

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

2.1. Необходимость построения эпюр. Общие правила и порядок их построения.

Первый вопрос, на который должен получить ответ конструктор, – какие по величине и направлению внутренние силовые факторы (ВСФ) действуют в различных сечениях вдоль оси бруса. Это **необходимо** для определения **вида нагружения** (по действующим ВСФ) и выбора так называемого **опасного сечения** (определяется величиной ВСФ). С этой целью строят графики, которые носят название **эпюры**.

Графики, показывающие изменение внутренних усилий и моментов в сечениях по длине бруса, называются эпюрами усилий и моментов (эпюрами ВСФ).

В каждом сечении тела, естественно, внутренние усилия и моменты различны по величине и направлению. Таким образом, эпюры дают картину распределения ВСФ по длине бруса.

2.1.1. Общие правила построения эпюр.

1. Эпюра строится для каждого из ВСФ, т.е. для каждого ВСФ имеем **отдельный график**.

2. Определяются **границы участков бруса**. В общем случае **границы участков – это сечения бруса**, в которых:

– **приложены сосредоточенные силы;**

– **начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки;**

– **опорные и концевые сечения**. В некоторых случаях в качестве границ участков берут сечения, в которых изменяется **форма** или **размеры** поперечного сечения бруса или сечения, в которых изменяется **материал** бруса.

3. **Ось эпюры** всегда проводится **параллельно оси бруса**.

4. **Ординаты ВСФ** на эпюре откладываются **по нормали к оси эпюры**.

5. Для **каждого из ВСФ** принимается **определенное правило знаков**.

6. **Ордината** на эпюре показывает величину и знак внутреннего усилия или момента, действующего в том сечении тела, где расположена эта ордината.

7. **Ординаты** откладываются строго **в масштабе с учетом знака ВСФ**. На эпюрах проставляются числа, показывающие значения ВСФ в характерных сечениях и их размерность.

8. На эпюры **наносится штриховка**, показывающая направление отсчета ординат (т.е. штриховка наносится **перпендикулярно оси бруса**).

2.1.2. Порядок построения эпюры

1. Изображается **схема бруса** с приложенными внешними силами.

2. С использованием уравнений равновесия определяются **величина и направление опорных реакций**.

3. Определяются **границы участков**.

4. На каждом участке **проводится произвольное сечение** и указывается его текущая координата.

5. Для каждого участка с учетом правила знаков **записывается в общем виде выражение** для определяемого внутреннего силового фактора.

6. В общем выражении ВСФ для рассматриваемого участка подставляются значения координат начала и конца этого участка – **определяются значения ординат эпюры**.

7. **Значения ординат** откладываются **на оси эпюры** с учетом знака и выбранного масштаба.

8. Наносится **штриховка**, проставляются **знаки**, указывается **обозначение ВСФ**, для которого построена эпюра, и его **размерность**.

2.2. Построение и контроль эпюр продольных сил

Продольная (нормальная) **сила** N в произвольном сечении – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме проекций на ось бруса (нормаль к сечению) внешних сил (в том числе и **реакций**), действующих на брус по одну сторону от сечения.

Брус, работающий на растяжение-сжатие, называют **стержнем**.

Правило знаков следующее (рис. 2.1).

Продольная сила считается **положительной**, если она вызывает **растяжение** бруса (направлена от сечения), и **отрицательной**, если вызывает его **сжатие** (направлена к сечению).

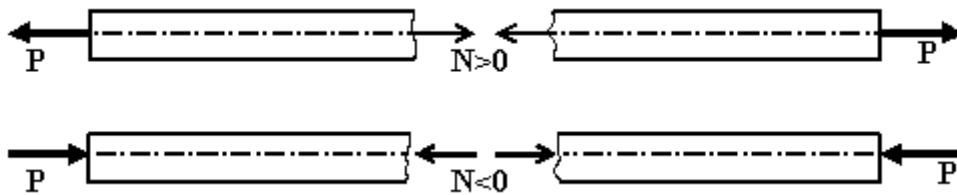


Рис. 2.1. Правило знаков для продольных сил

Пример 1: Брус постоянного сечения находится в равновесии под действием осевых сил P и P_1 (рис. 3.2 а).

Решение.

Точки приложения сил делят брус на 3 участка. На каждом участке проведем сечение и покажем его координаты от начала участка до соответствующего произвольного сечения. Эти сечения и продольные силы, действующие в них, обозначаем в соответствии с номером участка, например:

участок I, сечение с координатой z_1 , продольная сила N_{I-1} .

Таким образом:

Участок I, сечение с координатой z_1 .

Границы участка: $0 \leq z_1 \leq a$.

Запишем уравнение равновесия – сумма проекций сил на продольную ось бруса равна нулю: $\sum Z = 0$. Тогда $N_1 - P = 0$;

$N_1 = P$; $N_1 = const$ – уравнение прямой параллельной оси бруса.

Участок II, сечение с координатой z_2 .

Границы участка: $0 \leq z_2 \leq b$

Уравнение равновесия: $\sum Z = 0$; $N_2 + P_1 - P = 0$;

$N_2 = P - P_1$; $N_2 = const$ – уравнение прямой параллельной оси бруса.

Участок III, сечение с координатой z_3 .

Границы участка: $0 \leq z_3 \leq c$

Уравнение равновесия: $\sum Z = 0$; $N_3 + P = 0$;

$N_3 = -P$; $N_3 = const$ – уравнение прямой параллельной оси бруса.

В данной задаче возможны 3 случая.

1. $P > P_1$; $N_2 > 0$;

2. $P = P_1$; $N_2 = 0$;

$$3. P < P_1; N_2 < 0.$$

Проводим ось, параллельную оси бруса, и строим эпюру продольных сил для первого случая (рис. 2.2 б). Аналогичным образом строят эпюры для второго и третьего случаев (рис. 2.2 в, г).

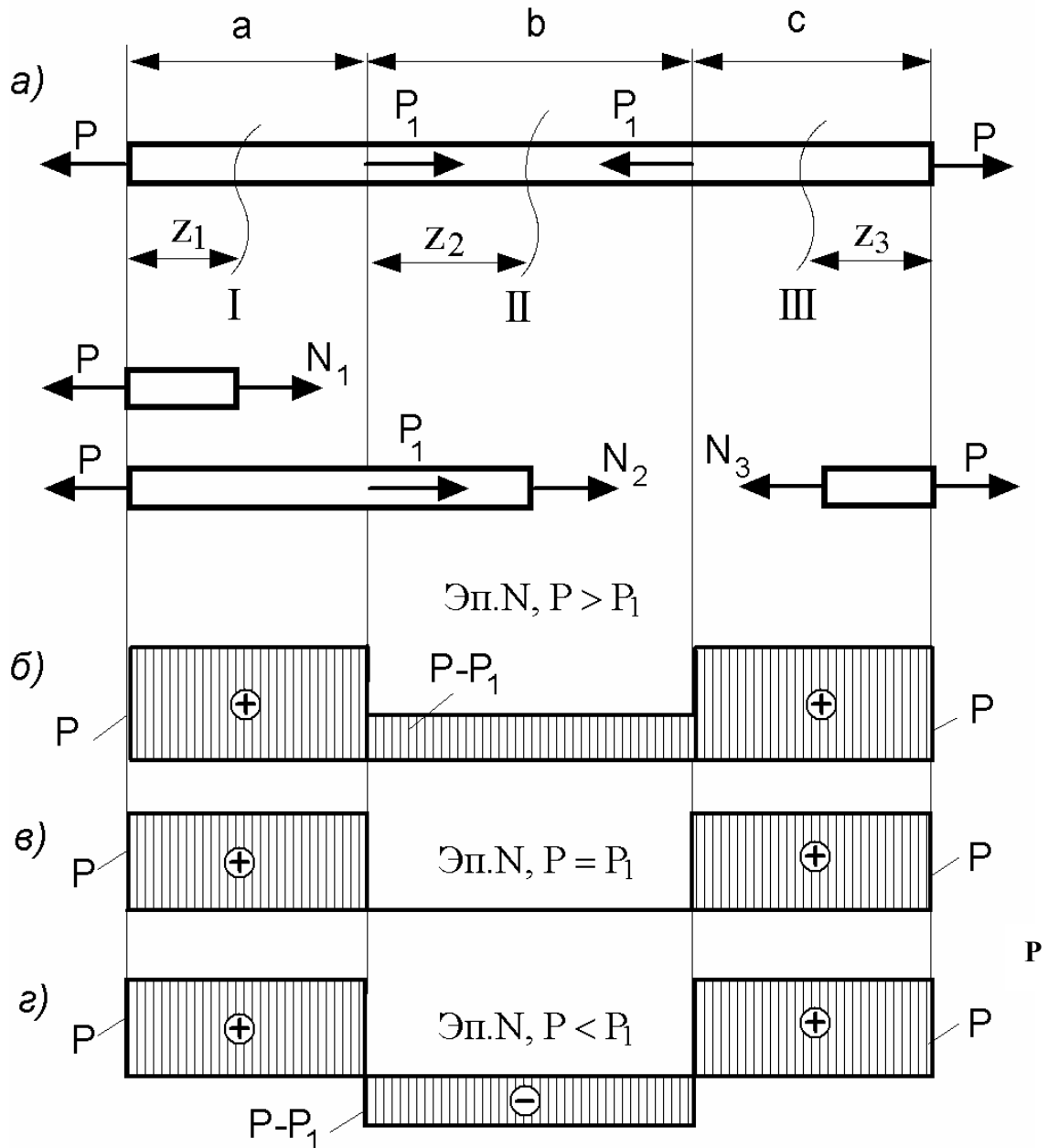


Рис.2.2. Расчетная схема стержня и эпюры N к примеру 1

Пример 2. Брус постоянного сечения A заземлен одним концом и нагружен несколькими силами (в кН), показанными на схеме (рис. 2.3). Построить эпюру продольных сил.

Решение.

Брус имеет 3 участка.

При рассмотрении участков справа налево можно обойтись без определения опорной реакции.

Рассмотрим равновесие отсеченной правой части, записывая и решая для каждого участка уравнения равновесия $\sum Z = 0$.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 1$ м;

$$30 - N_1 = 0; N_1 = 30 \text{ кН.}$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 1$ м;

$$30 + 20 - N_2 = 0; N_2 = 50 \text{ кН}$$

Участок III: $0 \leq z_3 \leq 1$ м.

$$30 + 20 - 70 - N_3 = 0; N_3 = -20 \text{ кН}$$

По результатам расчетов строим эюру N .

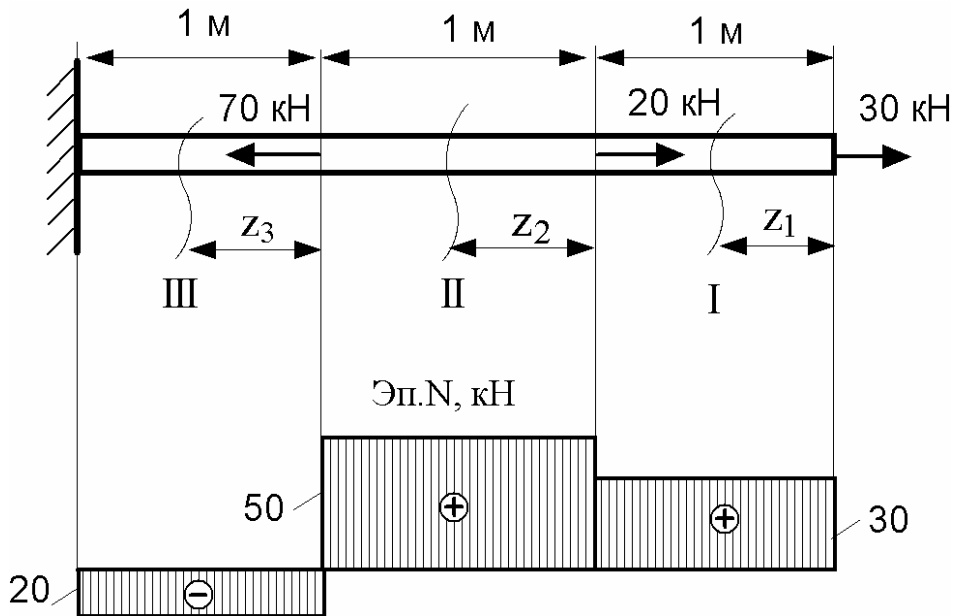


Рис. 2.3. Расчетная схема и эюра N к примеру 2

Пример 3.

