1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Данная тема рассматривается на практических занятиях.

При изучении различных видов нагружения мы увидим, что **сопротивление материала бруса действию внешних сил зависит от ряда геометрических характеристик поперечного сечения.**

Еще Галилео Галилей установил, например, что **чем больше площадь поперечного сечения стержня при растяжении, тем меньше его удлинение.**

Забегая вперед, отметим, например, что **перемещения точек поперечного сечения консольной балки** (рис. 1.1) **значительно изменятся** (при постоянстве площади поперечного сечения и значения силы), *если это сечение повернуть по отношению к линии действия силы на* 90^0.

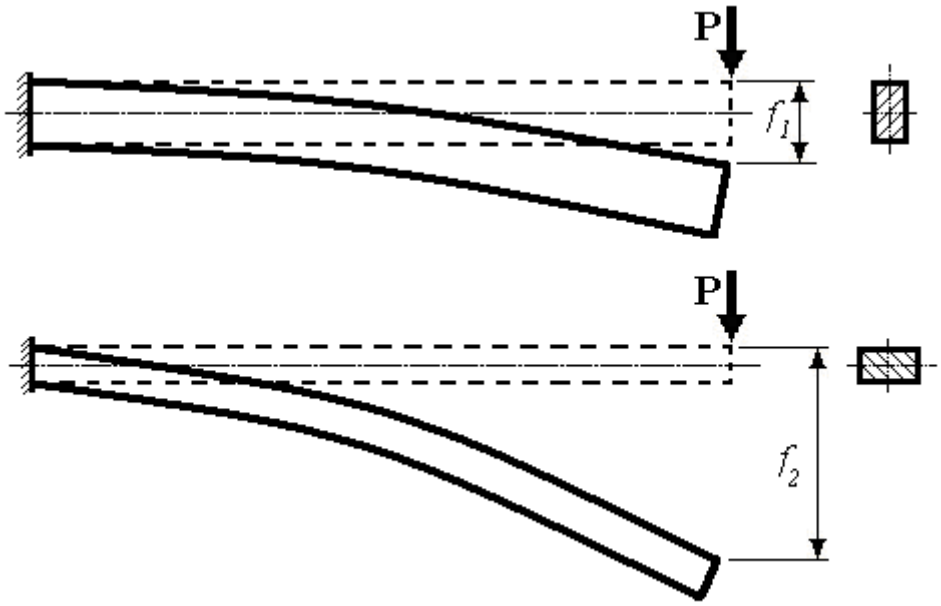


Рис. 1.1. Влияние положения сечения по отношению к нагрузке на величину перемещений точек сечения

Из рисунка видим, что *перемещения точки приложения силы* в первом и втором варианте положения прямоугольного сечения **в значительной степени отличаются**.

Таким образом, площадь поперечного сечения не может в полной мере характеризовать сопротивление бруса действию внешних сил. Для анализа особенностей работы бруса при различных видах нагружения необходимо привлекать и другие геометрические характеристики сечений.

1.1. Статические моменты сечения

Рассмотрим поперечное сечение (плоскую фигуру) произвольной формы, имеющее площадь F (рис. 1.2), которую разместим в произвольной системе координат XOY.

Выделим вокруг произвольной точки элементарную площадку dF с координатами x, y.

Статические моменты сечения определяются **определенными интегралами вида**:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF. \qquad (1.1)$$

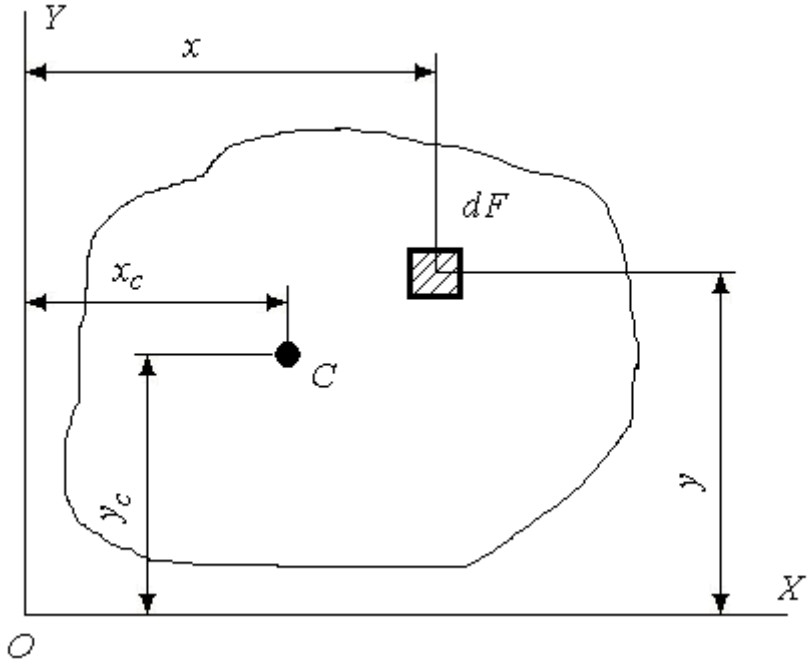


Рис. 1.2. К определению статических моментов плоского сечения

В зависимости от знака координат элементарной площадки, статические моменты могут быть как **положительными**, так и **отрицательными**.

Размерность статических моментов сечения $[см^3]$.

Если известно положение центра тяжести сечения x_c, y_c площадью F, то статические моменты сечения могут быть определены по формулам (1.2):

$$S_x = y_c F; \quad S_y = x_c F. \tag{1.2}$$

Видим, что при равенстве нулю координат центра тяжести площади сечения, статические моменты также равны нулю. **Координатные оси, проходящие через центр тяжести сечения – центральные оси сечения.**

Если **статические моменты сечения** относительно пары взаимно перпендикулярных осей **равны нулю** – эти оси являются **центральными осями сечения**.

Если **сечение имеет сложную форму**, то его разделяют на i простых сечений и статические моменты определяют как алгебраическую сумму статических моментов этих простых сечений:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_{c_i} F_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} x_{c_i} F_i, \tag{1.3}$$

где F_i – площадь i-того простого сечения,

x_{c_i}, y_{c_i} – координаты центров тяжести i-того сечения,

n – общее число простых сечений.

