нагрузка, действующая на балку, вызывает перемещение подвижной опоры влево, а сила  $H$  перемещает ее вправо. Числовую величину  $H$  можно подобрать, так чтобы опора  $A$  не перемещалась, т.е. силу  $H$  можно рассматривать как горизонтальную реакцию шарнирно-неподвижную опору.

### *Определение опорных реакций и внутренних сил*

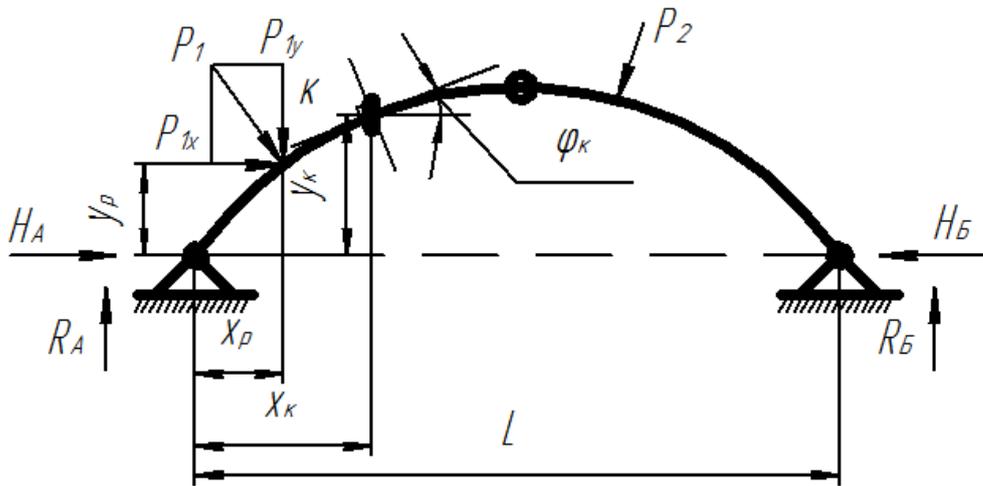
Опорные реакции трехшарнирной арки можно определять из уравнений статики.

$$\sum_{i=1}^n Y = 0, \quad \sum_{i=1}^n X = 0, \quad \sum_{i=1}^n M = 0$$

Кроме трех уравнений равновесия (относительно опор) для расчета трехшарнирной арки можно составить четвертое уравнение – алгебраическая сумма моментов сил, действующих на левую или правую половину арки относительно точки  $C$  (среднего шарнира), равняется нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n M_{лев.сил}^C = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{прав.сил}^C = 0$$

Изгибающий момент, действующий в сечении, равен алгебраической сумме моментов всех внешних левых сил относительно центра тяжести данного сечения или сумме моментов правых сил, взятой с обратным знаком. Изгибающий момент считается положительным, если левые силы стремятся вращать арку относительно данного сечения по ходу часовой стрелки.



$$M_k = R_A \cdot x_k - H_A \cdot y_k - P_{y1}(x_k - x_p) - P_{x1}(y_k - y_p)$$

Поперечная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси бруса в данном сечении. Поперечная сила считается положительной, если проекции левых сил направлены вверх от оси арки.

$$Q_k = R_A \cdot \cos \varphi_k - H_A \cdot \sin \varphi_k - P_{y1} \cdot \cos \varphi_k - P_{x1} \cdot \sin \varphi_k$$

Продольная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на касательную к оси бруса в данном сечении. Продольная сила считается положительной, если в сечении арки она вызывает растяжение.

$$N_k = -R_A \cdot \sin \varphi_k - H_A \cdot \cos \varphi_k + P_{y1} \cdot \sin \varphi_k - P_{x1} \cdot \cos \varphi_k$$

## Тема 8. Рациональное очертание оси арки

Многоугольник давления.

Кроме аналитических методов расчета арок существует графический способ. Рассмотрим пример (рис. 1, а):

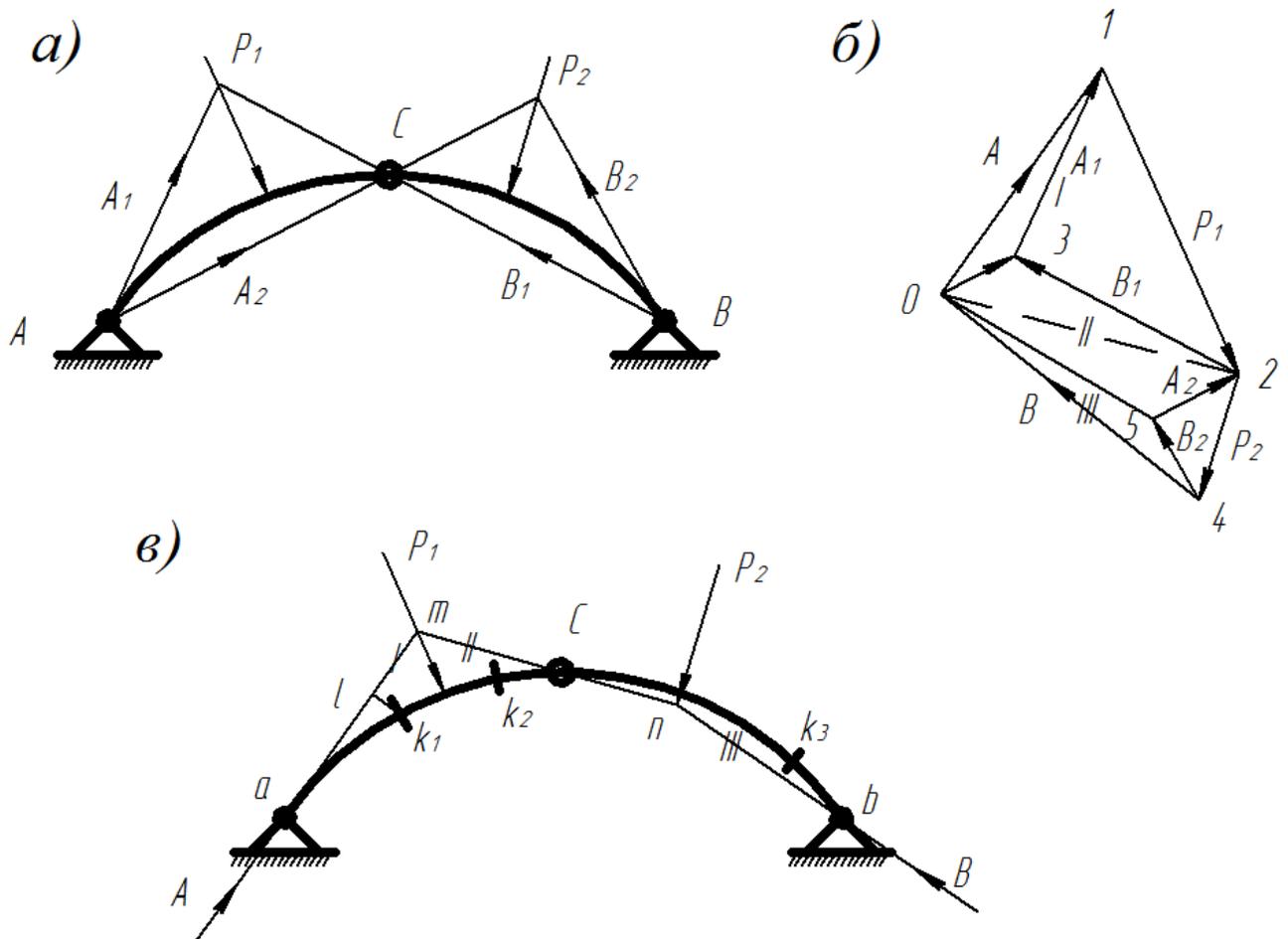


Рис. 1

Определим реакции от силы  $P_1$ . Реакция  $B_1$  должна пройти через правый опорный шарнир  $B$  и шарнир  $C$ , поскольку в этом случае правая часть арки будет находиться в равновесии. На левой опоре арки от действия силы  $P_2$  возникает реакция  $A_2$ , которая определяется аналогично.

Из курса теоретической механики известно, что три силы, действующие на диск и находящиеся в равновесии, пересекаются в одной точке. От действия силы  $P_1$  возникают реакции  $A_1$  и  $B_1$ , а от действия силы  $P_2$  – реакции  $A_2$  и  $B_2$ . Исходя из этого определяем направление реакций  $A_1$  и  $B_2$  и строим силовой многоугольник (рис. 1, б).

Построим многоугольник давления (рис. 1, в), с помощью которого можно определить внутренние усилия  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ .

Продолжим левую опорную реакцию  $A$  до пересечения с силой  $P_1$ . Затем через точку их пересечения проведем прямую  $m-n$ , параллельную лучу II силового многоугольника (луч II – линия действия равнодействующей сил  $A$  и  $P_1$ ). Через точку  $p$  проводим прямую, параллельную лучу III, которая является равнодействующей сил  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ .

Любая из сторон многоугольника давления  $amnb$  представляет собой линию действия равнодействующей всех сил, расположенных левее (или правее) данного

сечения (левее сечения  $k_1$  действует только реакция  $A$ , левее сечения  $k_2$  – реакция  $A$  и сила  $p_1$ , слева  $k_3$  –  $A, P_1, P_2$ ). Числовая величина равнодействующей в каждом сечении определяются с помощью силового многоугольника путем измерения в масштабе сил.