Для бруса переменного сечения (рис. 3.4) построить эюру продольных сил с учетом собственного веса материала бруса – $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$. Площадь поперечного сечения $A = 10 \text{ см}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2$.

Решение.

Брус имеет 2 участка.

При рассмотрении участков снизу вверх можно обойтись без определения опорной реакции.

Рассмотрим равновесие отсеченной нижней части, записывая и решая для каждого участка уравнения равновесия $\sum Z = 0$.

При записи уравнений имеем в виду:

Собственный вес – это равномерно распределенная по длине участка нагрузка.

Интенсивность ее определяется произведением удельного веса материала на площадь поперечного сечения: $q = \gamma A$.

На первом участке $q_1 = \gamma A$, а на втором – $q_2 = \gamma 2A$.

Направление этой нагрузки – вертикально вниз, вдоль оси стержня.

Величина продольной силы равна произведению интенсивности распределенной нагрузки на длину участка, имеющего постоянную площадь.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 1$ м;

$$0,1 + \gamma A z_1 - N_1 = 0.$$

При $z_1 = 0; N_1 = 0,1 \text{ кН}$.

При $z_1 = 1 \text{ м}; N_1 = 0,1 + 78 \times 10^{-3} \times 1 = 0,178 \text{ кН}$.

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м}$;

$0,1 + \gamma A z_1 + \gamma 2 A z_2 - N_2 = 0$.

При $z_2 = 0; N_2 = 0,178 \text{ кН}$.

При $z_2 = 1 \text{ м}; N_2 = 0,1 + 78 \times 10^{-3} \times 1 + 78 \times 2 \times 10^{-3} \times 1 = 0,334 \text{ кН}$.

По результатам расчетов строим эпюру N .

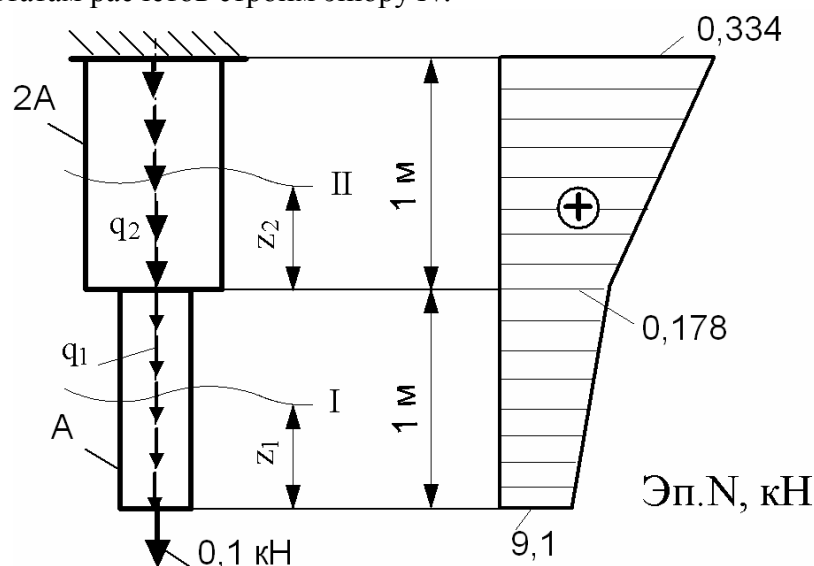


Рис. 2.4. Расчетная схема и эпюра N к примеру 3

Из рассмотренных примеров построения эпюр продольных сил следует:

1. Если брус нагружен только **сосредоточенными силами**, то эпюра продольных сил ограничена **прямыми, параллельными оси эпюры**.

2. В сечениях, где **приложены сосредоточенные силы**, эпюра N имеет **скачки на величину и в направлении этих сил**.

3. Если брус загружен нагрузкой, **равномерно распределенной по его длине** (в частности **собственным весом материала стержня**), то эпюра N будет ограничена **прямой, наклоненной к оси эпюры**. Наклон прямой – в соответствии с направлением вектора силы.

4. В сечениях, где **изменяется форма и размеры сечения** (площадь сечения A), на эпюре N **изменений нет**. За исключением случая действия собственного веса – на эпюре N в этих сечениях **изменяется угол наклона** прямой.

ЭТИ ПРАВИЛА ИСПОЛЬЗУЮТ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ.

Их можно также использовать непосредственно при построении эпюр.

2.3. Построение и контроль эпюр крутящих моментов.

Крутящий момент M_z или $M_{кр}$ в произвольном сечении – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме скручивающих моментов (в том числе и опорных моментов), действующих на брус по одну сторону от сечения.

Брус, работающий на кручение, называют **валом**.

Скручивающим моментом называется *внешняя пара сил, плоскость действия которой перпендикулярна к оси вала*. То есть этот момент действует относительно продольной оси бруса.

Условимся считать, что на опорах (в подшипниках) вал **вращается без трения**, т.е. в подшипниковых узлах **не возникают реактивные моменты**.

Правило знаков показано на рис. 2.5 а, б.

Крутящий момент (M_z или $M_{кр}$) считается **положительным**, если на каждую сторону сечения он действует **по ходу часовой стрелки при взгляде со стороны сечения**.

Иными словами – если крутящий момент **создается скручивающим моментом m** , действующим **против хода часовой стрелки**. Следовательно, положительный крутящий момент направлен по ходу часовой стрелки.

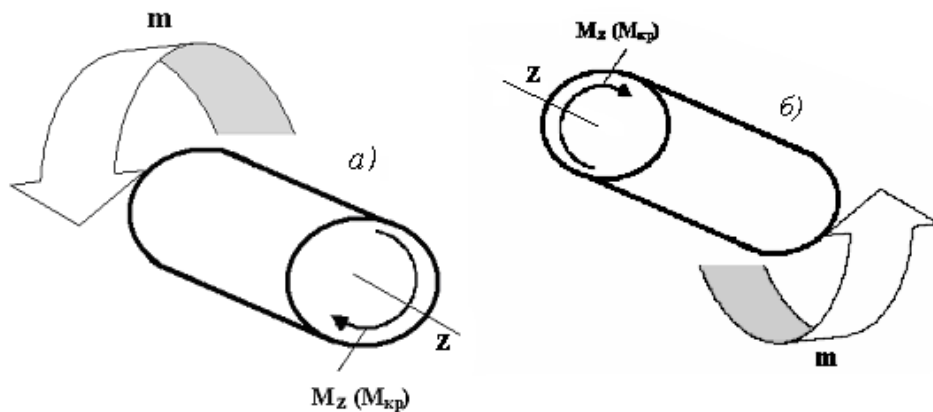


Рис. 2.5. Правило знаков крутящих моментов для левой (а) и для правой (б) частей вала

Можно использовать и более удобное обозначение внешнего (скручивающего) момента (при этом не будет путаницы с обозначением изгибающего момента). На рис. 2.6 показаны направления скручивающих моментов m (**точка** – «носик», а **+** – «хвостик» стрелки), для которых крутящие моменты M_z будут иметь знак **плюс**.

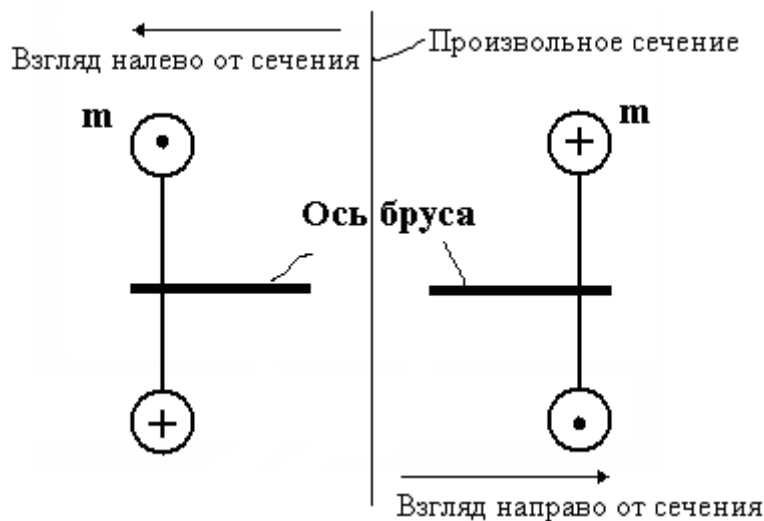


Рис. 2.6. Схематическое изображение скручивающих моментов, дающих по направлению положительное значение крутящих моментов
Моменты слева и справа по отношению к сечению поворачивают участок бруса против хода часовой стрелки.

Пример: Вал (рис. 2.7) под действием внешних скручивающих моментов

$m_1 = 3 \text{ кНм}$, $m_2 = 8 \text{ кНм}$, $m_3 = 5 \text{ кНм}$ равномерно вращается в опорах. Построить эпюру крутящих моментов.

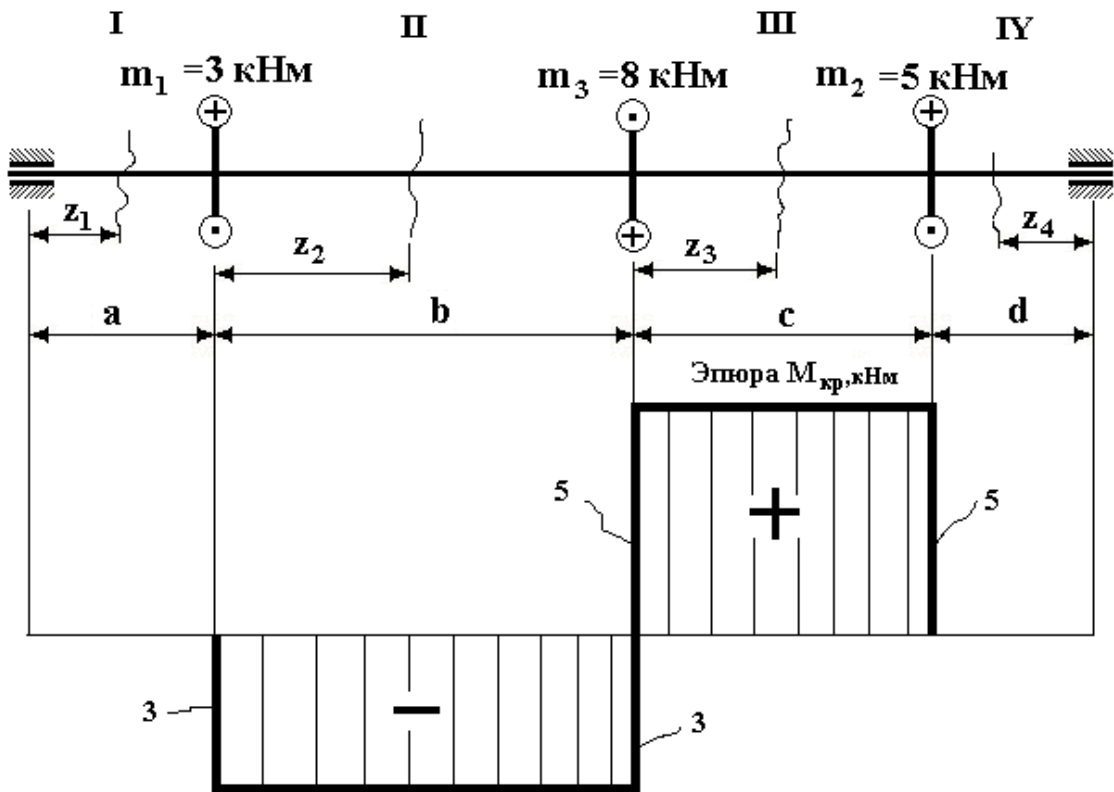


Рис. 2.7. Схема вала и эпюра крутящих моментов

Решение.

Так как вал находится в равновесии, то

$$\sum m_Z = 0. \quad m_3 - m_1 - m_2 = 0; \quad m_3 = m_1 + m_2.$$

Разбиваем вал на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние моменты.

На каждом участке проводим поперечное сечение и указываем его границы.