Чаще всего формулы (1.2) и (1.3) используются для определения положения центра тяжести сечения.

Если сечение имеет сложную форму, то для определения положения центра тяжести такого сечение следует:

- выбрать для сложного сечения <u>произвольную и удобную</u> (с точки зрения определения площадей и координат простых сечений) систему координат;
- разделить сложное сечение на i простых, для которых легко определить собственный центр тяжести и площадь поперечного сечения;
- определить координаты центров тяжести простых сечений в выбранной системе координат;
- используя формулу (1.3) определить координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (1.4)$$

<u>Примечания.</u>

1. **От выбора** произвольной **системы координат** и особенностей **разделения сложной фигуры на простые** положение центра тяжести сечения, естественно, **не зависит**.

2. Для сечения, состоящего **из двух фигур**, центр тяжести **должен лежать на прямой**, *<u>соединяющей центры тяжести</u>* этих простых фигур.

Пример 1. Определить центр тяжести сечения (рис. 1.3). Размеры указаны в *см*.

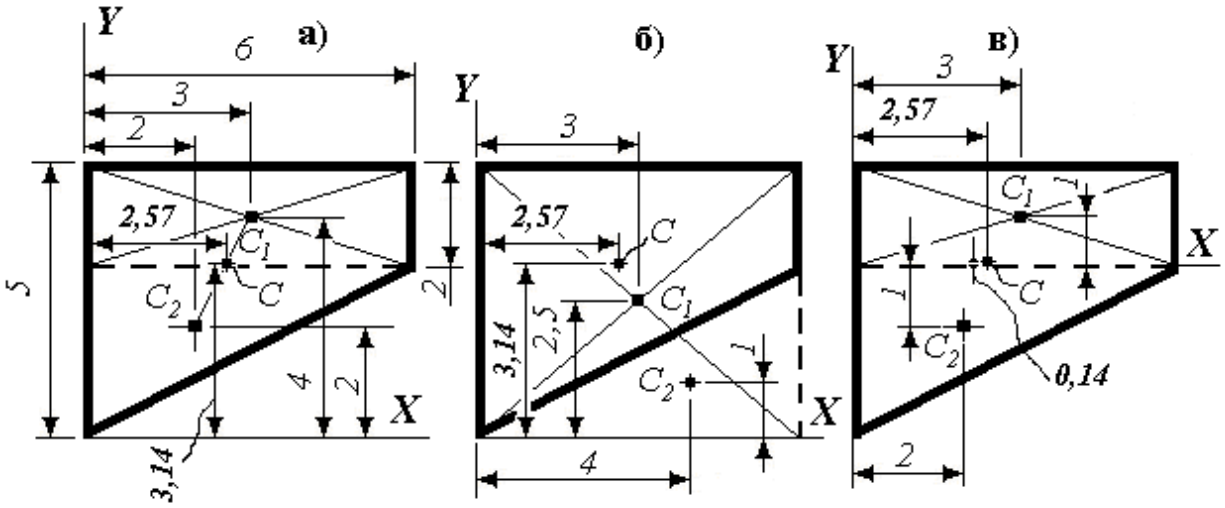


Рис. 1.3. Поперечное сечение к примеру *1*

1. Произвольная система координат X, Y может быть выбрана по-разному, например, как показано на рис. 1.3 *а* и 1.3 *в*.

2. Разделим заданное сечение на два простых – прямоугольник и треугольник, причем на рис. 1.3 *а* к прямоугольнику достраиваем треугольник, а на рис. 1.3 *б* – из прямоугольника удаляем треугольник.

3. Определяем координаты центров тяжести каждой из простых фигур с учетом выбранной системы координат.

Для сечения на рис. 1.3 *а* – $x_{c_1} = 3см$; $y_{c_1} = 4см$; $x_{c_2} = 2см$; $y_{c_2} = 2см$.

Для сечения на рис. 1.3 *б* – $x_{c_1} = 3см$; $y_{c_1} = 2{,}5см$; $x_{c_2} = 4см$; $y_{c_2} = 1см$.

Для сечения на рис. 1.3 *в* – $x_{c_1} = 3см$; $y_{c_1} = 1см$; $x_{c_2} = 2см$; $y_{c_2} = -1см$.

4. По формулам (1.4) с учетом (1.3) определяем положение центра тяжести сечения.

Для сечения на рис. 1.3 *а*:

$$x_c = \frac{6\times 2\times 3 + \frac{1}{2}3\times 6\times 2}{6\times 2 + \frac{1}{2}3\times 6} = 2{,}57см; \quad y_c = \frac{6\times 2\times 4 + \frac{1}{2}3\times 6\times 2}{6\times 2 + \frac{1}{2}3\times 6} = 3{,}14см.$$

Для сечения на рис. 1.3 *б*:

$$x_c = \frac{6\times 5\times 3 - \frac{1}{2}3\times 6\times 4}{6\times 5 - \frac{1}{2}3\times 6} = 2{,}57см; \quad y_c = \frac{6\times 5\times 2{,}5 - \frac{1}{2}3\times 6\times 1}{6\times 5 - \frac{1}{2}3\times 6} = 3{,}14см.$$

Для сечения на рис. 1.3 *в*:

$$x_c = \frac{6\times 2\times 3 + \frac{1}{2}3\times 6\times 2}{6\times 2 + \frac{1}{2}3\times 6} = 2{,}57см; \quad y_c = \frac{6\times 2\times 1 + \frac{1}{2}3\times 6\times (-1)}{6\times 2 + \frac{1}{2}3\times 6} = 0{,}14см.$$

1.2. Осевые (экваториальные), центробежный и полярный моменты инерции

В поперечном сечении произвольной формы, имеющем площадь F (рис. 1.4), в произвольной системе координат XOY выделим элементарную площадку dF с координатами x, y.