Изгибающий момент определяется умножением равнодействующей (левых или правых) сил на ее плечо относительно центра тяжести сечения.

$$M_{k1} = A \cdot l$$

где  $A$  – величина равнодействующей.

$l$  – плечо, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения на равнодействующую (левых или правых) сил.

Для определения продольной и поперечной сил, действующих в сечении, равнодействующую разлагают на две составляющие – параллельную касательной к оси арки в этом сечении – продольная сила (6-1, рис. 1 в), и нормальную к этой касательной – поперечная сила (0-6, рис. 1 в).

В случае действия на арку системы сосредоточенных сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  построение многоугольника давления производят в следующем порядке:

- 1) находится равнодействующая всех внешних сил (без опорных реакций), действующих на левую половину арки;
- 2) находится равнодействующая всех внешних сил (без опорных реакций), действующих на правую половину арки;
- 3) определяются опорные реакции;
- 4) строится силовой многоугольник и многоугольник давления.

*Кривая давления. Рациональное очертание оси арки.*

При действии на арку распределенной нагрузки многоугольник давления превращается в кривую давления.

Если арке придать очертание, при котором ее ось совпадает с многоугольником давления от заданной нагрузки, то в такой арке не возникнут изгибающие моменты и поперечные силы. Такое очертание оси арки называется рациональным. В этом случае арка работает исключительно на сжатие, что весьма выгодно для бетонных сооружений.

Если ось арки и кривая давления определяются в соответствии с уравнениями

$$y = f(x), \quad \eta = \varphi(x)$$

То условием того, что ось арки имеет рациональное очертание, является тождество:  $y = \eta$

Составим выражение момента левых сил (рассматриваем случай действия только вертикальных нагрузок) относительно точки  $C$  кривой давления:

$$M_c = R_A \cdot x - H_A \cdot \eta - \sum P \cdot p = 0$$

$$\eta = \frac{R_A \cdot x - \sum P \cdot p}{H_A}$$

Числитель равен изгибающему моменту в простой балке в сечении с абсциссой  $x$ :

$$\eta = \frac{M_x^0}{H_A}$$

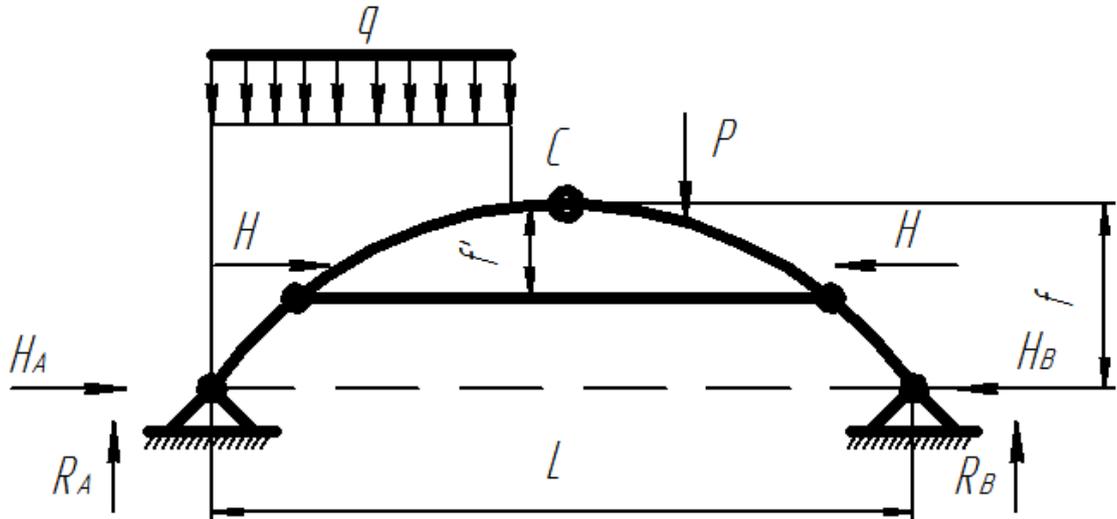
Используя соотношение  $y = \eta$  получаем уравнение рациональной оси арки:

$$y = \frac{M_x^0}{H_A}$$

Следовательно, при вертикальной нагрузке ось арки будет рациональной, если ее очертание меняется по закону изменения балочного момента.

*Трехшарнирные арки и рамы с затяжкой.*

Трехшарнирная арка с затяжкой характеризуется наличием затяжки, одной шарнирно-подвижной и одной шарнирно-неподвижной опор.



Уравнения равновесия:

$$\sum F_y = \sum F_V^{BH} + R_A + R_B$$

$$\sum F_x = \sum F_H^{BH} + H_A - H_B$$

$$\sum M_A = \sum M_A^{BH} - R_B \cdot L$$

$$\sum M_C^{лев} = -\sum M_C^{BH} - H_A \cdot f + R_A \frac{L}{2} - H \cdot f'$$

Если далее рассматривать распор в затяжке  $H$  как одну из внешних нагрузок, то построение эпюр внутренних усилий можно выполнить аналогично арке без затяжки.

## Тема 9. Построение линий влияния реакций и усилий в трехшарнирных системах

### Линия влияния реакций

Составим уравнение моментов всех сил относительно опор арки (рис. 1, а):

$$\sum M_A = -R_B \cdot L + P \cdot x$$

$$\sum M_B = R_A \cdot L - P \cdot (L - x)$$

Соответственно,

$$R_B = \frac{x}{L}$$

$$R_A = \frac{L - x}{L}$$

Их ЛВ (рис. 1, б, в) не отличаются от ЛВ для простых балок.

ЛВ распора Н определяется из уравнения:

$$H = \frac{M_C^0}{f}$$

ЛВ распора Н (рис. 1, г) имеет вид такой же как и ЛВ момента в простой балке аналогичных размеров арки в точке С и отличается от нее множителем 1/f.