Рассмотрим равновесие отсеченной правой или левой части, записывая и решая для каждого участка уравнения равновесия $\sum Z = 0$, т.е. составляем выражения для крутящих моментов на каждом участке.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$; (слева от сечения опора, на которой отсутствует реакция – см. комментарий выше).

$$M_{кр1} = 0;$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq b$;

$$M_{кр2} = -m_1 = -3 \text{ кНм};$$

$$M_{кр2} = const; \quad (\text{на эпюре – прямая, параллельная оси вала}).$$

Участок III: $0 \leq z_3 \leq c$;

$$M_{кр3} = -m_1 + m_3 = -3 + 8 = 5 \text{ кНм}; \quad M_{кр3} = const; \quad (\text{на эпюре – прямая, параллельная оси вала}).$$

Участок IV: $0 \leq z_4 \leq d$; $M_{кр4} = 0$. (справа от сечения опора, на которой отсутствует реакция – см. комментарий выше).

По результатам расчетов строим эпюру $M_{кр}$.

Заметим, что на эпюрах $M_{кр}$ знаки чаще всего не ставятся, поэтому и правило знаков можно считать условным.

Из рассмотрения методики построения эпюры крутящих моментов следует:

1. Эпюра $M_{кр}$ ограничена **прямыми, параллельными** оси эпюры.
2. В сечениях, где **приложены внешние моменты** на эпюре $M_{кр}$ **скачки** на величину и в направлении этих моментов.

Эти правила используют для контроля правильности построения эпюр крутящих моментов.

Их можно также использовать непосредственно при построении эпюр.

2.4. Построение и контроль эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для статически определимых балок

2.4.1. Балки и их опоры. *Прямолинейные стержни, испытывающие плоский изгиб, называются балками.* При расчетах балки заменяют их осями, а нагрузку, приложенную к ним, приводят к осям. Балки опираются на различные опорные устройства – опоры.

Внешняя нагрузка, действующая на балки, уравнивается реакциями опор, вид которых зависит от типа опор. Все опорные реакции приложены в центре тяжести опорных сечений.

Различают три типа плоских опор. Типы опор и вид реакций мы рассмотрели ранее (см. рис. 1.5, 1.6, 1.7).

Различают следующие виды балок: **консольная, двух опорная однопролетная, многопролетная шарнирная, многопролетная неразрезная.** На практике встречаются различные варианты балок – например, однопролетная с одной или двумя консолями.

1. Консольная – это балка, **зашемленная одним концом и не имеющая других опор** (рис. 2.8 а). **Свешивающийся за опору конец балки** называют **консолью** (рис. 2.8 б).



Рис. 2.8. Консольная балка (а) и консоль (б)

2. Двух опорная балка – балка, в которой **обе опоры установлены по ее концам** (рис. 3.9 а). **Расстояние между опорами**, называется **пролетом**.

Если одна из опор установлена на некотором расстоянии от конца балки, получаем **одноконсольную балку** (рис. 2.9 б); если обе опоры установлены на некотором расстоянии от конца балки, получаем **двухконсольную балку** (рис. 2.9 в).

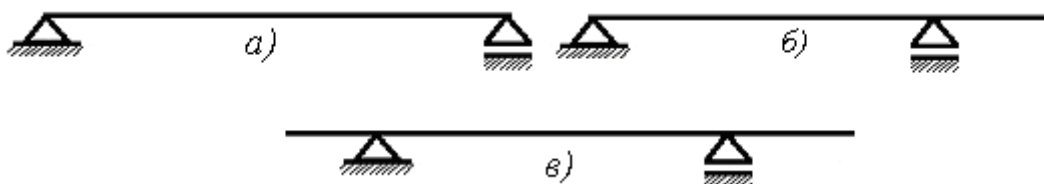


Рис. 2.9. Двух опорные балки без консолей, с одной или двумя консолями

3. Многопролетная шарнирная балка – балка, имеющая **два и более пролетов**

(*лежит более чем на двух опорах*) с установленными в пролетах промежуточными шарнирами (рис. 2.10).



Рис. 2.10. Многопролетная шарнирная балка

3. *Многопролетная неразрезная балка* – балка, лежащая более чем на двух опорах и не имеющая промежуточных шарниров (рис. 2.11).

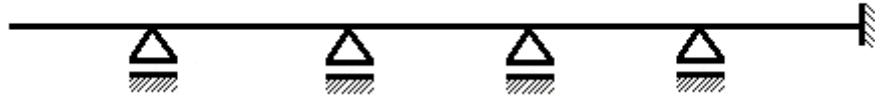


Рис. 2.11. Многопролетная неразрезная балка

Из курса теоретической механики известно, что для **плоской системы сил, можно составить три уравнения равновесия статики.**

Поэтому, если число неизвестных опорных реакций не более трех, то балка **статически определима** (рис. 2.8 а – 2. 10) .

Если число неизвестных реакций более трех, балка является **статически неопределимой** (рис. 2.11). Расчет статически неопределимых балок производится с учетом их деформации под нагрузкой.

2.4.2. Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов. Отметим, что решение ведем в принятой нами системе координат: продольная ось – Z , вертикальная – Y , перпендикулярная плоскости чертежа – X .

Поперечная сила Q_x или Q_y в произвольном сечении балки – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, включая реакции опор, действующих на балку по одну сторону от сечения.

Поперечная сила в сечении балки считается **положительной** (рис. 2.12), если равнодействующая внешних сил, приложенных **по левую сторону** от сечения, направлена **вверх**, а равнодействующая внешних сил, приложенных **по правую сторону** от сечения, направлена **вниз**.

Иначе говоря, **равнодействующая от внешних сил поворачивает участок бруса по отношению к сечению по часовой стрелке.**

На рис. 2.12 показаны равнодействующие внешних сил P , действующие в вертикальной плоскости, и соответствующие им поперечные силы Q_y .

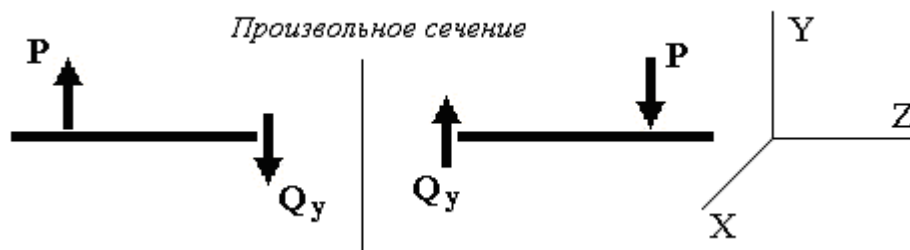


Рис. 2.12. Правило знаков для поперечной силы

Изгибающий момент M_x или M_y в произвольном сечении балки – это внутренний силовой фактор, численно равный алгебраической сумме моментов относительно оси, перпендикулярной к оси балки, от всех внешних сил (включая реакции опор), действующих на балку по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент считается **положительным** (рис. 2.13), если его действие вызывает **сжатие верхних волокон** поперечного сечения балки (и, соответственно, **растяжение нижних волокон**).

Эпюра M в строительных специальностях строится на растянутом волокне, т.е. положительные значения момента откладываются вниз от нулевой линии в балках.

На рис. 2.13 показаны моменты m от внешних сил, действующие относительно оси X , перпендикулярной продольной оси балки Z (они создаются, в частности вертикальными силами), и соответствующие им изгибающие моменты M_x .



Рис. 2.13. Правило знаков для изгибающего момента

2.4.3. Примеры построения эпюр.

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр для балок.

Пример 1.

Для консольной балки AB длиной l , нагруженной в сечении B сосредоточенным моментом m (рис. 2.14 а), сосредоточенной силой P (рис. 2.14 б) или распределенной нагрузкой интенсивностью $q = \text{const}$ по всей длине AB (рис. 2.14 в), построить эпюры Q и M .

Для удобства дальнейшего анализа (см. п.2.5) выразим силу и момент через интенсивность, например:

$$P = ql; \quad m = ql^2,$$

где l – длина участка, где приложена распределенная нагрузка (в данных примерах – длина консоли).

Решение задачи.

Для балок, заземленных одним концом, опорные реакции (реакции в заделке A) можно не определять.

Рассекаем балку произвольным сечением с координатой z и отбрасываем левую часть балки (вместе с заделкой).

Балки для всех схем имеют **один** участок: $0 \leq z \leq l$.

Рассмотрим равновесие отсеченной правой части, записывая и решая для данного участка уравнения равновесия в принятой системе координат. При **изгибе** из шести

уравнений равновесия **только два** уравнения дадут результат:

$$\sum Y = 0; \quad \sum m_x = 0.$$

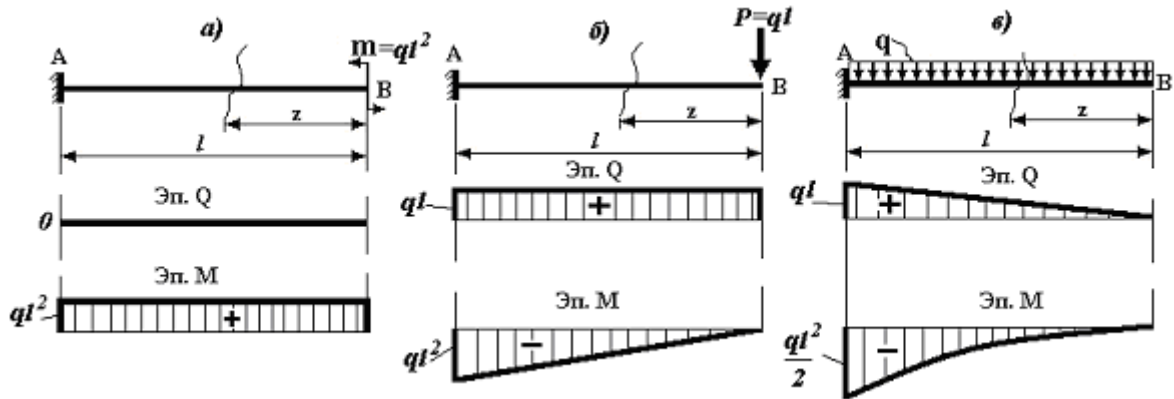


Рис. 2.14. Эпюры для консольной балки от простейших нагрузок (для строительных специальностей эпюра моментов должна быть зеркально отражена)

Таким образом, для рассматриваемых вариантов решение указанных уравнений даст:

2.14 а – $Q = 0$ – график прямой, проходящей по оси эпюры.

$M = m = ql^2$ – график прямой, параллельной оси эпюры.

2.14 б – $Q = P = ql$ – график прямой, параллельной оси эпюры.

$M = -Pz = -qlz$ – график наклонной прямой:

при $z = 0$, $M = 0$; при $z = l$, $M = ql^2$.

2.14 в – $Q = qz$ – график наклонной прямой,

$M = -\frac{qz^2}{2}$ – график кривой второго порядка (параболы).

Так как эпюра на рис. 2.14 в) построена на сжатом волокне, то выпуклость параболы – навстречу нагрузке. Для строительных специальностей эпюра строится на растянутом волокне, а следовательно, **выпуклость параболы должна быть направлена в ту же сторону, что и распределенная нагрузка.**

При $z = 0$, $Q = 0$; $M = 0$;

при $z = l$, $Q = ql$; $M = -\frac{ql^2}{2}$.

Для пояснения полученного для изгибающего момента выражения рассмотрим схемы (рис. 2.15).

На схеме (2.15 а) нагрузка интенсивностью q приложена по всему участку длиной l . Момент в произвольном сечении с координатой z определится произведением равнодействующей $Q = qz$, приложенной в середине (т.е. в сечении с координатой $\frac{z}{2}$),

на плечо $\frac{z}{2}$. Получим: $M = -qz \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}$. Подставляя значения границ участка по-

лучим соответственно 0 и $-\frac{ql^2}{2}$.