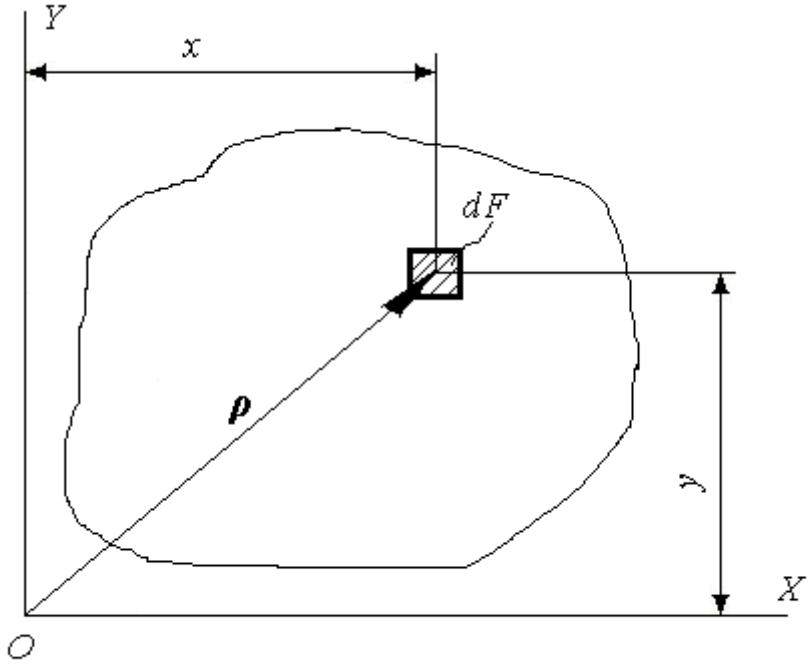


Рис. 1.4. К определению осевых, центробежного и полярного моментов инерции сечения

Осевые моменты сечения определяются **определенными интегралами вида** (1.5).

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \qquad (1.5)$$

В
идим, что осевые моменты инерции по знаку **всегда положительны**.

Нулевого значения осевые моменты инерции никогда не имеют.

Центробежный момент инерции сечения определяется **определенным интегралом вида:**

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \qquad (1.6)$$

Центробежный момент инерции *в зависимости от знака координат элементарной площадки*, может быть как **положительным**, так и **отрицательным**.

При равенстве нулю хотя бы *одной из координат* **центробежный момент** инерции будет **равен нулю**.

Для сечения, имеющего ось симметрии, (рис.1.5 *а*) – для рассмотренного сечения это ось *Y*, в показанной системе координат *XY*: $x_1=-x_2$; $y_1=y_2$. Поэтому

$$J_{xy} = \int_F x_1 y_1 dF + \int_F x_2 y_2 dF = \int_F x_1 y_1 dF - \int_F x_1 y_1 dF = 0.$$

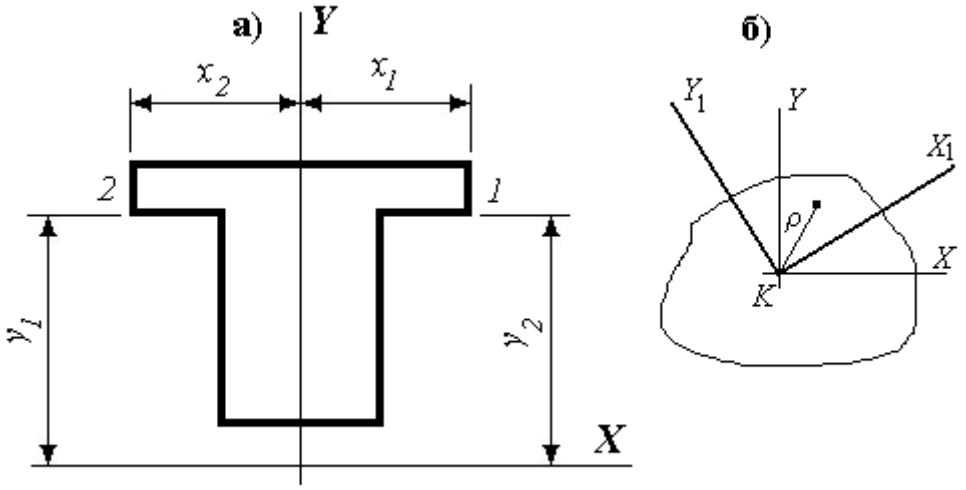


Рис. 1.5. К свойствам осевых и центробежного моментов инерции

Следовательно, *центробежный момент инерции* **равен нулю, если хотя бы одна из координатных осей является осью симметрии**. *Центробежный момент инерции* **равен нулю** относительно оси симметрии сечения **и любой оси ей перпендикулярной**.

Если центробежный момент инерции относительно какой-то оси равен нулю, то эта ось является осью симметрии сечения.

Полярный момент инерции сечения определяется **определенным интегралом вида:**

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF. \qquad (1.7)$$

В
этой формуле ρ – полярный радиус (см. рис. 1.4).

Видим, что полярный момент инерции по знаку **всегда положителен**.
Нулевого значения полярный момент инерции никогда не имеет.

Размерность осевых, центробежного и полярного моментов инерции *[см^4]*.

Если через какую-либо точку K фигуры (рис. 1.5 б) провести две системы прямоугольных координат YKX и Y_1KX_1 и определить осевые моменты инерции, то в связи с тем, что $\rho=const$ следует $J_\rho=const$ и поэтому получим равенство $J_x + J_y = J_{x_1} + J_{y_1}$.

Этот же вывод получим из рис.1.4: полярный радиус определится: $\rho^2 = x^2 + y^2$, поэтому

$$J_\rho = \int_F \left(x^2 + y^2\right) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = J_x + J_y.$$

$$J_\rho = J_x + J_y = const. \qquad (1.8)$$

В заданной системе координат **полярный момент** инерции
равен сумме осевых моментов инерции.
При повороте осей вокруг начала координат полярный момент инерции **не изменяется**.

Говорят, что полярный момент инерции является **инвариантным параметром** (характеристикой), т.е. не зависящим от положения системы координат.

1.3. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей (*одна пара из которых – центральные оси*)

Допустим нам известно положение центра тяжести плоского сечения произвольной формы и его площадь F. Через центр тяжести сечения проведем центральные оси X_c и Y_c (рис. 1.6).