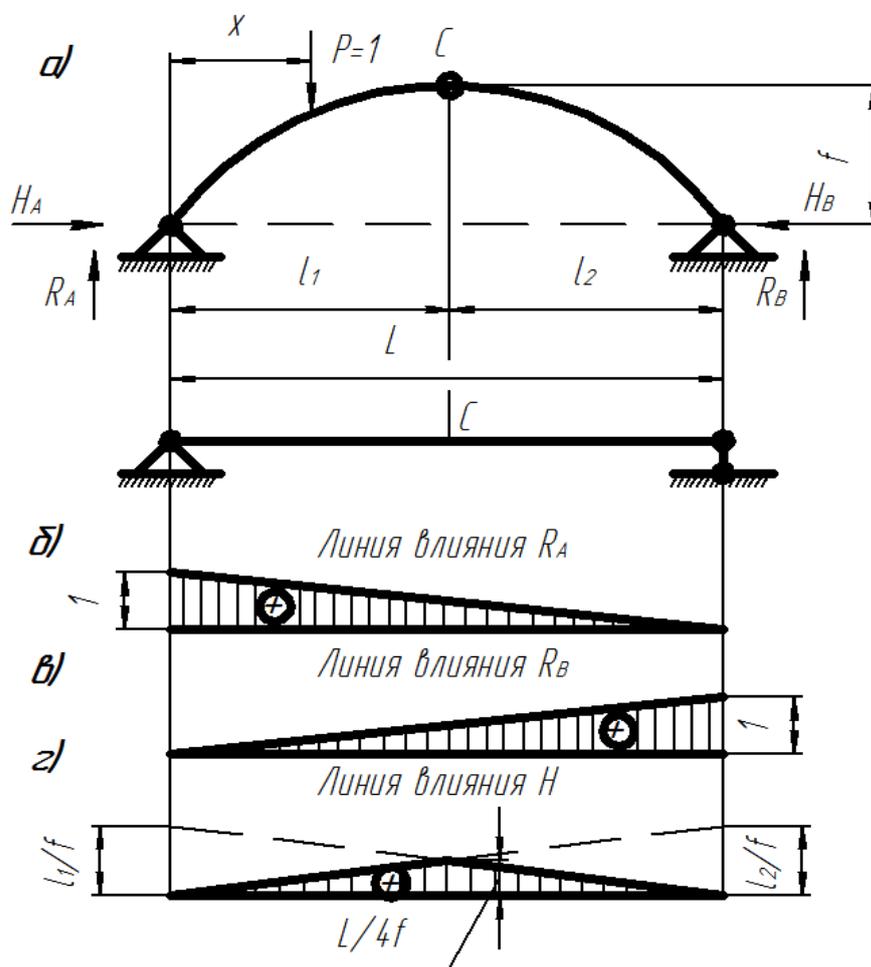


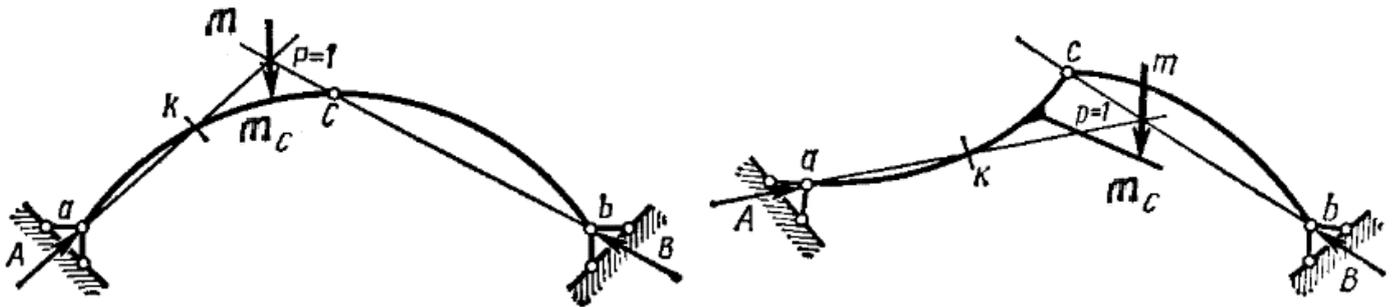
Рис. 1

## Линии влияния внутренних усилий

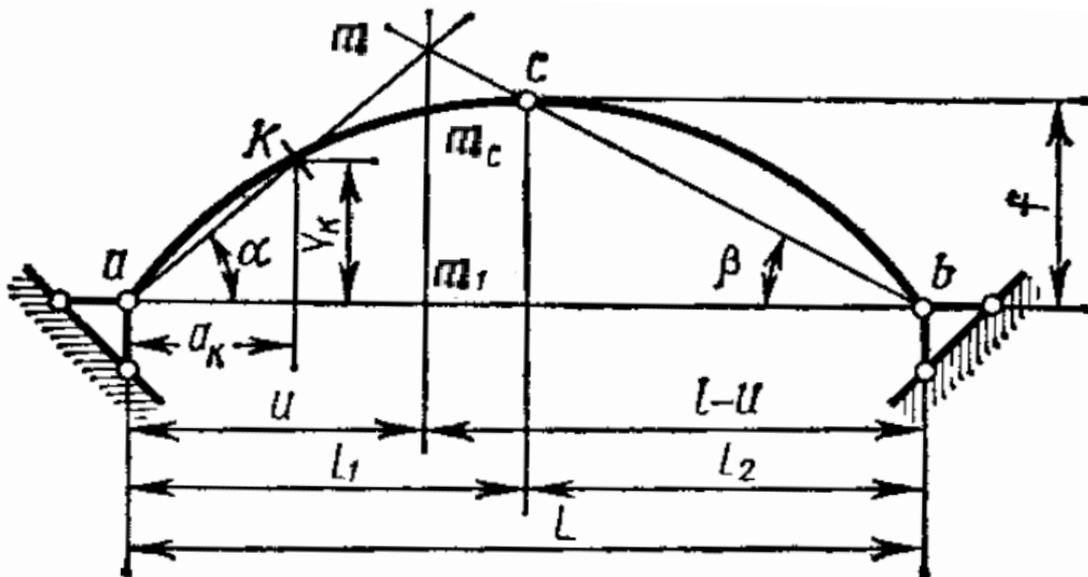
Рассмотрим способы отыскания таких положений груза  $P$  на арке, при которых в исследуемом сечении к момент или поперечная сила или продольная сила равны нулю, т.е. рассмотрим способы отыскания нулевых ординат ЛВ  $M_k$ ,  $Q_k$ ,  $N_k$ .

К таким точкам относятся, в частности, опоры арки, кроме них есть и другие точки, все они называются нулевыми.

При положении груза  $P=1$  в точке  $m_c$  арки изгибающий момент в сечении  $k$  равен нулю, т.к. равнодействующая левых сил (опорная реакция  $A$ ) проходит через сечение  $k$ . Т.о., точка  $m_c$  определяет положение нулевой точки для изгибающего момента в сечении  $k$ . При этом положение силы  $P=1$  определяется пересечением реакций опоры  $B$  (линия  $bc$ ) и  $A$  (линия  $ak$ ).



Определим положение нулевой точки. Для этого обозначим через  $u$  абсциссу нулевой точки для  $M$  в точке  $k$ , т.е. точки  $m_c$ .



Из треугольников  $amm_1$  и  $bmm_1$  следует:

$$mm_1 = u \cdot \operatorname{tg} \alpha = u \frac{y_k}{a_k}$$

$$mm_1 = (L-u) \operatorname{tg} \beta = \frac{(L-u) \cdot f}{l_2}$$

Отсюда:

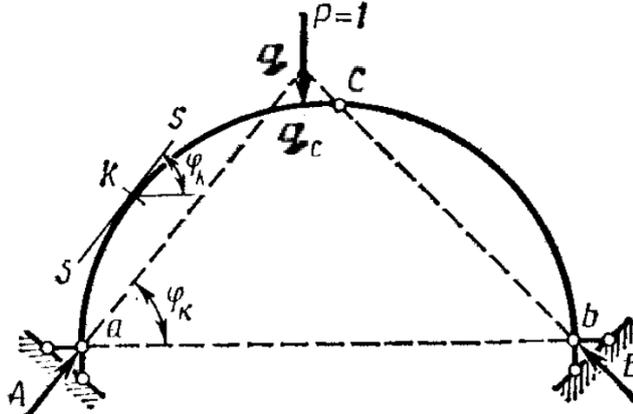
$$u \frac{y_k}{a_k} = \frac{(L-u) \cdot f}{l_2} = \frac{L \cdot f}{l_2} - \frac{u \cdot f}{l_2}$$

$$u \frac{y_k}{a_k} + \frac{u \cdot f}{l_2} = \frac{L \cdot f}{l_2}$$

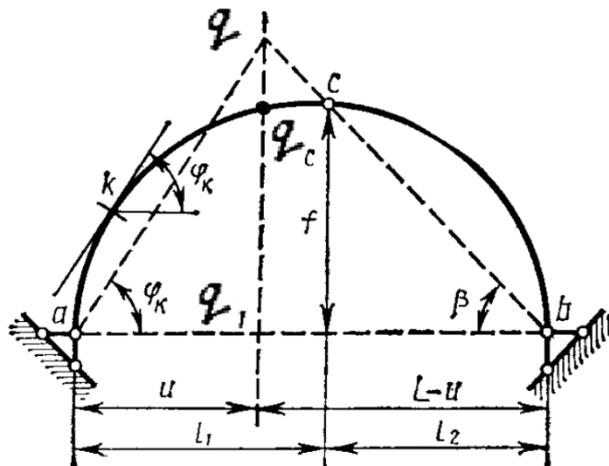
Следовательно:

$$u = \frac{L \cdot f}{l_2 \cdot \left( \frac{y_k}{a_k} + \frac{f}{l_2} \right)} = \frac{L \cdot f \cdot a_k}{y_k \cdot l_2 + a_k \cdot f}$$

С целью определения нулевой точки для  $Q_k$  проводим из левой опоры  $a$  прямую, параллельную касательной  $s$ -ск оси арки в сечении  $k$ , до пересечения в точке  $q$  с направлением  $bc$ . Если силу  $P=1$  приложить в точке  $q_c$ , лежащей на арке под точкой  $q$ , то  $Q_k$  становится равным нулю, поскольку слева от сечения при этом действует только опорная реакция  $A$ , параллельная касательной  $s$ -s.



Определим абсциссу нулевой точки:



Из треугольников  $aq_1$  и  $bq_1$  следует:

$$qq_1 = u \cdot \operatorname{tg} \varphi_k$$

$$qq_1 = (L-u) \operatorname{tg} \beta = (L-u) \frac{f}{l_2}$$

Отсюда:

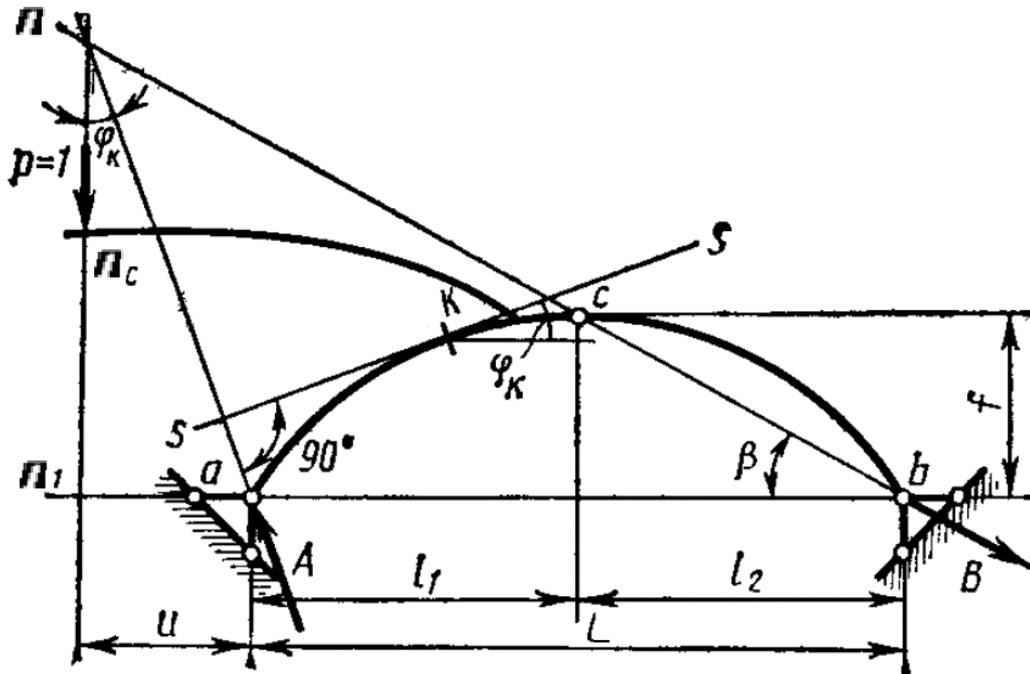
$$u \cdot \operatorname{tg} \varphi_k = (L-u) \frac{f}{l_2} = L \cdot \frac{f}{l_2} - u \cdot \frac{f}{l_2}$$

Следовательно:

$$u = \frac{L \cdot f}{l_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_k + f}$$

Продольная сила в сечении  $k$  равна нулю при положении груза  $P=1$ , расположенном на консоли к арке в точке  $n_c$ , лежащей на одной вертикали с точкой  $n$ , положение которой определяется пересечением прямой, выходящей из опоры  $a$  и перпендикулярной касательной  $s-s$  к арке в точке  $k$ , с прямой  $bc$ .