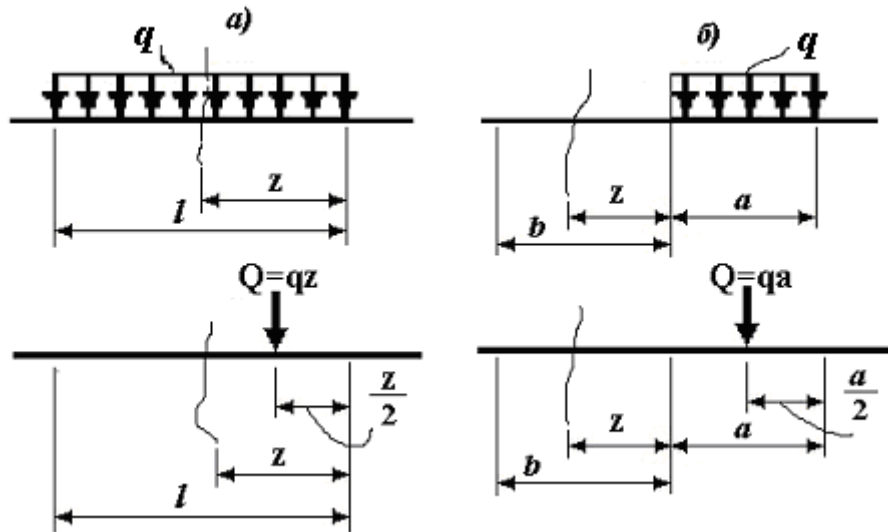


Рис. 2.15. К определению изгибающего момента от равномерно распределенной нагрузки

На схеме (2.15 б) нагрузка интенсивностью q приложена на участке длиной a . Изгибающий момент в произвольном сечении с координатой z на следующем участке (например, от 0 до b) определится произведением равнодействующей $Q = qa$, приложенной посередине этого участка, на плечо $\frac{a}{2} + z$. Получим: $M = -qa\left(\frac{a}{2} + z\right)$. Затем вместо z подставляются границы участка:

$$\text{при } z = 0 \quad M = -\frac{qa^2}{2}; \quad \text{при } z = b \quad M = -qa\left(\frac{a}{2} + b\right).$$

Пример 2. Для двух опорной балки AB с длиной пролета l , нагруженной в сечении C сосредоточенным моментом m (рис. 3.16 а), сосредоточенной силой P (рис. 2.16 б) или распределенной нагрузкой интенсивностью $q = \text{const}$ по все длине AB (рис. 2.16 в), построить эпюры Q и M .

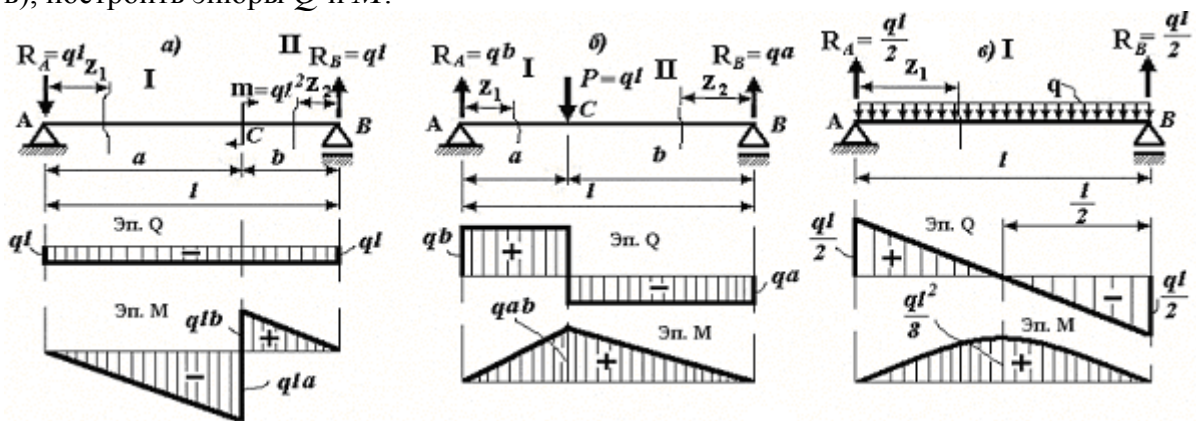


Рис. 2.16. Эпюры для двух опорной балки от простейших нагрузок (эпюры моментов показаны на сжатом волокне)

Решение задачи.

1. Определяем опорные реакции.

а) в соответствии с типом опор и видом внешней нагрузки наносим на схемы балок возможные реакции. В данной задаче, так как направления векторов P и q пер-

пендикулярны AB , то $H_A = H_B = 0$.

б) составляем и решаем уравнения статики. Всего для плоской системы можно составить 3 уравнения: два – для определения реакций и третье – для проверки правильности решения этой части задачи.

Рекомендация: для контроля используем уравнение $\sum Y = 0$. Контроль необходимо проводить обязательно!

Схема 2.16 а:

1. Определяем опорные реакции.

$$1) \sum m_A = 0, R_B l - m = 0; R_B = \frac{ql^2}{l} = ql.$$

$$2) \sum m_B = 0, R_A l - m = 0; R_A = \frac{ql^2}{l} = ql.$$

$$3) \sum Y = 0, -R_A + R_B = 0; -ql + ql = 0.$$

Получили тождество вида $0 \equiv 0$, следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

2. Разбиваем балку на участки. В данной схеме – 2 участка.

3. На каждом участке проводим произвольное сечение и указываем его координаты от начала рассматриваемого участка.

Исходя из метода сечений, нумерация участков произвольна. Произвольным является и выбор части бруса, для которой пишутся уравнения ВСФ.

4. Отбрасываем одну из частей балки и для оставшейся части **составляем уравнения** для поперечной силы и изгибающего момента.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$; (слева направо).

$Q_1 = -R_A = -ql$, $Q_1 = const$ – график прямой, параллельной оси эпюры.

$M_1 = -R_A z_1 = -qlz_1$ – уравнение наклонной прямой.

При $z_1 = 0$, $M_1 = 0$, при $z_1 = a$, $M_1 = qla$.

Участок II: $0 \leq z_2 \leq b$; (справа налево).

$Q_2 = R_B = -ql$, $Q_2 = const$ – график прямой, параллельной оси эпюры.

$M_2 = R_B \cdot z_2 = qlz_2$ – уравнение наклонной прямой.

При $z_2 = 0$, $M_2 = 0$, при $z_2 = b$, $M_2 = qlb$.

5. По вычисленным значениям строим эпюры Q и M .

Схема 3.16 б:

1. Определяем опорные реакции.

$$1) \sum m_A = 0, R_B(a+b) - Pa = 0, R_B = \frac{P \cdot a}{a+b} = qa.$$

$$2) \sum m_B = 0, Pb - R_A(a+b) = 0, R_A = \frac{P \cdot b}{a+b} = qb.$$

$$3) \sum Y = 0, R_A - P + R_B = 0; \frac{P \cdot b}{a+b} - P + \frac{P \cdot a}{a+b} = 0.$$

Получили тождество вида $0 \equiv 0$, следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

2. Разбиваем балку на участки. В данной схеме – 2 участка.

3. На каждом участке проводим произвольное сечение и указываем его координаты от начала рассматриваемого участка.

4. Отбрасываем одну из частей балки и для оставшейся части **составляем уравнения** для поперечной силы и изгибающего момента.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$; (слева направо).

$Q_1 = R_A = qb$, $Q_1 = const$ – график **прямой, параллельной оси эюры**.

$M_1 = R_A \cdot z_1 = qbz_1$ – уравнение **наклонной прямой**.

При $z_1 = 0$, $M_1 = 0$, при $z_1 = a$, $M_1 = qab$.

Участок II: $0 \leq z_2 \leq b$; (справа налево).

$Q_2 = -R_B = -qa$, $Q_2 = const$ – график **прямой, параллельной оси эюры**.

$M_2 = R_B \cdot z_2 = qaz_2$ – уравнение **наклонной прямой**.

При $z_2 = 0$, $M_2 = 0$, при $z_2 = b$, $M_2 = qab$.

5. По вычисленным значениям строим эюры Q и M .

Схема 3.16 в:

1. Определяем опорные реакции.

$$1) \sum m_A = 0, \quad R_B l - \frac{ql^2}{2} = 0. \quad R_B = \frac{ql}{2}.$$

$$2) \sum m_B = 0, \quad \frac{ql^2}{2} - R_A l = 0. \quad R_A = \frac{ql}{2}.$$

$$3) \sum Y = 0, \quad R_A - ql + R_B = 0.$$

Получили тождество вида $0 \equiv 0$, следовательно, опорные реакции вычислены правильно.

2. Разбиваем балку на участки. В данной схеме – 1 участок.

3. На участке проводим произвольное сечение и указываем его координаты от начала рассматриваемого участка.

4. Отбрасываем одну из частей балки и для оставшейся части **составляем уравнения** для поперечной силы и изгибающего момента.

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$; (слева направо).

$Q_1 = R_A = \frac{ql}{2} - qz_1$ – уравнение **наклонной прямой**.

При $z_1 = 0$, $Q_1 = \frac{ql}{2}$, при $z_1 = l$, $Q_1 = -\frac{ql}{2}$.

График пересекает ось, меняя знак.

$M_1 = R_A \cdot z_1 - qz \frac{z_1}{2} = \frac{ql}{2} z_1 - \frac{qz_1^2}{2}$ – график **кривой второго порядка** (параболы).

При $z_1 = 0$, $M_1 = 0$, при $z_1 = l$, $M_1 = 0$.

Видим, что значений ординат для построения параболы недостаточно.

Как будет доказано ниже (п.3.5), **третье значение ординаты** эюры моментов получим, **приравняв нулю уравнение поперечной силы** (найдем координату, при которой $Q = 0$). В этом сечении момент приобретает **экстремальное** значение.

$$\frac{ql}{2} - qz_1 = 0, \quad \text{откуда } z_1 = \frac{l}{2}. \quad \text{Тогда } M_{\max} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

5. По вычисленным значениям строим эюры Q и M .

2.5. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью нагрузки q .

2.5.1. Вывод зависимостей. Рассмотрим балку, находящуюся в равновесии под действием системы плоских сил (рис. 2.17).

На некотором расстоянии z от опоры A проведем сечение mn , и на расстоянии dz от него – сечение m_1n_1 .

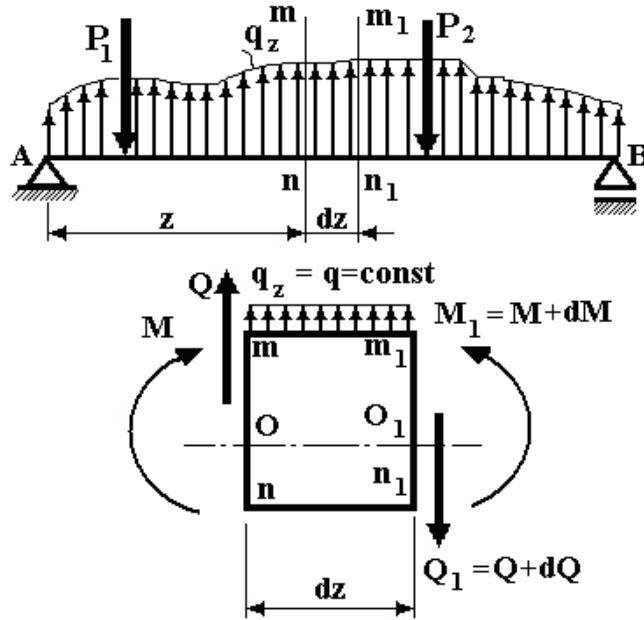


Рис. 2.17. К выводу дифференциальных зависимостей

Рассмотрим равновесие элемента длиной dz , вынесенного отдельно (см. рис. 2.17).

Нагрузку на этот элемент, вследствие бесконечно малой его длины, можно считать распределенной с постоянной величиной интенсивности q (равномерно распределенной).

Действие на выделенный элемент левой части балки заменим поперечной силой Q и изгибающим моментом M , которые действуют в сечении mn .

На элемент длиной dz действует только равномерно распределенная нагрузка, поэтому Q и M являются непрерывными функциями, зависящими от z . Следовательно, в сечении m_1n_1 (на расстоянии $z + dz$) Q и M получат бесконечно малые приращения и будут соответственно равны:

$$M_1 = M + dM ; Q_1 = Q + dQ.$$

Направления M_1 и Q_1 противоположны направлению Q и M , т.к. по условию статики они должны уравновешиваться.

Вся балка находится в равновесии, поэтому в равновесии будет находиться и выделенный элемент.