Допустим также, что нам известны моменты инерции относительно центральных осей (центральные осевые и центробежный моменты инерции).

В соответствии с (1.5):

$$J_{x_c} = \int_F y_c^2 dF; \quad J_{y_c} = \int_F x_c^2 dF. \qquad J_{x_c y_c} = \int_F x_c y_c dF.$$

Проведем **новые оси** XY, параллельные центральным осям. Расстояние между этими осями соответственно a и b. Фактически **это координаты центра тяжести** сечения в **новой системе координат**, координаты же элементарной площадки dF в новых осях соответственно будут x и y. Тогда осевые моменты в новой системе координат:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF.$$

Используя обозначения на рис. 1.6 проведем некоторые преобразования.

Видим, что $x = x_c + b; \qquad y = y_c + a.$ Тогда, например,

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_F \left(y_c + a\right)^2 dF = \int_F y_c^2 dF + 2a\int_F y_c dF + \int_F a^2 dF,$$

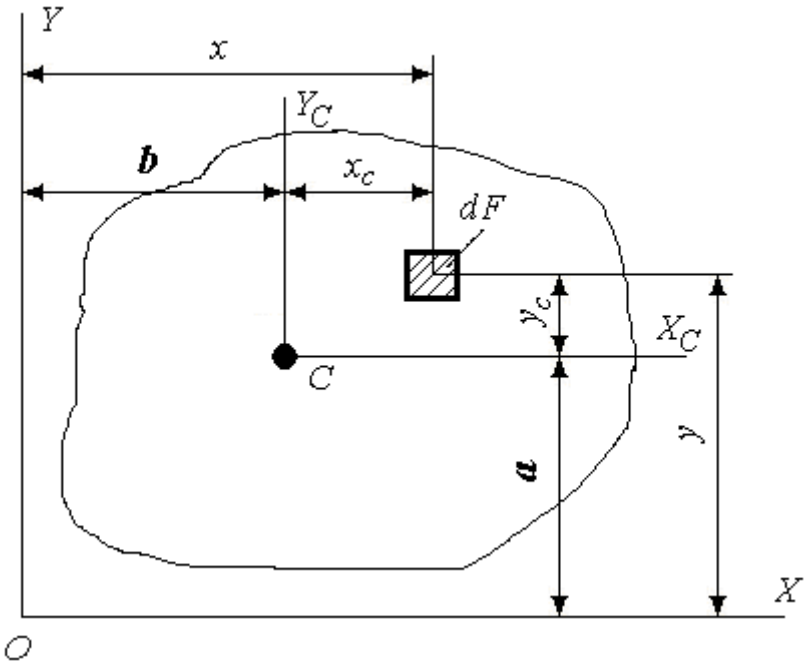


Рис. 1.6. К определению моментов инерции при параллельном переносе осей

а с учетом того, что $S_{x_c} = \int_F y_c dF = 0$ – статический момент сечения относительно центральной оси равен нулю, получим простые зависимости:

$$J_x = J_{x_c} + a^2 F;$$
$$J_y = J_{y_c} + b^2 F. \qquad (1.9)$$

Осевой момент инерции относительно *оси, параллельной центральной*, равен *осевому моменту инерции относительно этой центральной оси* **плюс** *произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения*.

Чем дальше будет располагаться ось от центральной оси, тем больше осевые моменты инерции. Следовательно

осевые моменты инерции относительно центральных осей – наименьшие по величине.

Легко видеть, что если исходные оси X_1Y_1 не будут центральными (рис.1.7), то **для произвольной пары осей** XY имеем общие формулы (1.10):

$$J_x = J_{x_1} + 2aS_{x_1} + a^2 F;$$
$$J_y = J_{y_1} + 2bS_{y_1} + b^2 F. \qquad (1.10)$$

Аналогичным образом, в соответствии с формулой (1.6) определим центробежный момент инерции:

а) если одна пара параллельных осей – центральные оси (см. рис.1.6):

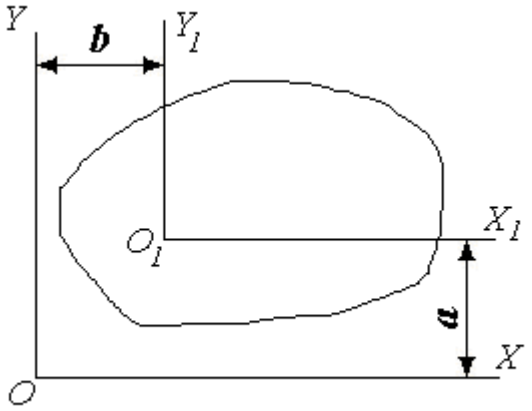


Рис. 1.7. Параллельный перенос осей

$$J_{xy} = \int_F xydF = \int_F (x_c + b)(y_c + a)\, dF = \int_F x_c y_c dF + b\int_F y_c dF + a\int_F x_c dF + ab\int_F dF.$$

В этом случае статические моменты относительно центральных осей

$$S_{x_c} = \int_F y_c dF = 0; \quad S_{y_c} = \int_F x_c dF = 0. \quad \text{Тогда}$$

$$J_{xy} = J_{x_c y_c} + abF. \qquad (1.11)$$

Центробежный момент инерции относительно *осей, параллельных центральным*, равен *центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей* **плюс** *произведение расстояний между осями на площадь сечения*.

б) если параллельные оси – не являются центральными (см. рис. 1.7):

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + bS_{x_1} + aS_{y_1} + abF. \qquad (1.12)$$

1.4. Зависимость между моментами инерции сечения при повороте осей вокруг начала координат

Пусть для плоской фигуры **заданы** *моменты инерции* относительно произвольных осей X,Y и площадь сечения F (рис.1.8).

Определим моменты инерции относительно осей X_1, Y_1, повернутых относительно заданных на угол α против хода часовой стрелки (в положительном направлении). Обе пары осей имеют общее начало координат.