Определим абсциссу нулевой точки:



Из треугольников  $ann_1$  и  $bnn_1$  следует:

$$nn_1 = u \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k$$

$$nn_1 = (u + L) \operatorname{tg} \beta = (u + L) \frac{f}{l_2}$$

Отсюда:

$$u \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k = (u + L) \frac{f}{l_2} = L \cdot \frac{f}{l_2} + u \cdot \frac{f}{l_2}$$

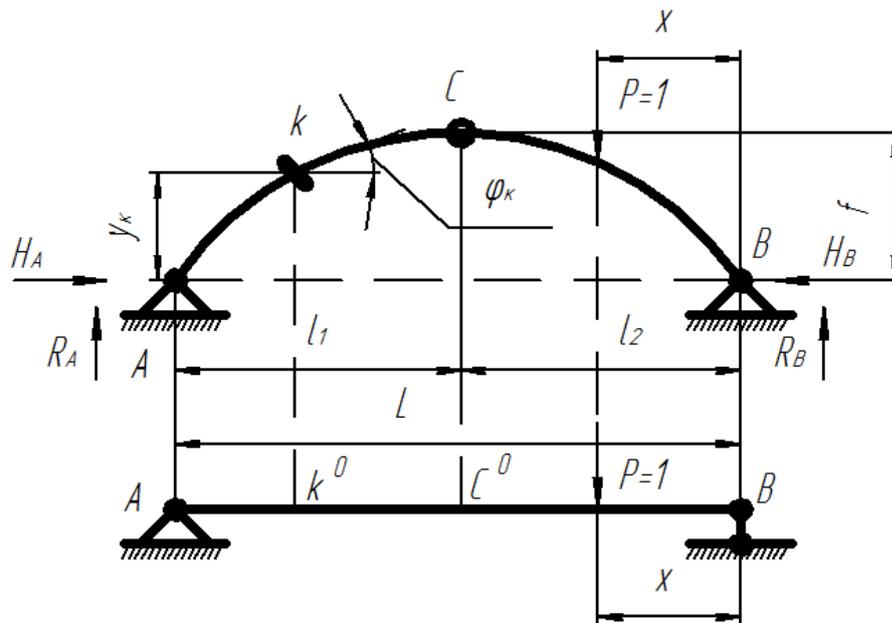
Следовательно:

$$u = \frac{L \cdot f}{l_2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k - f}$$

Переходим к построению ЛВ  $M_k$ ,  $Q_k$ ,  $N_k$ .

ЛВ  $M_k$  определяется формулой:

$$M_k = M_k^0 - H \cdot y_k = M_k^0 - \frac{M_C^0}{f} \cdot y_k$$



Из этой формулы следует, что ЛВ  $M_k$  является суммой двух ЛВ: ЛВ изгибающего момента для простой двухопорной балки и ЛВ распора, все ординаты которой умножены на  $(-y_k)$ .

ЛВ  $Q_k$  определяется формулой:

$$Q_k = Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k$$

Из этой формулы следует, что ЛВ  $Q_k$  является суммой двух ЛВ: ЛВ поперечной силы для простой двухопорной балки, все ординаты которой умножены на  $(\cos \varphi_k)$ , и ЛВ распора, все ординаты которой умножены на  $(-\sin \varphi_k)$ .

ЛВ  $N_k$  определяется формулой:

$$N_k = -(Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k)$$

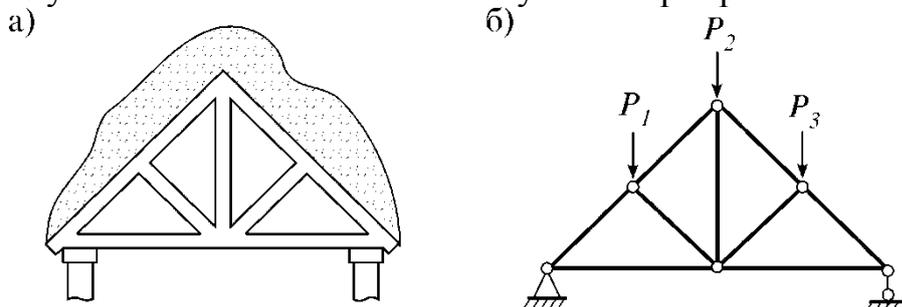
Из этой формулы следует, что ЛВ  $Q_k$  является суммой двух ЛВ: ЛВ поперечной силы для простой двухопорной балки, все ординаты которой умножены на  $(-\sin \varphi_k)$ , и ЛВ распора, все ординаты которой умножены на  $(-\cos \varphi_k)$ .

Если при построении ЛВ  $M_k$ ,  $Q_k$ ,  $N_k$  заранее определить нулевые точки, то можно не производить графического суммирования составляющих ЛВ, а строить их сразу с ординатами, отложенными от оси абсцисс. Этим методом построения ЛВ называется способом нулевой точки.

## Тема 10. Понятие о ферме

### Образование ферм. Классификация ферм.

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирами.



Фермы имеют тоже назначение что и балки сплошного сечения, но применяются для перекрытия значительных расстояний, когда использование балок экономические невыгодно вследствие неполного использования материала балки.

В фермах стержни соединены в узлах посредством болтов или сварки, т.е. жестко. Однако, как показывают сравнительные расчеты при действии на ферму узловой нагрузки усилия в ферме с шарнирными узлами и жесткими узлами мало отличаются. Поэтому будем рассматривать только фермы с идеальными шарнирами.

В таких фермах при узловом действии нагрузки в стержнях будут возникать только сжимающие или растягивающие усилия, а моменты и поперечные силы в них отсутствуют. Поэтому в стержнях шарнирной фермы определяются только продольные усилия.

Расстояние между осями опор фермы называется пролетом.

Стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются поясными и образуют пояс.

Стержни, соединяющие пояса, образуют решетку фермы и называются: вертикальные – стойками, наклонные – раскосами.

Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы называют панелью.

Классификация ферм:

1) По характеру очертания:

- с параллельными поясами (рис. 1, а);
- с параболическим очертанием верхнего пояса (рис. 1, б);
- фермы треугольного очертания (рис. 1, в).

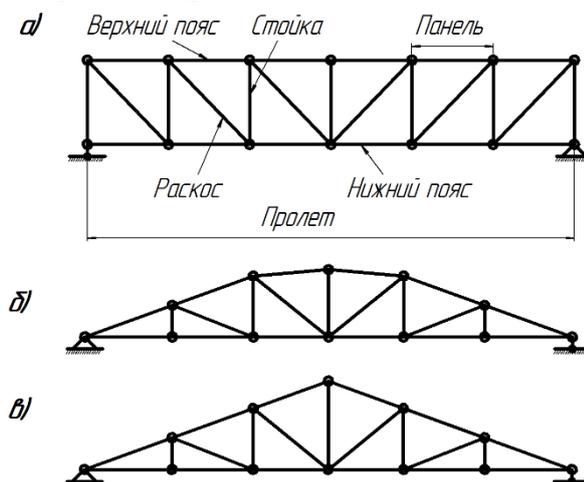


Рис. 1

2) По типу решетки:

- фермы с треугольной решеткой (рис. 2, а);
- фермы с раскосной решеткой (рис. 2, б);
- фермы с полураскосной решеткой (рис. 2, в);
- фермы с ромбической решеткой (рис. 2, г);
- двухрешетчатые (рис. 2, д);
- многорешетчатые (рис. 2, е);

3) По типу опирания:

- балочные (рис. 3, а);
- консольные (рис. 3, б);
- балочно-консольные (рис. 3, в,г).
- арочные (рис. 3, д,е);