Составим и решим уравнения равновесия статики:

$$1. \sum Y = 0, \quad Q + q \cdot dz - Q_1 = 0,$$

учитывая, что $Q_1 = Q + dQ$, имеем $Q + qdz - Q - dQ = 0$, откуда получаем

$$q = \frac{dQ}{dz}. \quad (2.1)$$

Первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки в том же сечении.

$$2. \sum M_{0_1} = 0, \quad M_1 - M - Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} = 0,$$

Пренебрегая бесконечно малой величиной 2-го порядка $dz \cdot \frac{dz}{2}$, и учитывая, что $M_1 = M + dM$, получаем $M + dM - Q \cdot dz = 0$, откуда

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (2.2)$$

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.

Полученная зависимость между изгибающим моментом M и поперечной силой Q известна под названием **формулы Журавского**.

Из уравнения (2.1) и (2.2) следует, что

$$q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (2.3)$$

Вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.

Полученные зависимости удобно использовать при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил и, особенно, при контроле правильности их построения.

2.5.2. Контроль правильности построения эпюр. Анализ эпюр, построенных ранее для простых балок и схем нагружения (см. рис. 2.15 и 2.16), с учетом полученных дифференциальных зависимостей (2.1 – 2.3), дает возможность сделать следующие выводы, которые можно использовать для контроля.

Отметим:

СТУДЕНТ, ОВЛАДЕВШИЙ НИЖЕ ПЕРЕЧИСЛЕННЫМИ ПРАВИЛАМИ, ЛЕГКО МОЖЕТ СТРОИТЬ ЭПЮРЫ БЕЗ ДОСТАТОЧНО ТРУДОЕМКИХ РАСЧЕТОВ.

1. На конце консоли:

- а) $Q = 0$, если в этом сечении не приложена сосредоточенная сила;
- б) $M = 0$, если в этом сечении не приложен сосредоточенный момент.

2. В защемлении (в заделке):

Q и M равны, соответственно, опорной реакции и опорному моменту.

3. На концевой шарнирной опоре:

- а) Q равна по величине и знаку реакции на этой опоре;
- б) $M = 0$, если в опорном сечении не приложен сосредоточенный момент.

4. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты:

- а) на эпюре моментов – скачки на величину и в направлении этих моментов;
- б) на эпюре Q изменений нет.

5. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

- а) на эпюре Q – **скачки** на величину и в направлении этих сил;
 б) на эпюре M – **изломы**, т.е. резкие изменения угла наклона линий, ограничивающих эпюру на смежных участках.

6. На участках балки, загруженных равномерно распределенной нагрузкой:

- а) эпюра Q ограничена **наклонными прямыми**;
 б) эпюра M ограничена **квадратной параболой** при этом:
- наклон эпюры Q направлен в сторону действия интенсивности q , а величина общего уменьшения или возрастания ординат Q равна равнодействующей распределенной нагрузки (произведению интенсивности на длину участка);
 - на эпюре M выпуклость параболы обращена **навстречу нагрузке q** .

7. Если на границе смежных участков эпюра Q не имеет скачка:

линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются без излома (иначе – см. п.5 б).

Обратимся к анализу полученных ранее дифференциальных зависимостей и определим возможности их для контроля.

Рассмотрим график кривой – параболы, которой, как мы выяснили, очерчивается эпюра M (рис. 2.18) и вспомним **геометрический смысл производной и интеграла**, известные из курса высшей математики.

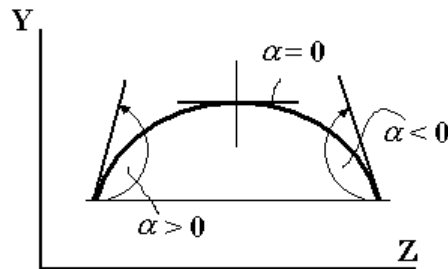


Рис. 2.18. К определению знаков для касательной к кривой

Производная какой то функции есть **тангенс угла наклона касательной, проведенной в исследуемой точке к кривой**, которая является графиком этой функции. Положительное направление отсчета этого угла – против хода часовой стрелки.

Интеграл есть **площадь под кривой**.

8. Дифференциальная зависимость (см. формулу 2.1) дает возможность проанализировать связь между интенсивностью распределенной нагрузки и поперечной силой (рис. 2.19):

$$q = \frac{dQ}{dz} = \operatorname{tg} \alpha . \text{ Поперечная сила есть неопределенный интеграл вида:}$$

$$Q = \int q dz + C. \quad (2.4)$$

- **на участках балки, свободных от распределенной нагрузки:**

$$q = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

где α – угол наклона эпюры Q в рассматриваемом сечении.

Из зависимости (2.4) следует: $Q = C$. Значит эпюра Q ограничена **прямой, параллельной оси эпюры** (на рис. 2.19 – не показана).

- На участках балки, где $q = const$

$Q = qz + C$, следовательно эпюра Q – наклонная прямая:

на участках балки, где $q > 0$; $tg \alpha > 0$. Поперечная сила возрастает.

Эпюра Q имеет наклон слева вверх налево (отсчет угла α против часовой стрелки);

на участках балки, где $q < 0$; $tg \alpha < 0$. Поперечная сила убывает.

Эпюра Q имеет наклон слева вниз направо (отсчет угла α по часовой стрелке).

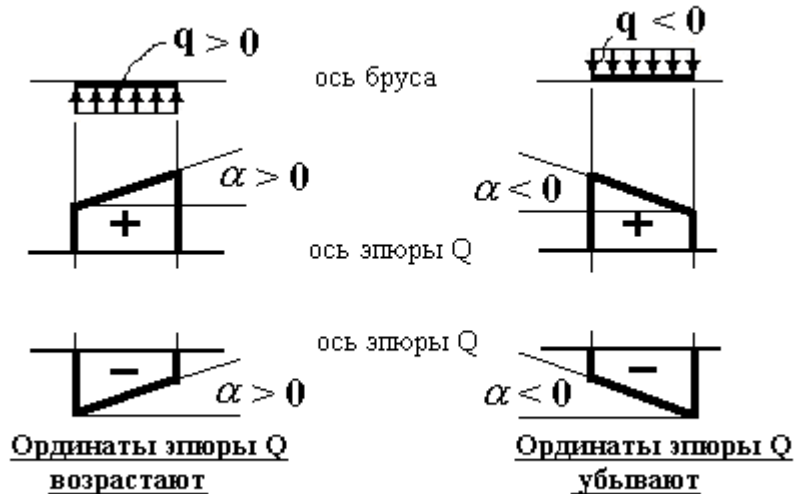


Рис. 2.19. Графическая связь между q и Q

9. Дифференциальная зависимость (см. формулу 2.2) дает возможность проанализировать связь между поперечной силой и изгибающим моментом (рис. 2.20).

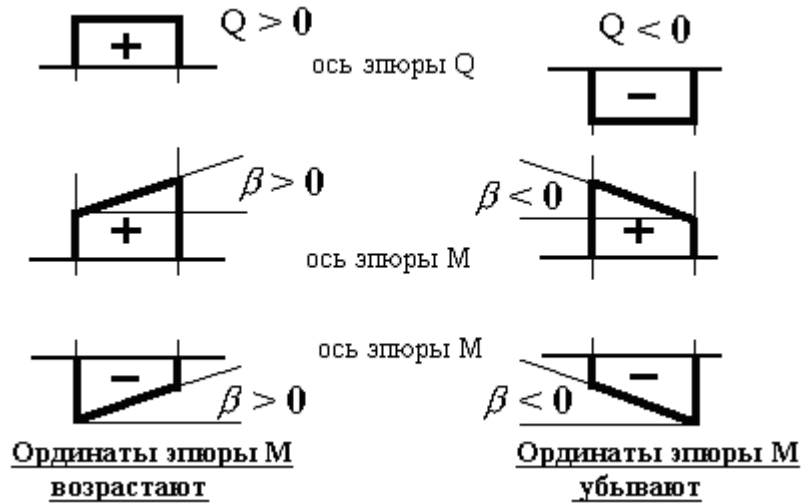
$Q = \frac{dM}{dz} = tg \beta$. Изгибающий момент есть неопределенный интеграл вида:

$$M = \int Q dz + D. \quad (2.5)$$

- На участке балки, свободном от поперечной силы:

$$Q = 0; \quad tg \beta = 0,$$

где β – угол наклона прямой на эпюре M в данном сечении.

Рис. 2.20. Графическая связь между Q и M

Из зависимости (2.5) следует: $M = D$. Значит эюра M ограничена прямой, параллельной оси эюры.

- На участках балки, где $Q = const$

$M = Qz + D$, следовательно эюра M – наклонная прямая:

на участках балки, где $Q > 0$; $tg\beta > 0$. Изгибающий момент *возрастает*. Эюра M имеет наклон слева вверх налево (отсчет угла β против часовой стрелки);

на участках балки, где $Q < 0$; $tg\beta < 0$. Изгибающий момент *убывает*. Эюра M имеет наклон слева вниз направо (отсчет угла β по часовой стрелке).

10. Дифференциальная зависимость (см. формулу 2.3) дает возможность проанализировать связь между интенсивностью распределенной нагрузки и изгибающим моментом (рис. 2.21).

$q = \frac{d^2 M}{dz^2}$. Изгибающий момент есть неопределенный интеграл вида:

$$M = \int(\int q dz + C) dz + D. \quad (2.6)$$

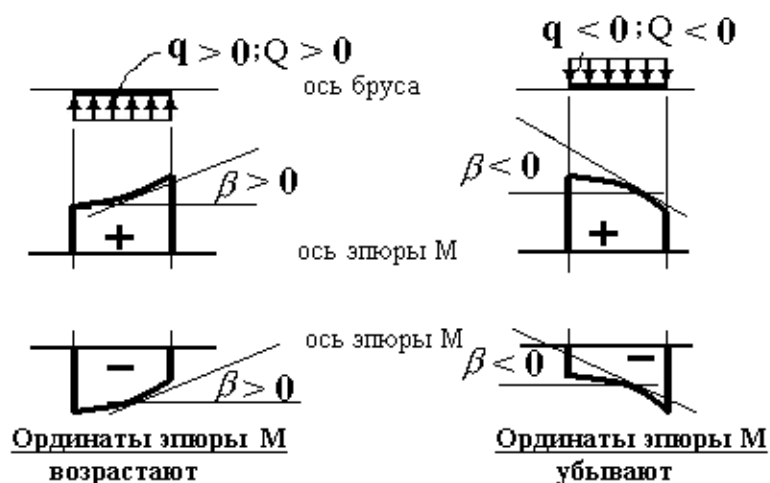
- На участке балки, свободном от распределенной нагрузки $q = 0$:

$Q = C$. Значит эюра Q ограничена прямой, параллельной оси эюры.

$M = Cz + D$, следовательно эюра M – наклонная прямая (на рис. 2.21 – не показаны).

- На участках балки, где $q = const$

$$M = \int(qz + C) dz + D = \frac{qz^2}{2} + Cz + D, \quad (2.7)$$

Рис. 2.21. Графическая связь между q и M

следовательно эпюра M – кривая второго порядка – парабола с выпуклостью навстречу распределенной нагрузке:

на участках балки, где $Q > 0$; $tg\beta > 0$. Изгибающий момент возрастает. Эпюра M имеет наклон касательных слева вверх направо (отсчет угла β против часовой стрелки);

на участках балки, где $Q < 0$; $tg\beta < 0$. Изгибающий момент убывает. Эпюра M имеет наклон касательных слева вниз направо (отсчет угла β по часовой стрелке).

11. Важным является случай, когда Q переходит через 0, меняя знак (рис.

2.22). При этом, $Q = \frac{dM}{dz} = 0$.