Выделим в окрестностях точки B с координатами x, y площадку dF . Осевые и центробежный моменты инерции относительно заданной системы координат определим по полученным выше формулам (1.5 и 1.6). Аналогично можно определить моменты инерции относительно повернутых осей:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF.$$

Выразим координаты элементарной площадки в новой системе координат через координаты в исходной системе, т.е.

$$x_1 = OA = OE + EA = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \quad y_1 = AB = BD - AD = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

$$BD = y\cos\alpha; \qquad AD = EC = OC\sin\alpha; \qquad OC = x.$$

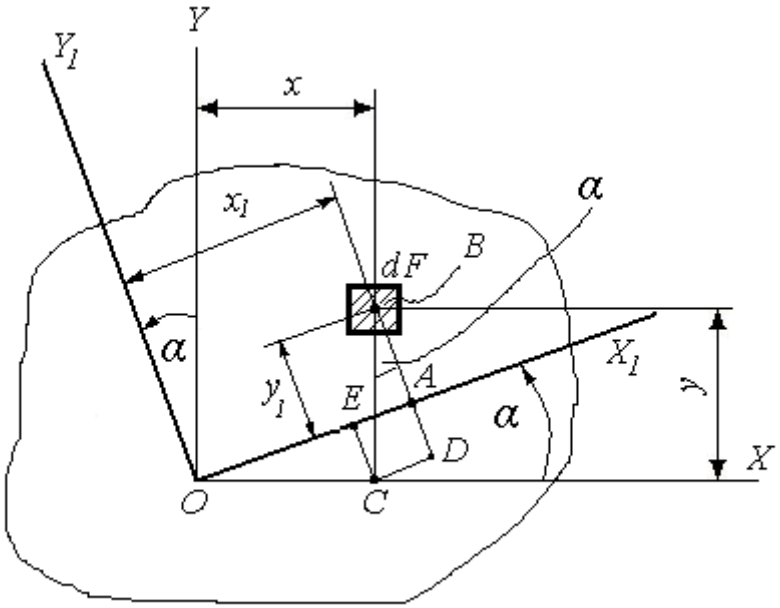


Рис. 1.8. К определению моментов инерции при повороте осей

Учитывая последние зависимости, получим, например для J_{x_1} :

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F \left(y\cos\alpha - x\sin\alpha\right)^2 dF =$$

$$= \cos^2\alpha \int_F y^2 dF + \sin^2\alpha \int_F x^2 dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F xydF =$$

$$= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha.$$

Проведя аналогичные вычисления получим остальные формулы (для осевого J_y и центробежного J_{xy} моментов инерции). При этом помним, что

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha;$ $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

Таким образом, *<u>при повороте осей</u>* моменты инерции равны:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$J_{y_1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha; \qquad 1.13)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha.$$

При повороте осей X_1, Y_1 на 90^0 – т.е. на угол $\alpha_1 = \alpha + 90^0$, центробежный момент инерции будет определяться по формуле (1.14):

$\sin(2\alpha + 180) = -\sin 2\alpha;$ $\cos(2\alpha + 180) = -\cos 2\alpha.$

$$J_{x_2 y_2} = \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{2}\sin 2(\alpha + 90) + J_{x_1 y_1}\cos 2(\alpha + 90) =$$

$$= -\left(\frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{2}\sin 2\alpha + J_{x_1 y_1}\cos 2\alpha\right). \qquad (1.14)$$

При повороте осей на 90^0 **центробежный момент изменяет знак на обратный**, следовательно, *при каком-то положении осей* (при угле α_0) центробежный момент инерции будет **равен нулю**.

1.5. Главные оси и главные моменты инерции сечения

В конце предыдущего параграфа мы сделали заключение, что *при каком-то угле α_0* центробежный момент инерции будет **равен нулю**.

Естественно также заключить, что при каком-то *угле α* **осевые моменты** инерции **примут экстремальные значения**.

Логично в этом случае провести *исследование функции на экстремум* – **производную от осевого момента инерции по углу α_0 приравняем нулю**:

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha}=0,\ \text{тогда}\ \frac{dJ_{x_1}}{d\alpha}=-2\sin\alpha\cos\alpha\,J_x+2\sin\alpha\cos\alpha\,J_y-2J_{xy}\cos2\alpha=$$

$$=-\left(J_x\sin2\alpha-J_y\sin2\alpha+2J_{xy}\cos2\alpha\right).$$

Здесь: $\dfrac{d\left(\cos^2\alpha\right)}{d\alpha}=\dfrac{d\left(\sin^2\alpha\right)}{d\alpha}=-2\sin\alpha\cos\alpha;\qquad \dfrac{d\left(\sin2\alpha\right)}{d\alpha}=2\cos2\alpha.$

Таким образом, при повороте осей на угол α_0 центробежный момент инерции:

$$-\left(\frac{J_x-J_y}{2}\sin2\alpha_0+J_{xy}\cos2\alpha_0\right)=0\,. \qquad (1.15)$$

Сравнивая с формулой (1.14) видим, что это одно и то же выражение, т.е. $J_{x_1y_1}=0.$

Условие экстремума осевых моментов инерции **совпадает** *с равенством нулю центробежного момента* инерции относительно осей, наклоненных под некоторым углом α_0 к исходным осям.

Оси, относительно которых **центробежный момент инерции равен нулю,** а **осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются главными осями сечения.**

Главные оси, проходящие **через центр тяжести** сечения, называются **главными центральными** осями сечения.
Обозначение этих осей:
U – ось, относительно которой осевой момент *max*;
V – ось, относительно которой осевой момент *min*.

Соответственно, моменты инерции относительно главных осей – **главные моменты инерции**, а относительно главных центральных осей – **главные центральные моменты инерции** сечения.

При этом, т.к. главных осей может быть бесконечно много, то и **главных моментов инерции** будет ***бесконечно много***. Например, *центробежный момент* инерции будет **равен нулю** относительно *оси симметрии* сечения и *любой оси, ей перпендикулярной*.

Главных центральных осей может быть только одна пара, поэтому и **главных центральных моментов инерции** может быть ***только два***.

Преобразуем выражение (1.15) и найдем положение главных центральных осей.