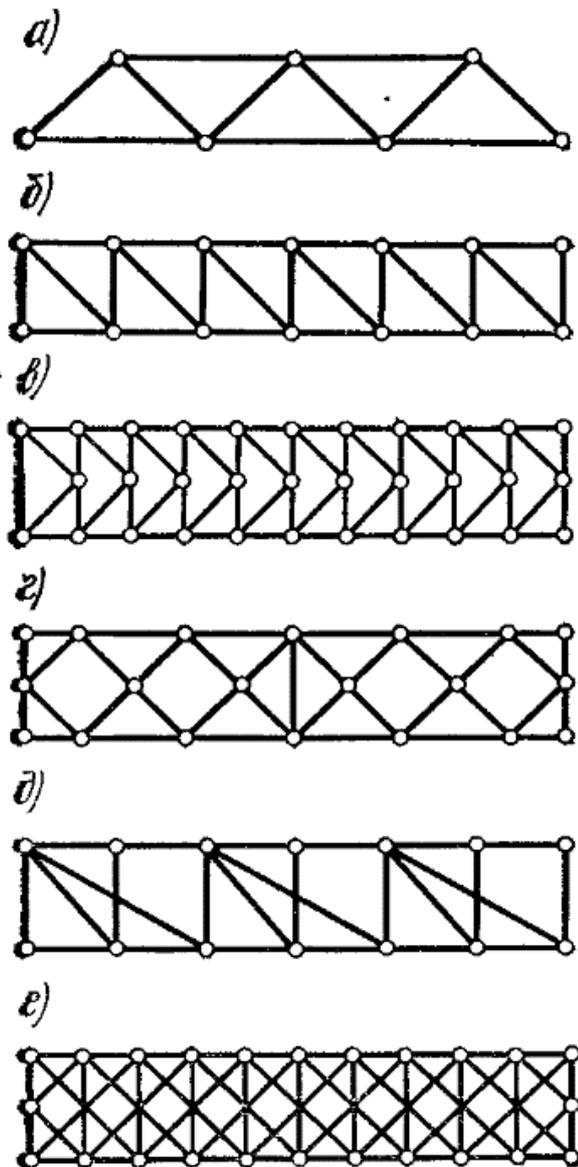


Рис. 2

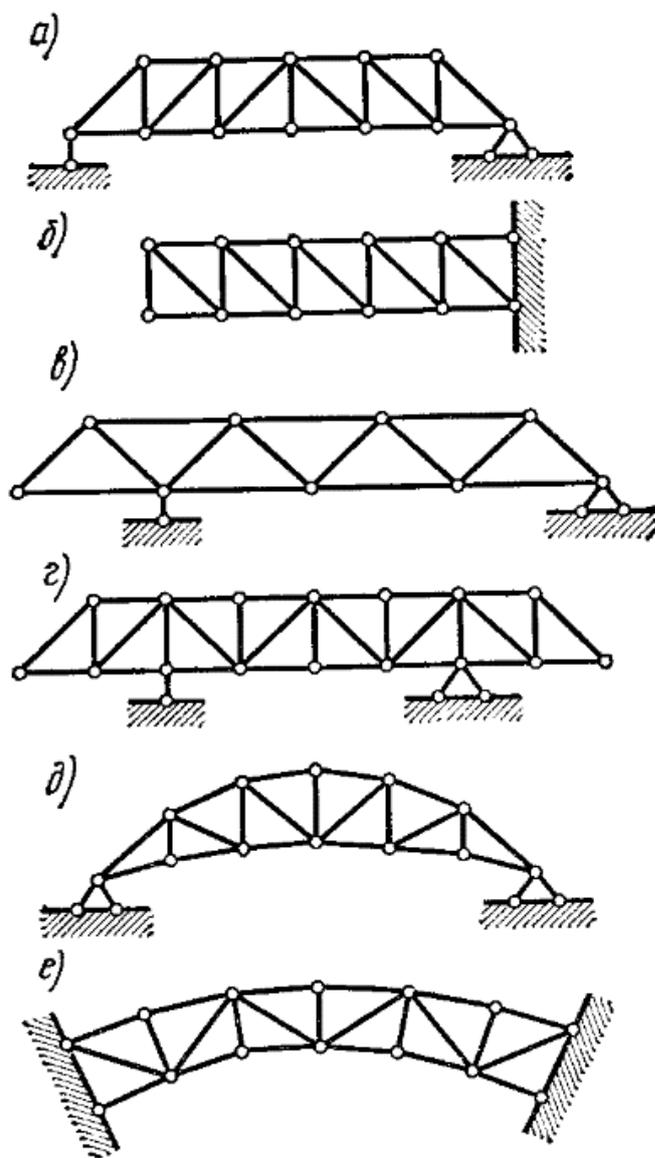


Рис. 3

4) В зависимости от назначения:

- стропильные (рис. 4, а);
- крановые (рис. 4, б);
- башенные (рис. 4, в);
- мостовые (рис. 5, а, б, в);

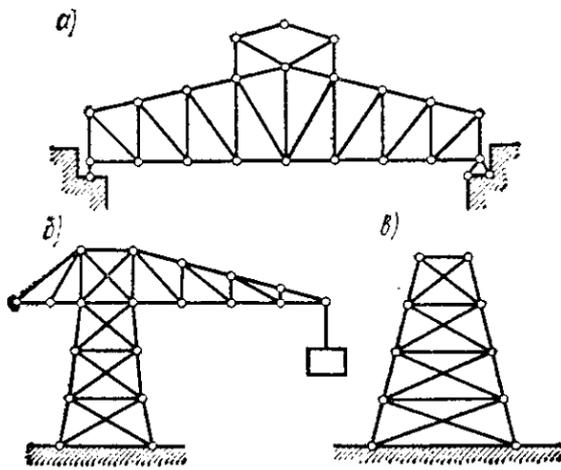


Рис. 4

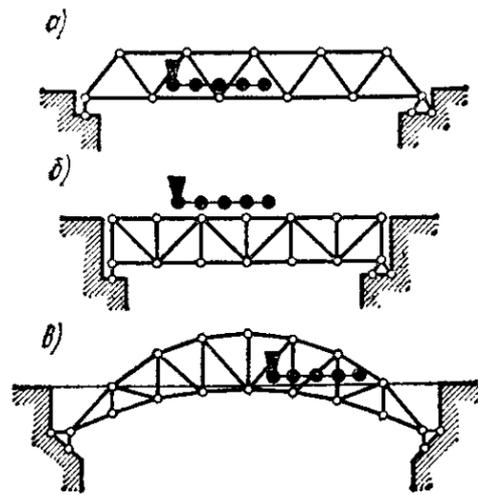


Рис. 5

- 5) По методу расчета:
- статически определимые;
  - статически неопределимые.

Для статической определимости и геометрической неизменяемости шарнирных ферм должно выполняться условие

$$2n_y = n_c + n_{c_0}$$

$n_y$  – число узлов,  $n_c$  – число стержней,  $n_{c_0}$  – число опорных стержней.

Кроме плоских ферм, у которых оси всех стержней лежат в одной плоскости, применяются пространственные фермы. Расчет пространственных ферм можно свести к расчету нескольких плоских ферм.

## Тема 11. Расчет плоских ферм

### Определение усилий в стержнях фермы при неподвижной нагрузке

Фермы, образованные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов (причем каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), называются простейшими.

При определении опорных реакций в ферме можно составить три уравнения равновесия для всей фермы в целом.

До определения усилий в стержнях ферм необходимо вычислить общее число неизвестных  $n$ :  $n = C + C_0$ , где  $C$  – число стержней фермы,  $C_0$  – число опорных стержней.

При составлении уравнений равновесия все неизвестные усилия в стержнях фермы условно считаются положительными, т.е. усилие  $N_{ij}$  в стержне фермы между узлами  $i$  и  $j$  следует направить в сторону от узлов. Если после решения уравнений какое-либо усилие окажется отрицательным, то оно направлено к узлу.

Для расчета простых ферм применяются следующие методы:

- 1) метод моментной точки;
- 2) метод проекций;
- 3) метод вырезания узлов.

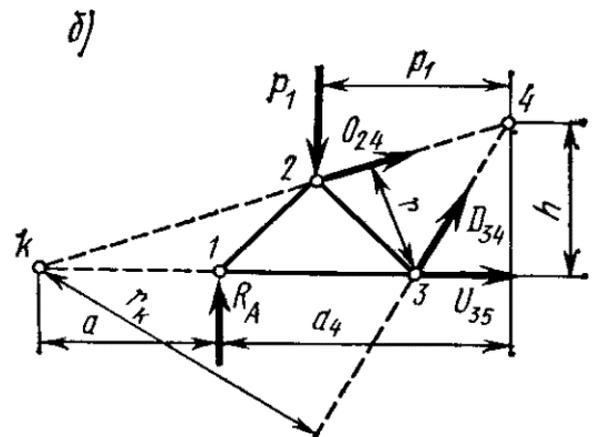
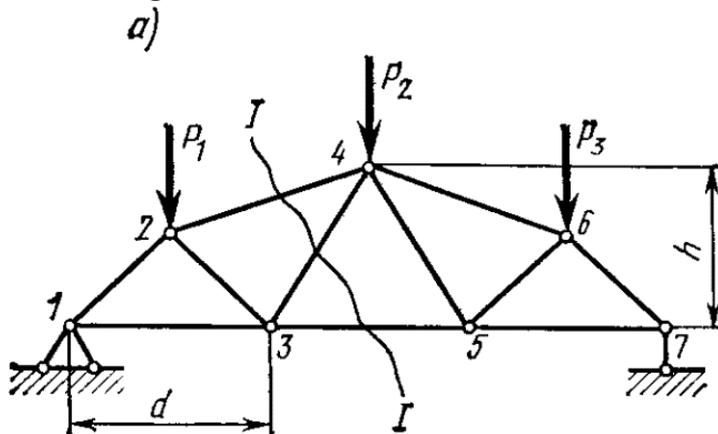
#### Метод моментных точек.

Способ моментной точки применяется, когда можно рассечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекается в одной точке. При этом направление осей трех таких стержней должны пересекаться попарно в трех точках, не лежащих на одной прямой.

Составляя последовательно уравнения моментов всех сил, действующих на отсеченную часть фермы, относительно этих трех точек, определяем усилия в рассеченных стержнях.

Точка пересечения осей двух стержней, относительно которой составляется уравнение моментной, называется моментной.

Условимся усилия в элементах верхнего пояса фермы обозначать буквой  $O$ , усилия в элементах нижнего пояса –  $U$ , усилия в раскосах –  $D$ , усилия в стойках –  $V$ . Внизу у букв ставятся цифры, соответствующие узлам фермы, к которым присоединен данный стержень.