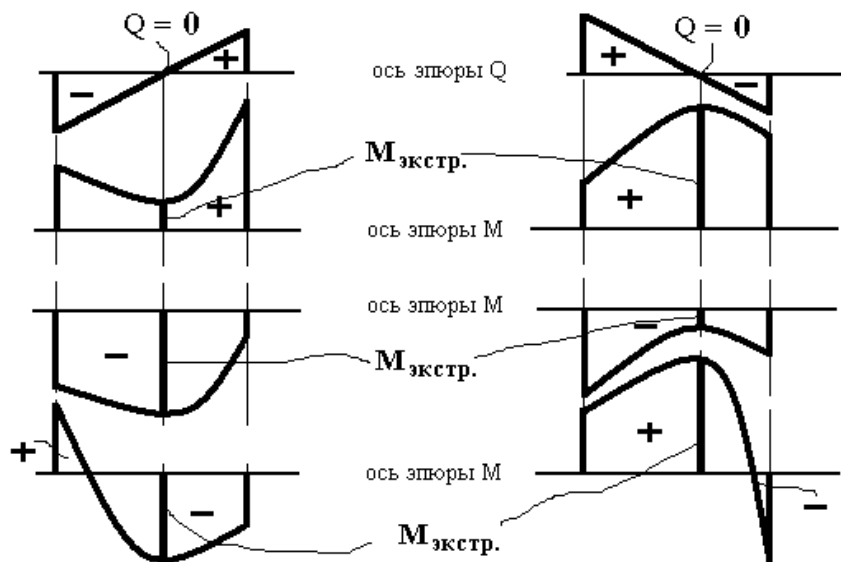


Рис. 2.22. Возможные варианты эпюр изгибающих моментов с экстремумами (эпюры моментов показаны на сжатом волокне)

Это есть **условие экстремума функции** – в сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент получает экстремальное значение (в обозначениях на рис. 2.18 – при угле α равном нулю):

- Если Q меняет знак с «+» на «-», то момент M принимает значение \max (с учетом знака момента);
- если Q меняет знак с «-» на «+», момент M принимает значение \min (с учетом знака момента).

Вспомним, что при решении задачи для схемы 2.16 б мы проводили исследование на экстремум для определения третьего значения ординаты изгибающего момента.

2.5.3. Примеры практического использования дифференциальных зависимостей и правил контроля. Студенты, успешно овладевшие методикой построения эпюр и использования дифференциальных зависимостей и правил контроля, могут строить эпюры без проведения подробных выкладок.

Проанализируем, как это делается на рассмотренных ранее примерах, схемы и эпюры (см. рис. 2.14 и 2.16), вспомнив попутно комментарии (п. 7) о *графическом смысле интеграла*, как *площади под кривой*. Изобразим здесь только схемы с указанием значений опорных реакций (рис. 2.23).

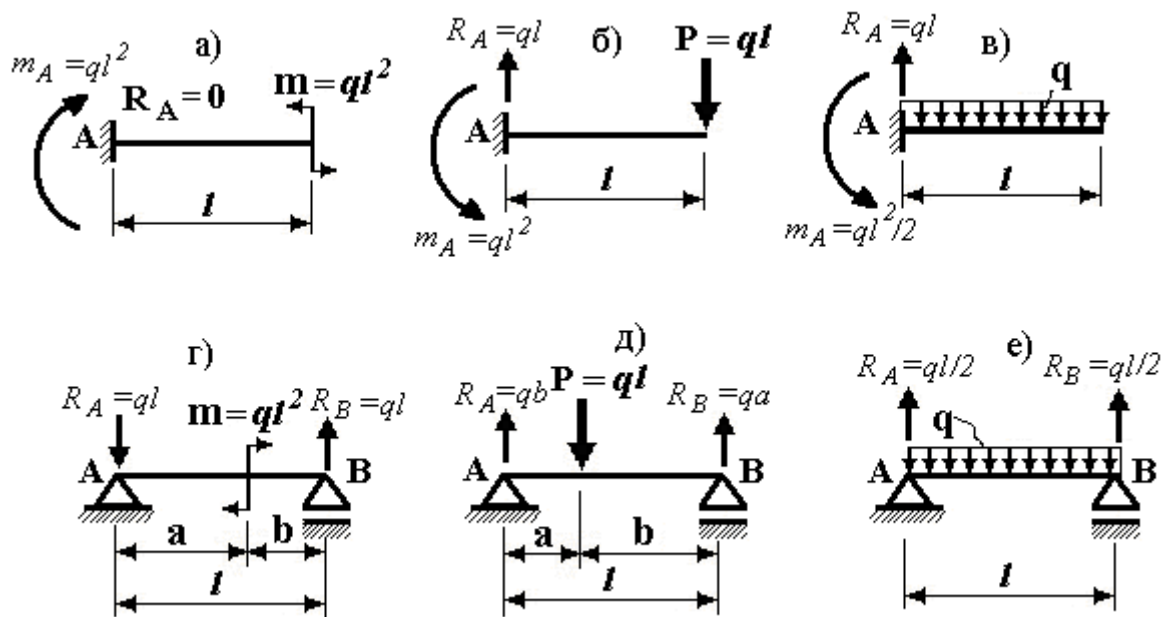


Рис. 2.23. Расчетные схемы балок (см. рис. 2.14 и 2.16)

Схема на рис. 2.14 а и 2.23 а:

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно $q = 0$.

На эпюре Q – прямая, параллельная оси эпюры. Исходя из дифференциальных зависимостей, $Q = C = 0$ (т.к. отсутствует сосредоточенные внешняя сила и реакция).

На эпюре M – прямая, параллельная оси эпюры. На концевой опоре и в заделке скачки, по величине и направлению соответствующие: на конце консоли – внешнему моменту, в заделке – опорному моменту. Из дифференциальных зависимостей: $M = D = m = ql^2$ (по правилу знаков $m > 0$).

Схема на рис. 2.14 б и 2.23 б:

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно $q = 0$.

На эпюре Q – прямая, параллельная оси эпюры. На концевой опоре и в заделке скачки, по величине и направлению соответствующие опорной реакции $R_A = ql$ и внешней силе $P = ql$. $Q = C = ql > 0$.

На эпюре M – наклонная прямая. На конце балки – 0 (не приложен сосредото-

ченный момент), в заделке – скачок на величину и по направлению равный опорному моменту $m_A = -ql^2$.

Т.к. ординаты $Q > 0$, то ординаты M должны возрасть. Учитывая, что в данном случае $M = Qz + D$, ордината увеличится на величину, равную площади эпюры Q , т.е. на конце консоли $M = ql \times l + m_A = ql^2 - ql^2 = 0$.

Схема на рис. 2.14 в и 2.23в:

К балке приложена распределенная нагрузка $q = const < 0$.

На эпюре Q – наклонная прямая (наклон в направлении q) со скачком на величину реакции $R_A = ql$ в опорном сечении. Ординаты эпюры **положительны** и должны убывать, т.к. $q < 0$. На конце консоли $Q = qz + C$. Следовательно, $Q = -ql + R_A = -ql + ql = 0$.

На эпюре M – парабола с выпуклостью навстречу нагрузке q и скачком в опорном сечении на величину опорного момента $m_A = -\frac{ql^2}{2}$. Т.к. $Q > 0$, то ординаты M должны возрасть. На конце консоли $M = \frac{qz^2}{2} + Cz + D = -\frac{ql^2}{2} + ql \times l - \frac{ql^2}{2} = 0$.

Схема на рис. 2.16 а и 2.23г:

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно $q = 0$.

На эпюре Q – прямая, параллельная оси эпюры. На опорах скачки, по величине и направлению соответствующие опорным реакциям $R_A = ql$ и $R_B = ql$. $Q = C = -ql$; $Q < 0$.

На эпюре M – наклонные прямые. На концах балки – **0** (не приложены сосредоточенные моменты). В сечении, где приложен момент, на эпюре – скачок, по величине и направлению соответствующий этому моменту: $M_C = ql^2 = ql(a + b)$.

Т.к. ординаты по всей длине балки $Q < 0$, то ординаты M должны убывать. Учитывая, что в данном случае $M = Qz + D$, ординаты будут уменьшаться на величину, равную площади эпюры Q .

Значение ординаты момента в сечении с координатой a определится площадью прямоугольника из эпюры Q : $M_C^a = -qla$. Затем следует скачок на величину $M_C^a = -qla + ql(a + b) = qlb$.

На опоре A момент равен **0**. На опоре B изгибающий момент определится выражением: $M_B = qlb - qlb = 0$.

Схема на рис. 2.16 б и 2.23д:

Балка свободна от распределенной нагрузки, следовательно $q = 0$.

На эпюре Q – прямые, параллельные оси эпюры. На опорах скачки, по величине и направлению соответствующие опорным реакциям $R_A = qb$ и $R_B = -qa$, а в сечении C – скачок на величину и по направлению силы $P = -ql = -q(a + b)$.

$$Q_C^a = C = R_A = qb; \quad Q > 0.$$

$$Q_C^a = R_A - P = qb - q(a + b) = qa; \quad Q < 0.$$

На эпюре M – наклонные прямые. На концах балки – 0 (не приложены сосредоточенные моменты). В сечении, где приложена сила, на эпюре – излом (резкое изменение угла наклона прямой).

На опоре A момент равен 0 . На левом участке $Q > 0$, поэтому ординаты M должны возрасти на величину $M_C^a = Qz + D = qba$. $D = 0$.

На правом участке $Q < 0$, следовательно, ординаты M должны убывать. На опоре B изгибающий момент определится выражением: $M_B = qba - qab = 0$.

Схема на рис. 2.16 в и 2.23е:

К балке приложена распределенная нагрузка $q = const < 0$.

На эпюре Q – наклонная прямая (наклон в направлении q) со скачками на величину реакций $R_A = \frac{ql}{2}$ и $R_B = -\frac{ql}{2}$ в опорных сечениях.

На опоре A ордината эпюры **положительна** и должна убывать, т.к. $q < 0$.

На опоре B : $Q = qz + C$; $Q_B = R_A - ql = -\frac{ql}{2}$.

Эпюра меняет знак, поэтому необходимо найти координату сечения, где

$Q = \frac{ql}{2} - qz = 0$. Откуда $z = l/2$.

На эпюре M – парабола $M = \frac{qz^2}{2} + Cz + D$, с выпуклостью навстречу нагрузке q и экстремумом в сечении, где $z = l/2$. На опорах не приложены сосредоточенные моменты, поэтому $M_A = M_B = 0$.

Т.к. на левом участке $Q > 0$, то ординаты M должны возрасти. При $z = l/2$ имеем экстремум, величину которого определим как площадь эпюры Q на этом участке:

$$\text{ке: } M_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{ql}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

На правом участке $Q < 0$. Ординаты M должны убывать на величину, определяемую площадью эпюры Q . Тогда $M_B = \frac{ql^2}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{ql}{2} \times \frac{l}{2} = 0$.

В завершение темы рассмотрим еще одну, более сложную с точки зрения приложенных нагрузок, схему.

Пример 3. Для балки (рис. 2.24) построить эпюры Q и M .

Для построения эпюр можно выполнить обычные рекомендации (см. п. 2.4.3):

определить опорные реакции, разбить балку на участки и записать для каждого участка уравнения для поперечной силы и изгибающего момента (см. схему на рис. 2.23 а).

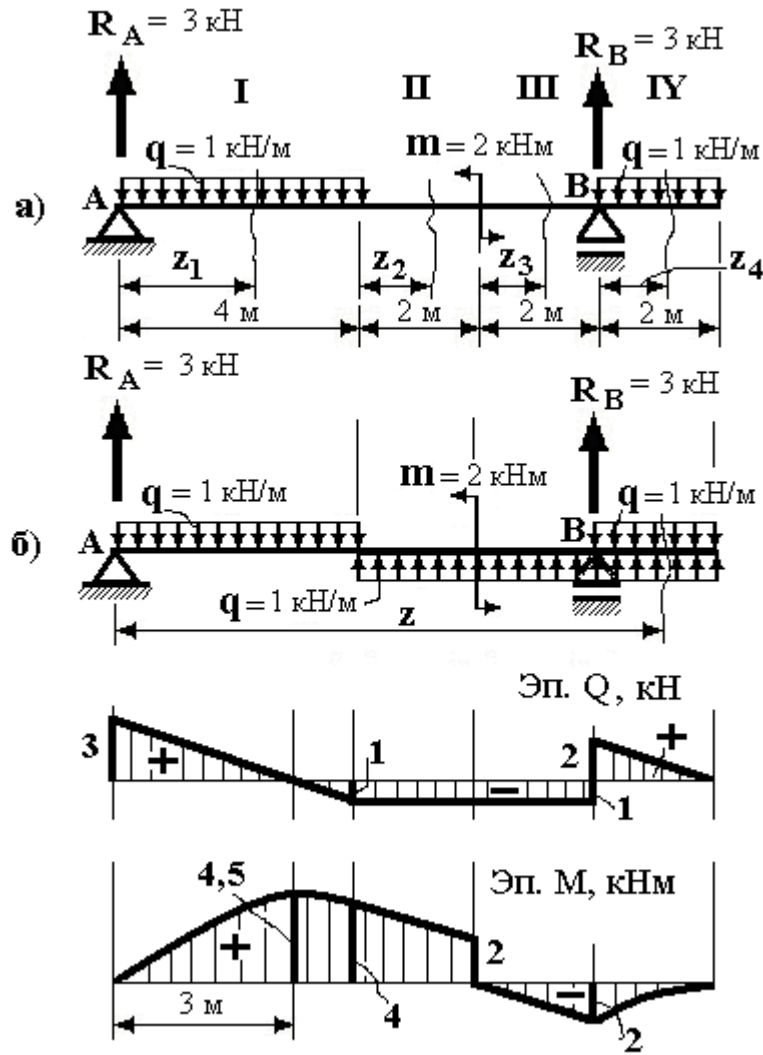


Рис. 2.24. Расчетные схемы и эпюры Q и M к примеру 3

Значения опорных реакций приведем без расчета: они равны: $R_A = R_B = 3 \text{ кН}$.