Угол $\boldsymbol{\alpha_0}$, на который необходимо повернуть пару произвольных осей X и Y, определим по формуле:

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \qquad (1.16)$$

Подставив найденное по (1.16) значение угла $\boldsymbol{\alpha_0}$ в формулы (1.13) для расчета осевых моментов инерции J_{x_1} и J_{y_1}, можно получить выражения для определения главных центральных моментов инерции сечения.

При этом, для получения более удобной в использовании формулы проведем некоторые преобразования тригонометрических функций.

По формуле для J_{x_1} из (1.13) с учетом того, что

$2cos^2\alpha_0=1+cos2\ \alpha_0$, $\qquad 2sin^2\ \alpha_0=1-cos2\ \alpha_0$ получим

$$J_{x_1} = \frac{J_x}{2}\left(1+\cos 2\alpha_0\right) + \frac{J_y}{2}\left(1-\cos 2\alpha_0\right) - J_{xy}\sin 2\alpha_0. \qquad (1.17)$$

Из (1.16)

$J_{xy} = -\frac{J_x - J_y}{2}\frac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}$. Подставим это выражение в (1.17) и после раскрытия скобок и объединения членов с общими множителями получим:

$$J_{x_1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha_0 - \left(-\frac{J_x - J_y}{2}\frac{\sin^2 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}\right).$$

Приведем к общему знаменателю второе и третье слагаемые и с учетом, что

$cos^2 2\ \alpha_0+sin^2 2\ \alpha_0=1$ имеем

$$J_{x_1} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \qquad (1.18)$$

Заметим, что $\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1 + tg^2 2\alpha_0}$.

После замены $tg^2 2\alpha_0$ в соответствии с (1.16) и подстановки в (1.18) получим

$$J_{x_1} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{J_x - J_y}{2}\sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{\left(J_x - J_y\right)^2}}.$$

Окончательно, после преобразований имеем

формулу для определения **значений**
главных центральных моментов инерции сечения

$$J_{\max/\min} = J_{U,V} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(J_x - J_y\right)^2 + 4J_{xy}^2}. \qquad (1.19)$$

Значение $J_{max} = J_U$ получим, беря **между слагаемыми знак (+)**, а значение $J_{min} = J_V$ – беря **знак (–)**.

1.6. Порядок определения главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей для сложных и составных сечений

Сложным будем называть сечение (рис.1.9 а), имеющее в общем случае *произвольную форму*. Обычно сложное сечение стремятся разделить на простые (прямоугольник, треугольник, круг и т.п.).

Составное сечение – сечение (1.9 б), которое составлено из отдельных самостоятельных сечений, например из прокатных профилей разных типоразмеров (уголки равнобокие и неравнобокие, швеллера, двутавры).

Геометрические характеристики для любого сложного или составного сечения определяют, используя полученные в разделах 1.2 – 1.5 формулы, по аналогии с определением статических моментов (см. 1.3).

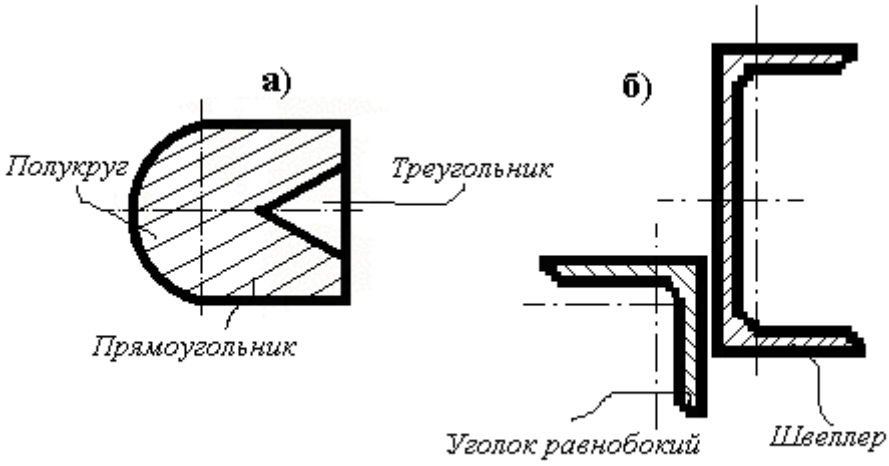


Рис. 1.9. Примеры сложного и составного сечений

Перед тем, как начать расчет, необходимо выполнить чертеж заданного сечения в удобном масштабе и нанести все необходимые размеры.

Порядок расчета следующий:

а) **разделить сечение** на простейшие элементы;

б) **выбрать** удобную произвольную **систему координат** X,Y (вспомогательные оси);

в) в выбранной системе координат **определить координаты центров тяжести** простых фигур x_{c_i}, y_{c_i} и **положение центра тяжести всего сечения** x_c, y_c (см. раздел 1.1). Нанести **все координаты** на чертеж;

г) параллельно выбранной в п.б системе координат **провести центральные оси** X_c Y_c;

д) по формулам (см. таблицу 1.1) или по таблицам сортамента **определить для каждой простой фигуры значения осевых и центробежных моментов** инерции *относительно собственных центральных осей* этих фигур;

е) по формулам для параллельного переноса осей (1.9 и 1.11) **определить осевые и центробежный моменты** инерции $J_{X_c}, J_{Y_c}, J_{X_cY_c}$ всего сечения *относительно его центральных осей*;

ж) по формуле (1.16) **рассчитать угол α_0 (и направление)**, на который необходимо повернуть центральную ось сечения (относительно которой осевой момент больше) и **нанести главные центральные оси** U,V на чертеж с указанием величины угла и направления поворота центральных осей;

з) по формуле (1.19) рассчитать величины главных центральных моментов инерции J_U и J_V;

и) с использованием соответствующих формул произвести проверку правильности решения задачи:

- *центробежный момент инерции* относительно главных центральных осей (1.13) **должен быть равен нулю:** $J_{UV}=0$. Расчет ведется в соответствии с формулой (1.13) $J_{UV}=\dfrac{J_{X_c}-J_{Y_c}}{2}\sin 2\alpha_0+J_{X_cY_c}\cos 2\alpha_0$.
- *сумма осевых моментов инерции* есть **величина постоянная:**

$$J_U+J_V=J_{X_c}+J_{Y_c}.$$

Для прокатных профилей – *уголков, швеллеров, двутавров* – все необходимые для расчетов данные приводятся в так называемых ***таблицах сортамента*** (от нем. сортимент – подбор различных сортов, т.е. размеров каких-либо однородных изделий). В СССР и странах СНГ сортамент – таблицы ГОСТ (в РБ - СТБ) на размеры и геометрические характеристики прокатных (полученных путем прокатки) профилей (определенной формы поперечных сечений изделия). Эти таблицы находятся в справочниках и в учебниках по сопротивлению материалов.