Найдем усилие в стержнях 3-5, 3-4, 2-4. Для этого рассечем ферму сечением I-I, пересекающим эти стержни. Разрезав ферму на две части, одну из них отбрасываем и

рассматриваем ту часть, на которую действует меньше сил. Разрезанные стержни заменяем на внутренние усилия  $O_{24}$ ,  $D_{34}$ ,  $U_{35}$ , которые заменяют собой действие отброшенной части фермы.

Для определения усилия  $U_{35}$  составим сумму моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки пересечения усилий  $O_{24}$  и  $D_{34}$ , т.е. точки 4. Это точка и будет моментной.

$$M_4 = R_A \cdot a_4 - P_1 \cdot p_1 - U_{35} \cdot h = 0$$

$$U_{35} = \frac{R_A \cdot a_4 - P_1 \cdot p_1}{h}$$

Для усилия  $O_{24}$  моментной точкой будет узел 3:

$$M_3 = R_A \cdot d - P_1 \cdot \frac{d}{2} + O_{24} \cdot r = 0$$

$$O_{24} = \frac{P_1 \cdot \frac{d}{2} - R_A \cdot d}{r}$$

Для усилия  $D_{34}$  моментной точкой будет узел k:

$$M_k = -R_A \cdot a + P_1 \cdot \left(a + \frac{d}{2}\right) - D_{34} \cdot r_k = 0$$

$$D_{34} = \frac{P_1 \cdot \left(a + \frac{d}{2}\right) - R_A \cdot a}{r_k}$$

Итак, при применении способа моментной точки числовая величина усилия определяется выражением:

$$N = \pm \frac{M}{r}$$

где  $M$  – момент сил, действующих на отсеченную часть фермы, относительно моментной точки;

$r$  – плечо искомого усилия относительно той же точки.

Случаи применения способы моментной точки:

1. Когда можно провести разрез, пересекающий кроме данного стержня (усилие в котором определяется) любое число стержней, сходящихся в одной общей точке, не лежащей на направлении оси данного стержня.

2. Когда разрез пересекает более трех стержней, не сходящихся в одной точке, если усилия во всех стержнях, кроме трех, уже известны.

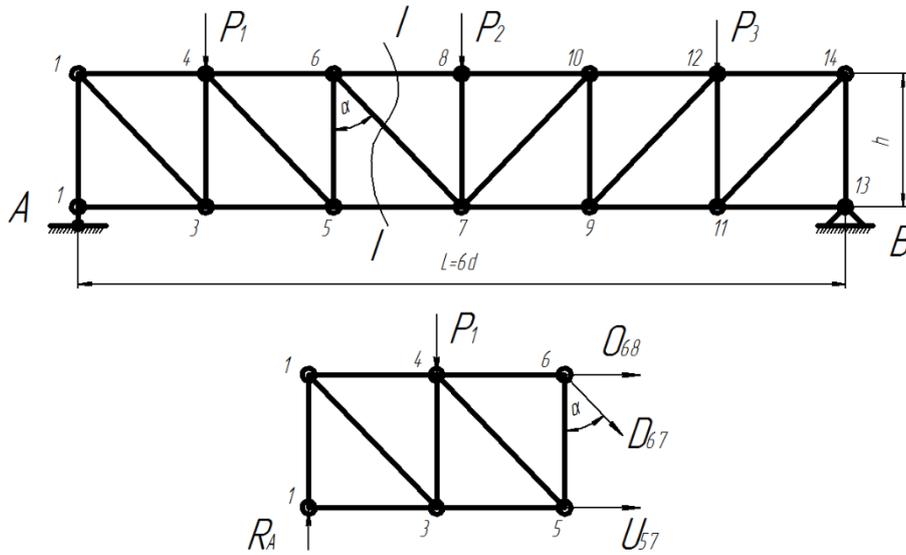
3. Когда возможно провести разрез, пересекающий любое число стержней сверх трех, если при этом каждый добавочный стержень пересекается дважды.

При расчетах ферм по способу моментной точки каждое усилие определяется с помощью одного уравнения с одним неизвестным. При этом уравнение моментов входят только действующие на ферму внешние силы и одно определяемое усилие в

рассчитываемом элементе. В этих случаях возможная ошибка при определении усилия в одном элементе не оказывает влияния на усилие в другом элементе.

Метод проекций.

Данный метод применяется, когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу.



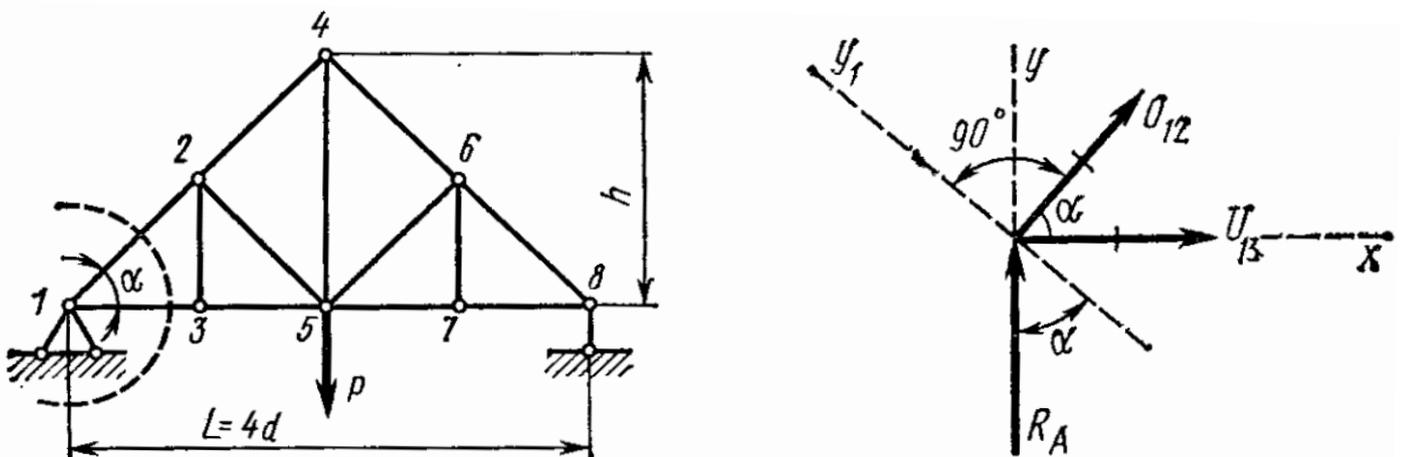
Найдем усилие в стержне 67. Для этого разобьем ферму на две части сечением I-I, так чтобы сечение пересекло стержень, усилие в котором необходимо определить и два других. Отбросим одну из частей и рассмотрим другую, где меньше сил.

$$\sum Y = R_A - P_1 - D_{67} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$D_{67} = \frac{R_A - P_1}{\cos \alpha}$$

Метод вырезания узла.

Для определения требуемого усилия вначале вырезается узел с двумя неизвестными и далее последовательно вырезая узлы приближаемся к требуемому.



Определим усилия в стержнях 1-2 и 3-5.

Вначале определяем реакции в ферме:  $R_A = P/2$ .

Вырезаем узел 1. Для определения усилия  $O_{12}$  спроецируем все силы, действующие в узле на ось Y:

$$\sum Y = R_A + O_{12} \cdot \sin \alpha = 0$$

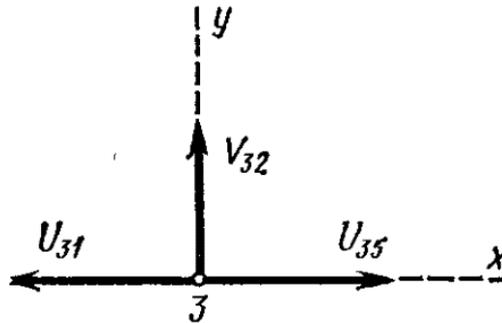
$$O_{12} = -\frac{R_A}{\sin \alpha} = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Для определения усилия  $U_{13}$  спроецируем все силы в узле на ось, перпендикулярную направлению стержня 1-2, т.е. на ось  $y_1$ :

$$\sum Y_1 = R_A \cdot \cos \alpha - U_{15} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$U_{13} = \frac{R_A \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{P \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{2}$$

Для определения усилия в стержне 3-5 вырежем узел 3.



Составим сумму проекций всех сил в узле 3 на ось X:

$$\sum X = -U_{31} + U_{35} = 0$$

$$U_{35} = U_{31} = \frac{P \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{2}$$

У метода вырезания узлов есть недостаток: ошибка (неточность), допущенная при расчете одного узла, влияет на последующие вычисления.

#### Метод замены стержней.

Кроме простейших систем существуют системы с более сложной геометрической структурой, называемые сложными.

Для их решения применяется метод замены стержней. Путем замены стержней ферма превращается в простую, которая кладется в основу расчета. Система, полученная в результате такого преобразования, называется заменяющей.

Положение заменяющего стержня можно найти следующим образом:

- 1) Устранить какой-либо стержень;
- 2) Последовательно отбрасывать узлы фермы, присоединенные двумя стержнями каждый, такое отбрасывание не оказывает влияние на неизменяемость оставшейся части;
- 3) Отбрасывание узлов продолжается до тех пор, пока не обнаружится стержень, не имеющий достаточной связи с остающейся частью системы. Стержень необходимый для его закрепления и будет заменяющий.
- 4) Если полученная таким образом ферма не будет принадлежать к простейшим, то из нее следует устранить какой-либо стержень и повторить предыдущие действия.