Уравнения Q и M для каждого из участков будут следующие (отсчет координат на всех участках – слева направо).

Участок I: $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$;

$Q_1 = R_A - qz_1 = 3 - 1z_1$; – уравнение **наклонной прямой**.

При $z_1 = 0$, $Q_1 = 3 \text{ кН}$, при $z_1 = 4 \text{ м}$, $Q_1 = -1 \text{ кН}$.

$M_1 = R_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 4z_1 - 1 \frac{z_1^2}{2}$; – уравнение **параболы**.

При $z_1 = 0$, $M_1 = 0$, при $z_1 = 4 \text{ м}$, $M_1 = 4 \text{ кНм}$.

Видим, что на этом участке эпюра Q пересекает ось, меняя знак. Следовательно, на эпюре M в сечении, где Q равно нулю имеем **экстремальное значение изгибающего момента** (парабола с выпуклостью навстречу направлению q и с максимальным значением в этом сечении).

Исследуем эпюру M на экстремум: $Q_1 = 0$, $3 - 1z_1 = 0$, $z_1 = 3 \text{ м}$.

$$\text{Тогда } M_{1\max} = 4 \times 3 - 1 \frac{3^2}{2} = 4,5 \text{кНм.}$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq 2\text{м}$;

$Q_2 = R_A - qz_2 = 3 - 1 \times z_2 = -1\text{кН}$. $Q_2 = \text{const}$ – график **прямой, параллельной оси эпюры**.

$M_2 = R_A \cdot (4 + z_2) - q \times 4(2 + z_2) = 3(4 + z_2) - 1 \times 4(2 + z_2)$; – уравнение **наклонной прямой**.

При $z_2 = 0$, $M_2 = 4\text{кНм}$, при $z_2 = 2\text{м}$, $M_2 = 2\text{кНм}$.

Участок III: $0 \leq z_3 \leq 2\text{м}$;

$Q_3 = R_A - qz_3 = 3 - 1 \times z_3 = -1\text{кН}$. $Q_3 = \text{const}$ – график **прямой, параллельной оси эпюры**.

$M_3 = R_A \cdot (6 + z_3) - q \times 4(4 + z_3) - m = 3(6 + z_3) - 1 \times 4(4 + z_3) - 2$; – уравнение **наклонной прямой**. При $z_3 = 0$, $M_3 = 0$, при $z_3 = 2\text{м}$, $M_3 = -2\text{кНм}$.

Участок IV: $0 \leq z_4 \leq 2\text{м}$;

$Q_4 = R_A - qz_4 + R_B - qz_4 = 3 - 1 \times z_4 + 3 - 1z_4 = 2 - 1z_4$; – график **наклонной прямой**. При $z_4 = 0$, $Q_4 = 2\text{кН}$, при $z_4 = 2\text{м}$, $Q_4 = 0$.

$$M_4 = R_A \cdot (8 + z_4) - q \times 4(6 + z_4) - m + R_B z_4 - q \frac{z_4^2}{2} =$$

$$= 3(8 + z_4) - 1 \times 4(6 + z_4) - 2 + 3z_4 - 1 \frac{z_4^2}{2}; \text{ – уравнение } \textbf{параболы}.$$

При $z_4 = 0$, $M_4 = -2\text{кНм}$, при $z_4 = 2\text{м}$, $M_4 = 0$.

Видим, что такая методика получения уравнений ВСФ недостаточно удобна, особенно для применения ЭВМ.

Расположив начало координат в крайней левой точке балки (т. А на рисунке), т.е. не смещаясь на новую границу участка, текущую координату z перемещаем слева – направо и сразу располагаем на последнем – **IV** участке балки (см. схему на рис. 2.24 б). Тогда можно записать **только два уравнения** Q и M .

Расчетная схема (см. рис. 2.24 б) имеет принципиальное отличие от схемы на рис. 2.24 а – начиная с границы **I-II** участков к балке (до ее конца) приложена **распределенная нагрузка интенсивностью** $q = 1\text{кН/м}$, но с **обратным знаком**. Это сделано в связи с тем, что распределенная нагрузка $q = 1\text{кН/м}$ **приложена только на участке I** и чтобы учесть это обстоятельство при записи уравнений для Q и M на последующих участках необходимо, начиная с границы между **I** и **II** участками и далее до конца балки, приложить так называемую **компенсирующую** нагрузку.

Компенсирующая нагрузка – это распределенная нагрузка интенсивностью, равной той, что обрывается на границе участков, и имеющая противоположное направление.

Заметим, что распределенная нагрузка **на консоли** приложена до конца балки, поэтому компенсировать ее нет необходимости.

Уравнения в этом случае будут иметь вид:

$$Q = 3z^0 - 1z|_I + 1(z - 4)|_{II,III} + 3(z - 8)^0 - 1(z - 8)|_{IV}; \quad (2.8)$$

$$M = 3z - \frac{1z^2}{2}|_I + 1\frac{(z - 4)^2}{2}|_{II} - 2(z - 6)^0|_{III} + 3(z - 8) - 1\frac{(z - 8)^2}{2}|_{IV}. \quad (2.9)$$

В этих уравнениях:

- *вертикальной линией с номером участка* отделяем члены уравнения, которые описывают зависимость ВСФ на рассматриваемом участке (слева от этой линии);
- **z** – *текущая координата* сечения, для которого проводится расчет ВСФ. Отсчет координаты – от крайней левой точки балки. Значение координаты указывает на номер участка, для которого производится расчет ВСФ и, соответственно, на те члены уравнения, которые необходимо использовать в расчете;
- *множители в нулевой степени*, как известно, равны единице. Их включение в уравнения позволяет получить выражения в обобщенном виде.

Например, $z = 9$ м. Тогда это *IV* участок и

$$Q = 3 \times 9^0 - 1 \times 9 + 1(9 - 4) + 3(9 - 8)^0 - 1(9 - 8) = 1 \text{ кН};$$

$$M = 3 \times 9 - \frac{1 \times 9^2}{2} + \frac{1(9 - 4)^2}{2} - 2(9 - 6)^0 + 3(9 - 8) - \frac{1(9 - 8)^2}{2} = -0,5 \text{ кНм}.$$

К такому подходу при записи уравнений мы еще вернемся в дальнейшем (при рассмотрении метода начальных параметров).

2.6. Построение и контроль эюр ВСФ для статически определимых рам

Рамами называют системы, составленные из стержней, соединенных в узлах (рис. 2.25).

Вертикальные стержни рамы называют стойками, а горизонтальные – ригелями.

Ось рамы представляет собой **ломаную линию**.

В узлах стержни рамы соединяются чаще всего **жестко** (рис. 2.24 а, б, г, д), но иногда используется соединение посредством **шарниров** (рис. 2. 24 в).

Жесткое соединение устраняет возможность **взаимного поворота скрепленных в узле стержней**, т.е. в узловой точке **углы между их осями** при деформации от нагрузки **остаются неизменными**.

При шарнирном соединении – наоборот – в узловой точке **возможен взаимный поворот стержней**.

Сам узел от действия нагрузок может иметь как угловые, так и линейные перемещения.

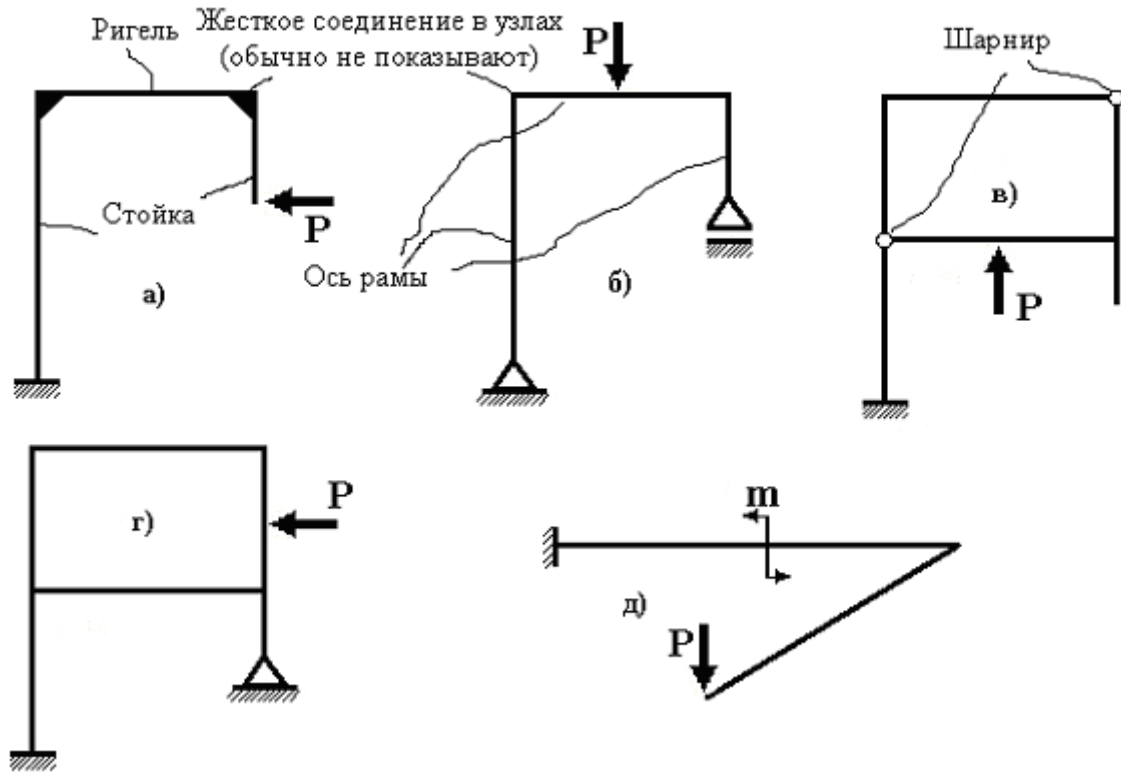


Рис. 2.25. Расчетные схемы рам

В сопротивлении материалов, строительной механике, а также в ряде специальных дисциплин инженеру приходится иметь дело с различными расчетными схемами рам:

- рамы **плоские и пространственные**;
- рамы **статически определимые и статически неопределимые**.

В **плоских рамах** *оси стержней и внешние нагрузки* располагаются в **одной плоскости** (рис. 2.25 а – г), в **пространственных** – в **разных плоскостях** (рис. 2.25 д).

Статически определимые рамы (рис. 2.25 а – в, д) – стержневые системы, в которых *опорные реакции (т.н. усилия связей) можно определить, используя уравнения равновесия* (уравнения статики).

Если *число опорных реакций* (число связей) **больше, чем число уравнений статики**, которые можно составить для данной системы – **рама статически неопределимая** (рис. 2.25 г).

Каждый прямолинейный участок рамы можно рассматривать как балку. **Усилия в узлах** передаются от одного стержня к другому в соответствии с **законами теоретической механики** (имеются в виду, в частности, правила переноса сил вдоль линии действия и их параллельный перенос).