При проведении расчетов и пользовании таблицами геометрических характеристик и таблицами сортамента необходимо
СЛЕДИТЬ ЗА СООТВЕТСТВИЕМ РАСПОЛОЖЕНИЯ ОСЕЙ В ТАБЛИЦАХ И В КОНКРЕТНЫХ СЕЧЕНИЯХ.

1.7. Примеры вычисления моментов инерции простейших сечений

Приведем расчетные формулы для некоторых простых фигур (рис. 1.10 *а* – 1.10 *в*; 1.10 *д* – 1.10 *ж*). Для некоторых случаев расположения осей приводятся выводы формул.

Обозначим:

X_i, Y_i – произвольные оси сечения;

X_c, Y_c – главные центральные оси сечения;

J_{X_i}, J_{Y_i}, $J_{X_iY_i}$ – осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно произвольных осей;

J_ρ – полярный момент инерции сечения $J_\rho=J_{X_i}+J_{Y_i}$;

J_{X_c}, J_{Y_c} – главные центральные моменты инерции сечения.

Знак центробежного момента, как известно, зависит от положения системы координат и получается автоматически при выводе формул.

Например, для прямоугольного сечения (рис. 1.10 *а*) – если ось X будет направлена влево, то $J_{XY}=J_{X_cY_c}+abF=0+\left(-\dfrac{1}{2}b\right)\dfrac{1}{2}h\,bh=-\dfrac{b^2h^2}{4}$.

Для треугольных сечений и уголков знак центробежного момента можно выбирать, пользуясь следующей рекомендацией (см. схему – рис. 1.10 *г*).

Величину центробежного момента инерции для неравнобокого уголка определяют по формуле:

$$J_{XY}=\pm\sqrt{(J_X-J_{\min})(J_Y-J_{\min})}.$$

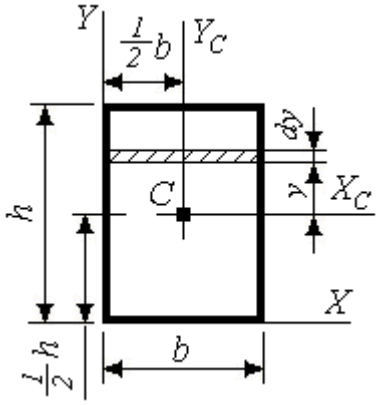


Рис. 1.10 *а*. Сечение – прямоугольник

$$J_{X_c} = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy =$$

$$= b\frac{y^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12};$$

заменили под интегралом $dF=b\,dy$.

Аналогично $J_{Y_c} = \dfrac{hb^3}{12}$.

$$J_X = J_{X_c} + a^2 F = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3};$$

Аналогично $J_Y = \dfrac{hb^3}{3}$;

$$J_{XY} = J_{X_cY_c} + abF = 0 + \frac{1}{2}b\,\frac{1}{2}h\,bh = \frac{b^2h^2}{4}.$$

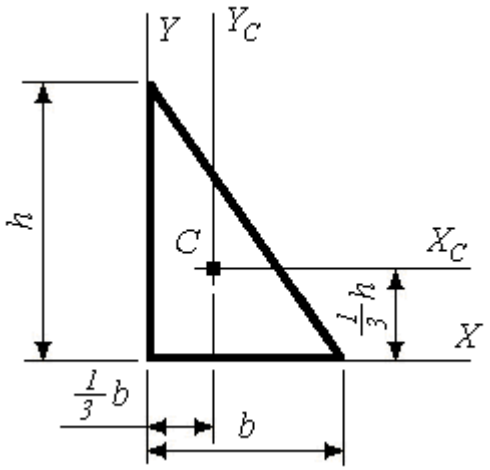


Рис. 1.10 *б*. Сечение – прямоугольный треугольник

$$J_{X_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{Y_c} = \frac{hb^3}{36};$$

$$J_X = \frac{bh^3}{12}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{12};$$

$$J_{X_cY_c} = -\frac{b^2h^2}{72}; \quad J_{XY} = \frac{h^2b^2}{24};$$

$$J_\rho = \frac{bh}{36}\left(h^2 + b^2\right).$$

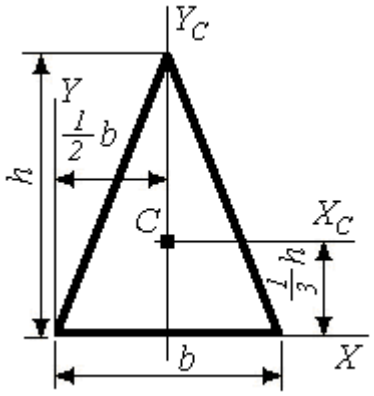


Рис. 1.10 *в*. Сечение – равнобедренный треугольник

$$J_{X_c} = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{Y_c} = \frac{hb^3}{48};$$