Например, на ферме, показанной на рис. 1 а, убираем стержень 1-2, а его влияние заменяем фиктивной внешней силой  $X$  и ставим дополнительный стержень, усилие в котором обозначим через  $N_3$ .

Усилие  $X$  определяется из условия, что усилие  $N_3 = 0$ .

$$N_3 = \bar{N}_3 \cdot X + N_3^P = 0$$

тогда  $X = -N_3^P / \bar{N}_3$  после чего определяем усилия в остальных стержнях.

$N_3^P$  - усилие в фиктивном стержне только от внешней нагрузки;

$\bar{N}_3$  - усилие в фиктивном стержне от  $X = 1$ .

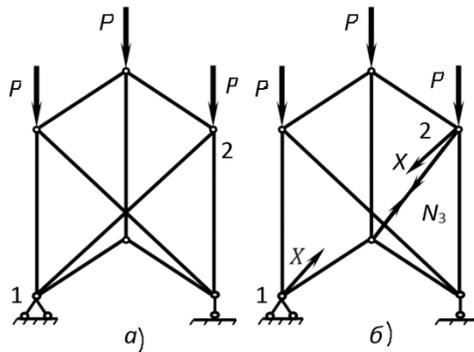
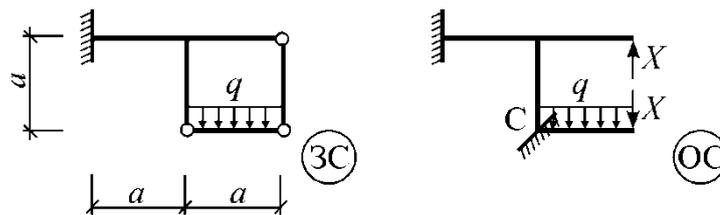


Рис. 1

Например, для расчета рамы (рис. 2 а) удалим правый вертикальный стержень заданной системы (ЗС) и введем одну связь в левый шарнир. Тогда шарнир станет припайкой С, а примыкающие к нему стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через  $X$ , получим так называемую основную систему (ОС) для расчета рамы (рис. 2 б).

а)

б)



в)

г)

д)

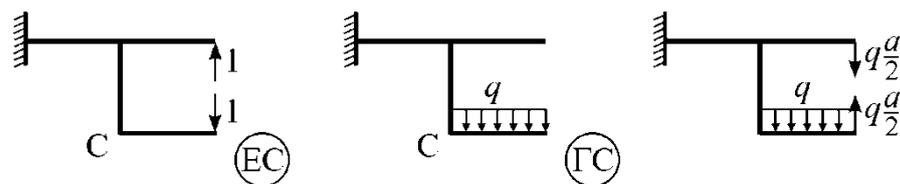


Рис. 2

Условием эквивалентности ОС по отношению к ЗС будет такое значение сил  $X$ , при котором момент в точке С ( $M_C = 0$ ). На основании принципа независимости действия сил (принцип суперпозиции) этот момент определяется по формуле:

$$M_C = \bar{M}_{Cx} \cdot X + M_{CP} \quad (1)$$

где  $\bar{M}_{Cx}$  - момент относительно С от действия единичной силы;

$M_{CP}$  - момент относительно С от действия заданного усилия.

Рассмотрим два состояния ОС:

1) единичное состояние (ЕС), где прикладываются силы  $X=1$  (рис. 2 в);

2) грузовое состояние (ГС), где прикладывается нагрузка (рис. 2 г).

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\bar{M}_C \cdot X + M_{CP} = 0$$

где  $\bar{M}_C = 1 \cdot a = a$  - момент в точке С в единичном состоянии;



## Тема 12. Построение линий влияния в стержнях ферм

Передача нагрузки в ферме производится в узлах, поэтому это является случаем узловой передачи нагрузки (рассмотренный в теме 5).

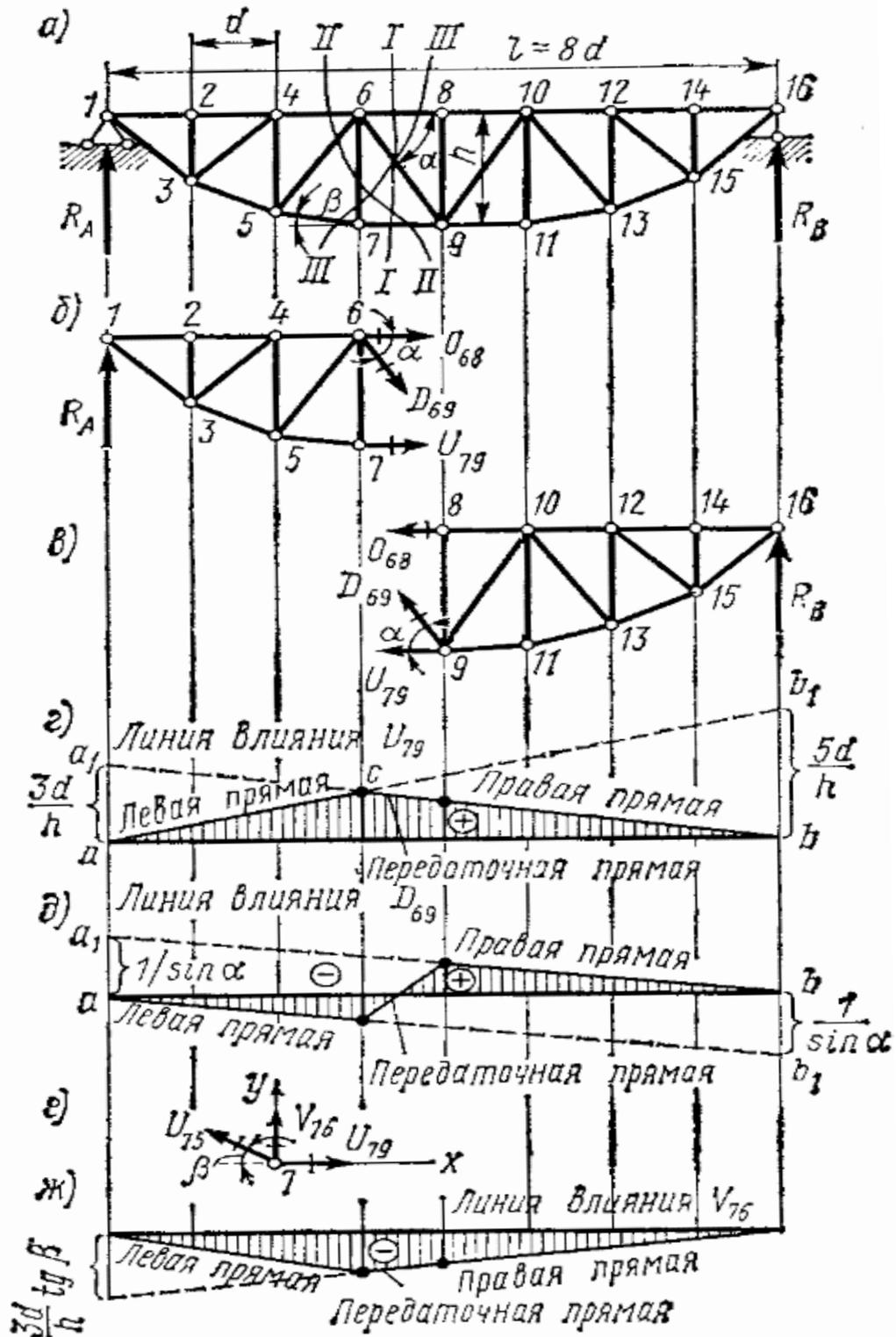
Способы построения линий влияния для ферм:

1) Способ моментной точки; 2) Способ проекций; 3) Способ вырезания узлов.

Рассматриваем движение силы  $P=1$  по верхнему поясу.

Способ моментной точки:

Построим ЛВ усилия в стержне 7-9.



Для этого вначале проведем сечение I-I. Положение груза  $P=1$  рассматриваем левее узла 6 и правее узла 8 (т.е. вне рассеченной панели).

При положении груза  $P=1$  правее узла 8 рассматриваем левую отсеченную часть (б). Составляем сумму моментов относительно точки 6:

$$\sum M_6 = R_A \cdot 3d - U_{79} \cdot h = 0$$
$$U_{79} = \frac{R_A \cdot 3d}{h}$$

Т.о., ЛВ  $U_{79}$  на участке фермы правее узла 8 представляет собой ЛВ опорной реакции  $R_A$  с ординатами, умноженными на  $3d/h$ . Сносим на полученную прямую точку 8 (г). Построенная прямая называется правой прямой, заштриховываем ЛВ на участке между узлами 8 и 16.

При положении груза  $P=1$  левее узла 6 рассматриваем правую отсеченную часть (в). Составляем сумму моментов относительно точки 6:

$$\sum M_6 = -R_B \cdot 5d + U_{79} \cdot h = 0$$
$$U_{79} = \frac{R_B \cdot 5d}{h}$$

Т.о., ЛВ  $U_{79}$  на участке фермы левее узла 6 представляет собой ЛВ опорной реакции  $R_B$  с ординатами, умноженными на  $5d/h$ . Сносим на полученную прямую точку 6 (г). Построенная прямая называется левой прямой, заштриховываем ЛВ на участке между узлами 1 и 6.