$$J_X = \frac{bh^3}{12};$$

$$J_{X_cY_c} = J_{XY_c} = 0.$$

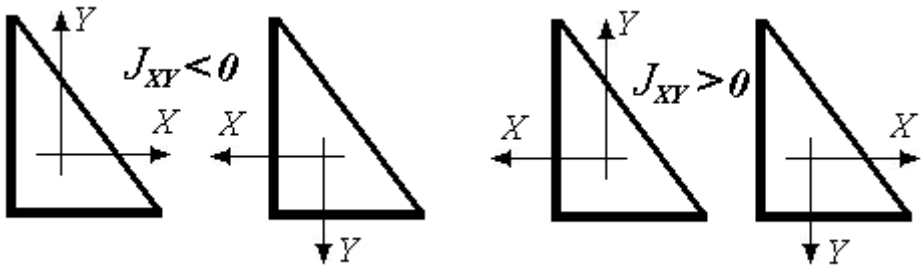


Рис. 1.10 *г*. Схемы, поясняющие подход к выбору знака центробежного момента

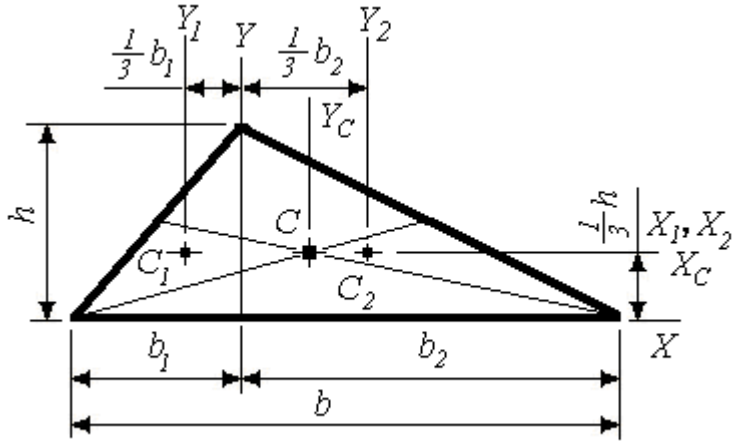


Рис. 1.10 *д*. Сечение – треугольник общего положения

$$J_{X_c} = \frac{bh^3}{36};$$

$$J_X = \frac{bh^3}{12};$$ *см. комментарии ниже*

$$J_Y = \frac{h}{12}\left(b_1^3 + b_2^3\right);$$ *см. комментарии ниже*

$$J_{XY} = -\frac{h^2\left(b_1^2 - b_2^2\right)}{24};$$ *см. комментарии ниже*

Для получения формул, на которые сделаны ссылки-комментарии на рис. 1.10 *д*, используем формулы для параллельного переноса (1.9 и 1.11), разбив треугольник на два прямоугольных треугольника:

$$J_X = J_{X_1} + a_1^2 F_1 + J_{X_2} + a_2^2 F_2 = \frac{b_1 h^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b_2 h}{2} =$$

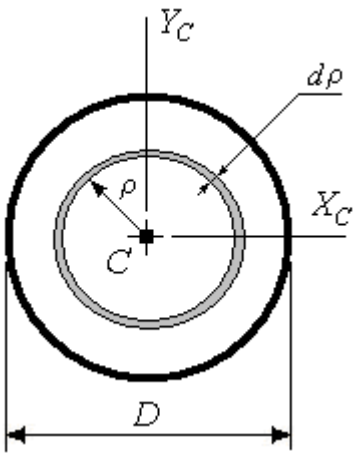
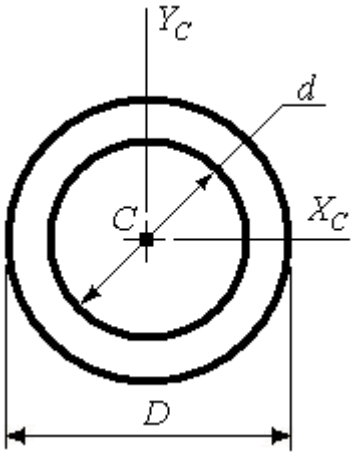
$$= \frac{h^3}{36}\left(b_1 + b_2\right) + \frac{h^3}{18}\left(b_1 + b_2\right) = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

$$J_Y = J_{Y_1} + k_1^2 F_1 + J_{Y_2} + k_2^2 F_2 = \frac{hb_1^3}{36} + \left(\frac{b_1}{3}\right)^2 \frac{b_1 h}{2} + \frac{hb_2^3}{36} + \left(\frac{b_2}{3}\right)^2 \frac{b_2 h}{2} =$$

$$= \frac{h}{36}\left(b_1^3 + b_2^3\right) + \frac{h}{18}\left(b_1^3 + b_2^3\right) = \frac{h\left(b_1^3 + b_2^3\right)}{12}.$$

$$J_{XY} = J_{X_c Y_1} + a_1 k_1 F_1 + J_{X_c Y_2} + a_2 k_2 F_2 = \frac{b_1^2 h^2}{72} + \frac{h}{3}\left(-\frac{b_1}{3}\right)\frac{b_1 h}{2} -$$

$$-\frac{b_2^2 h^2}{72} + \frac{h}{3}\frac{b_2}{3}\frac{b_2 h}{2} = \frac{h^2}{72}\left(b_1^2 - b_2^2\right) - \frac{h^2}{18}\left(b_1^2 - b_2^2\right) = -\frac{h^2\left(b_1^2 - b_2^2\right)}{24}.$$

 Рис. 1.10 *е*. Сечение – круг	$J_\rho = \int\limits_F \rho^2 dF = \int\limits_0^{D/2} \rho^2 2\pi\ \rho\, d\rho = \dfrac{\pi\, d^4}{32}.$ Здесь $dF=2\pi\ \rho\ d\rho$. Поскольку $J_\rho = J_{X_c} + J_{Y_c}$ и $J_{X_c} = J_{Y_c}$, получим $J_{X_c} = J_{Y_c} = \dfrac{\pi\, D^4}{64}.$
 Рис. 1.10 *ж*. Сечение – кольцо	Используем понятие «сложное сечение»: кольцо – из круга большего диаметра удалим круг меньшего диаметра. $J_\rho = \dfrac{\pi\, D^4}{32} - \dfrac{\pi\, d^4}{32} = \dfrac{\pi\, D^4}{32}\left[1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right].$ $J_\rho = \dfrac{\pi\, D^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right)$, где $\alpha = \dfrac{d}{D}.$ $J_{X_c} = J_{Y_c} = \dfrac{\pi\, D^4}{64}\left(1 - \alpha^4\right).$