Точки 6 и 8 с правой и левой прямых соединяем прямой линией, называемой передаточной прямой.

Способ проекций:

Построим ЛВ усилия в стержне 6-9.

При положении груза  $P=1$  правее узла 8 рассматриваем равновесие левой отсеченной части (б). Моментная точка для усилия  $D_{69}$  находится в бесконечности.

Составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_A - D_{69} \cdot \sin \alpha = 0$$
$$D_{69} = \frac{R_A}{\sin \alpha}$$

Т.о., ЛВ  $D_{69}$  на участке фермы правее узла 8 представляет собой ЛВ опорной реакции  $R_A$  с ординатами, умноженными на  $1/\sin \alpha$ . Сносим на полученную прямую точку 8 (д). Построенная прямая называется правой прямой, заштриховываем ЛВ на участке между узлами 8 и 16.

При положении груза  $P=1$  левее узла 6 рассматриваем правую отсеченную часть (в). Составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_B + D_{69} \cdot \sin \alpha = 0$$
$$D_{69} = -\frac{R_B}{\sin \alpha}$$

Т.о., ЛВ  $D_{69}$  на участке фермы левее узла 6 представляет собой ЛВ опорной реакции  $R_B$  с ординатами, умноженными на  $(-1/\sin \alpha)$ . Сносим на полученную прямую

точку 6 (д). Построенная прямая называется левой прямой, заштриховываем ЛВ на участке между узлами 1 и 6.

Точки 6 и 8 с правой и левой прямых соединяем прямой линией, называемой передаточной прямой.

Способ вырезания узлов:

Построим ЛВ усилия в стержне 6-7.

Способ моментной точки неприменим, т.к. при рассечении стержня 6-7, например, сечениями II-II и III-III в сечение попадает 4 стержня.

Вырезаем узел 7 (е) и составим для него уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = V_{76} + U_{75} \cdot \sin \beta = 0$$

$$V_{76} = -U_{75} \cdot \sin \beta$$

Поскольку груз  $P=1$  к узлу 7 непосредственно не прикладывается (он движется по верху фермы), то полученная зависимость сохраняется при любом положении груза  $P=1$ . Поэтому ЛВ  $V_{76}$  может быть получена из ЛВ  $U_{75}$  умножением всех ее ординат на  $(-\sin\beta)$ .

Для определения усилия  $U_{75}$  спроецируем силы, действующие на узел 7, на горизонтальную ось:

$$\sum X = -V_{75} \cdot \cos \beta + U_{79} = 0$$

$$U_{75} = \frac{U_{79}}{\cos \beta}$$

Соответственно,

$$V_{76} = -\frac{U_{79}}{\cos \beta} \cdot \sin \beta = -U_{79} \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Т.о., ЛВ  $V_{76}$  представляет собой ЛВ  $U_{79}$ , ординаты которой умножены на  $(-\operatorname{tg}\beta)$ .

Этот результат можно было получить и непосредственно из уравнения проекций всех сил, действующих на узел, на прямую, перпендикулярную элементу 7-5.

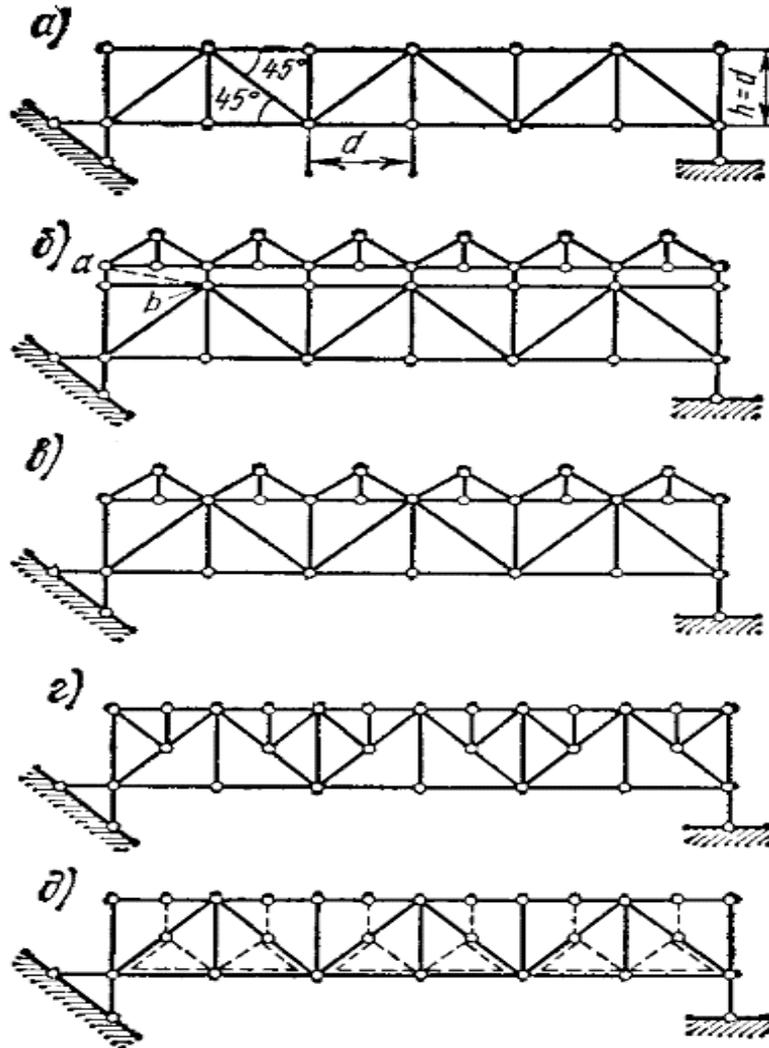
## Тема 13. Расчет шпренгельных ферм. Расчет трехшарнирных арочных ферм

### Шпренгельные фермы

Усилия в стержнях ферм способом моментной точки определяются по формуле:

$$N = \pm \frac{M}{r}$$

где  $M$  – момент левых или правых сил относительно моментной точки;  
 $r$  – плечо усилия  $N$  относительно этой точки.



Из приведенной формулы видно, что чем больше  $r$ , тем меньше при прочих равных условиях усилие  $N$ .

Увеличение высоты фермы приводит к увеличению плеч и уменьшению усилий в ее элементах. По конструктивным соображениям раскосы фермы располагают под углом  $45^\circ$  к стойкам и поясам. Соответственно увеличение высоты ферм приводит к увеличению длины панелей (поскольку высота фермы с параллельными поясами должна быть равна длине панели) (а). Устройство больших панелей приводит к увеличению массы моста. Экономия материала на поясах фермы, достигаемая при увеличении высоты фермы, может оказаться меньше дополнительного его расхода на устройство проезжей части моста.

Задача увеличения высоты фермы может быть рационально решена при введении в состав каждой панели дополнительных двухопорных ферм – шпренгелей, опирающихся на узлы основной фермы. Стержни шпренгелей работают лишь на

местную нагрузку, т.е. на нагрузку, приложенную в пределах их пролетов. Вертикальная местная нагрузка, действующая на шпренгель, передается вертикально же в узлы основной фермы, которые являются для шпренгеля опорами. Стержень  $ab$  (штриховая линия (б)) необходим только для обеспечения геометрической неизменяемости системы, усилие в нем равно нулю.

Применение шпренгелей позволяет избежать массы моста при возрастании длины панели.

Убрав стержни  $ab$  и уменьшив длину вертикальных стержней шпренгелей получим ферму (в). Перевернув шпренгели получим ферму (г), которая называется шпренгельной. Эта ферма передает местную вертикальную нагрузку, приложенную к верхним дополнительным узлам, вертикально в верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели называются одноярусными. Применяются также шпренгели, которые местную нагрузку, приложенную к верхним узлам, передают на нижние узлы основной фермы (д), или такие, которые нагрузку, приложенную к дополнительным узлам нижнего пояса, передают на верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели называют двухъярусными.

Элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели, делят на три категории:

1) элементы, принадлежащие только основной ферме. Усилия в этих элементах определяются расчетом основной фермы и не меняются при включении в ферму шпренгелей.

2) элементы, принадлежащие только шпренгелям. Усилия в них могут быть найдены рассматривая шпренгель как самостоятельную двухопорную ферму.

3) элементы, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю. Усилия в таком элементе равно сумме двух усилий, одно из которых возникает в элементе основной фермы, а другое – в слившемся с ним элементе шпренгеля.

Элементы ферм, в состав которых входят двухъярусные шпренгели, делятся на четыре категории: первые три аналогичны выше описанным; элементами четвертой категории являются те элементы основной фермы первой категории, ЛВ для которых имеют различный вид при перемещении силы  $P=1$  по нижнему и верхнему поясам. Наличие двухъярусных шпренгелей, передающих местную нагрузку из нижних узлов в верхние (или наоборот), меняет условия работы таких элементов.

### *Трехшарнирные арочные фермы.*

В трехшарнирных арочных фермах, в отличие от трехшарнирных арок, диски арок представляют собой фермы. Такая система состоит из двух ферм, связанных между собой одним общим шарниром. Рассмотрим трехшарнирную арочную ферму. Вертикальные составляющие реакций опор и распор определяются как в трехшарнирной раме, ограниченной контуром АЕСФВ. Усилия в стержнях трехшарнирной арочной фермы и ЛВ для них определяются как для обычной фермы.