Пример 1. Рассмотрим схему плоской статически определимой рамы (2.26). Она нагружена простой нагрузкой – одной сосредоточенной силой.

Следуя методу сечений, определим действующие в произвольных сечениях стержней рамы ВСФ, используя при этом систему координат, показанную на рис. 2.26 б, в, г (**ось Z** направлена *вдоль оси стержня*). Видим, что на **I участке** рамы – **ригеле АВ** действуют **поперечная сила** и **изгибающий момент** (рис. 2.26 б). На **II участке** рамы – **стойке ВС** – будут приложены **продольная сила** и **изгибающий момент** (рис. 2.26 в, г). На этих рисунках показан один и тот же участок **II**, но в первом случае (рис. 2.26 в) рассматриваются два стержня, а во втором – только часть стержня **ВС**, к началу которого с использованием правил теоретической механики приведены внешние на-

грузки, действующие слева (рис. 2.26 з).

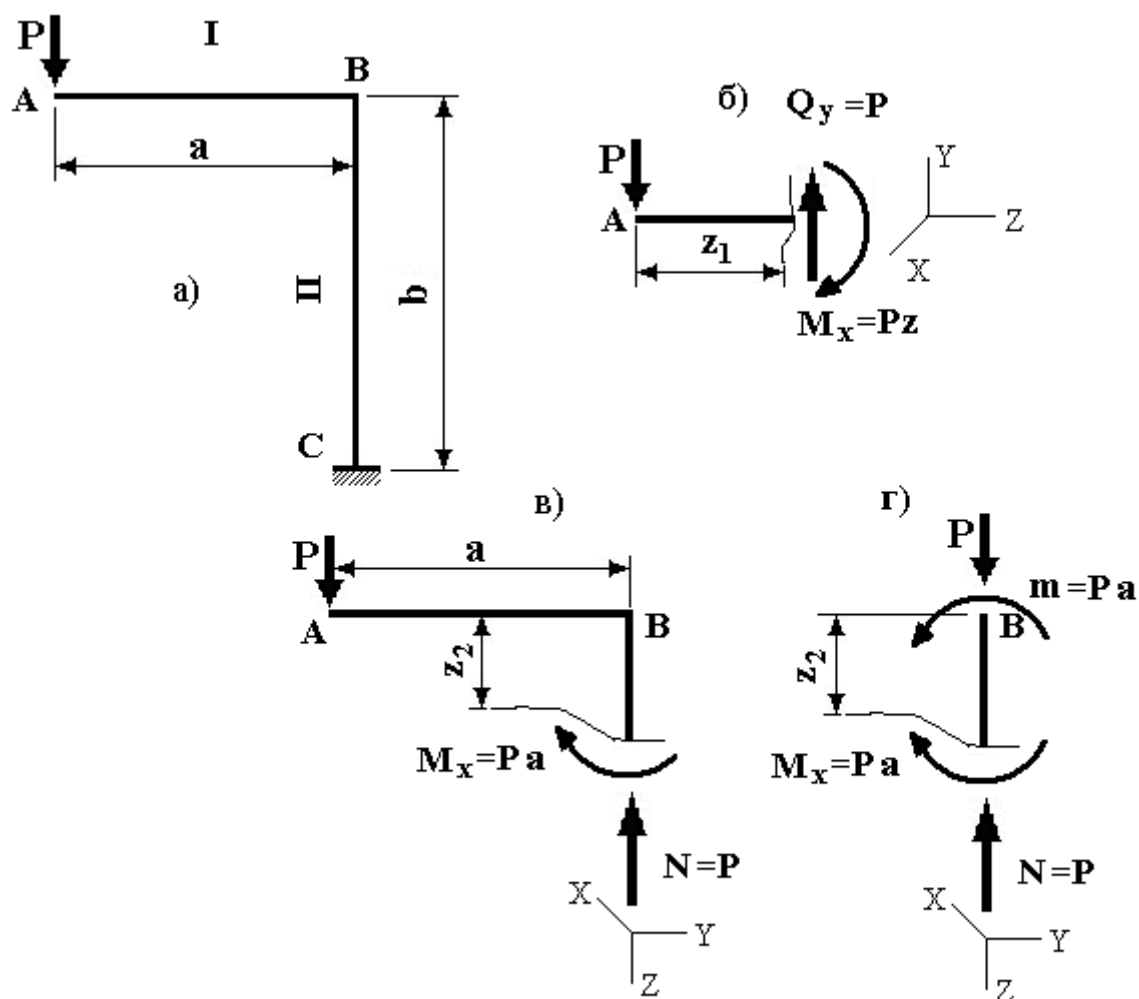


Рис. 2.26. Расчетная схема рамы и внутренние силовые факторы в произвольных сечениях стержней

В нашем случае слева, в точке **A** приложена сила. При параллельном переносе силы в начало второго участка (в точку **B**), в этой точке приложим силу и момент.

Таким образом, в сечениях стержней плоской рамы (в отличие от балок) могут действовать три ВСФ: N , Q_y , M_x или N , Q_x , M_y .

Осталось договориться о правиле знаков. **Правила знаков для продольной и поперечной** сил принимаем такими же, как для стержней и балок (см. п.2.2 и 2.4.2):

- $N > 0$, если равнодействующая проекций сил на продольную ось действует от сечения (растяжение);
- $Q > 0$, если равнодействующая проекций сил на ось, перпендикулярную к оси бруса, поворачивает сечение по часовой стрелке.

При построении этих эпюр положительные ординаты откладывают с *внешней стороны* контура рамы. Тогда для схемы, показанной на рис. 2.25: N и Q_y **отрицательны**, поэтому ординаты этих эпюр откладываем **внутри** контура рамы.

Для **изгибающего момента** специального правила знаков не устанавливают.

Например, **если изгибающий момент вызывает сжатие внешнего волокна стержня, принимаем такое направление этого момента положительным.** Тогда на

рис. 2.25: приняв **внешними** *верхнее* волокно на участке **АВ** и *правое* волокно на участке **ВС**, видим, что M_x на обоих участках имеет **отрицательный знак**.

При составлении уравнений для изгибающего момента принимают по собственному усмотрению какое-либо направление момента положительным.

При построении эпюр изгибающих моментов **ординаты эпюр условимся откладывать на сжатом волокне**: в нашем примере – по ригелю ординаты M_x откладываем на нижнее волокно, а по стойке – на левое волокно.

Знаки на эпюре M обычно не ставятся.

В нашем примере получим следующие эпюры (рис. 2.27)

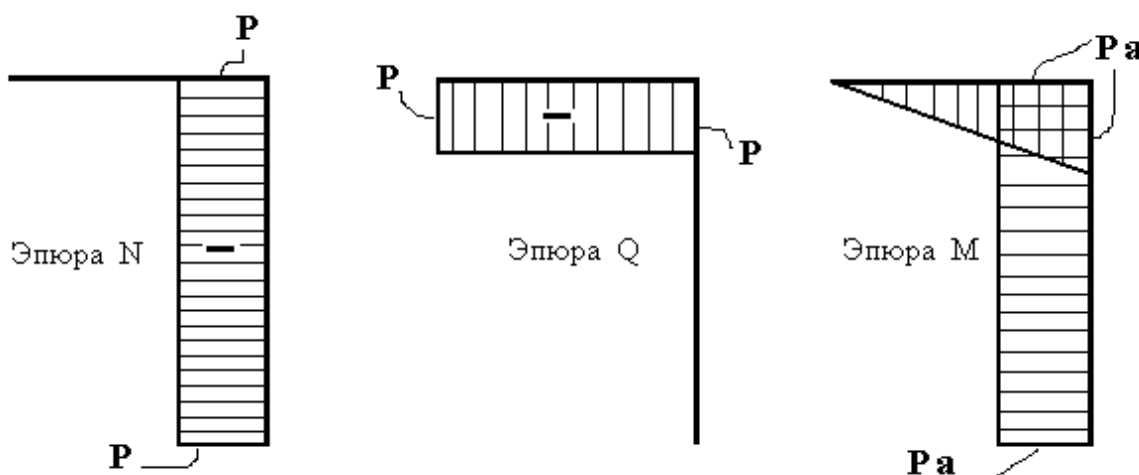


Рис. 2.27. Эпюры ВСФ для схемы, изображенной на рис. 2.26 (эпюры моментов показаны на сжатом волокне)

Построению эпюр должно *предшествовать определение опорных реакций и их проверка*. Исключение – рама-консоль (см. рис. 2.25 а и 2.26). В этих случаях можно вести расчет перемещаясь со свободного конца рамы.

Контроль правильности построения эпюр включает в себя все правила, с которыми мы познакомились выше. При этом, расчетную схему и эпюры анализируем, рассматривая каждый участок так, чтобы он находился **в правой системе координат** (для рассматриваемой схемы: слева – направо – вниз).

Кроме того, существует еще одно, специфическое, правило: **эпюры N и Q должны взаимно уравновешиваться в узлах, а эпюра M – должна сама себя уравновешивать в узлах.** Для нашего примера (рис. 2.28):

В узле **В** со стороны стойки **ВС** действует *отрицательная* продольная сила $N = P$, а со стороны ригеля **АВ** – *отрицательная* поперечная сила $Q = P$. Со стороны ригеля **АВ** и со стороны стойки **ВС** в узле **В** действуют изгибающие моменты $M = Pa$. Эти моменты прикладываем так, чтобы сжимались по отношению к исследуемому узлу соответственно нижнее и левое волокна стержней. Видим, что требования равновесия в исследуемом узле соблюдаются.

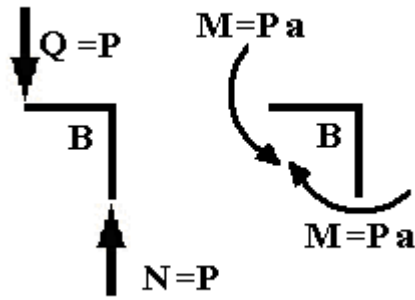


Рис. 2.28. К контролю правильности построения эпюр для схемы 2.26

Пример 2. В завершение рассмотрим более сложный случай расчетной схемы рамы (рис. 2.29).

1. Определяем опорные реакции, для чего составим 3 уравнения равновесия, т.к. неизвестными являются 3 реакции. На опоре **A** одна составляющая R_A – проекция сил на вертикальную ось, на опоре **B** две составляющие H_B – проекция сил на горизонтальную ось и R_B – проекция сил на вертикальную ось. Примем следующие обозначения осей: для горизонтальной оси – **X**, для вертикальной оси – **Y**.

$$\sum X = 0; \Rightarrow H_B - P = 0; \Rightarrow H_B = 1кН.$$

$$\sum m_B = 0; \Rightarrow 1 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 + 2 \times 4 \times 2 - R_A \times 4 = 0; \Rightarrow R_A = 3,5кН.$$

$$\sum m_A = 0; \Rightarrow 1 \times 2 - 2 \times 6 \times 3 + R_B \times 4 = 0; \Rightarrow R_B = 8,5кН.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \Rightarrow R_A + R_B - 2 \times 6 = 0; \Rightarrow 3,5 + 8,5 - 12 = 0; 0 \equiv 0.$$

Реакции определены правильно.

2. Разбиваем раму на участки: их **5** – по числу стержней.

3. Используя метод сечений, записываем для каждого участка уравнения ВСФ.

Для изгибающего момента примем +, если при изгибе стержней сжимается наружное волокно (**AC** – левое, **CD** – верхнее, **DE** – верхнее, **DK** и **DB** – правое).

Участок BK: $0 \leq z_1 \leq 2м;$

$$N_{BK} = -R_B = -8,5кН; \quad Q_{BK} = -H_B = -1кН;$$

$$M_{BK} = H_B z_1 = 1z_1 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=2} = 2кНм.$$

Участок KD: $0 \leq z_2 \leq 2м;$

$$N_{KD} = -R_B = -8,5кН; \quad Q_{KD} = -H_B + P = -1 + 1 = 0;$$

$$M_{KD} = H_B(2 + z_2) - Pz_2 = 1(2 + z_2) - 1z_2 \Big|_{z=0} = 2 \Big|_{z=2} = 2кНм.$$

Участок ED: $0 \leq z_3 \leq 2м;$

$$N_{ED} = 0; \quad Q_{ED} = qz_3 = 2z_3 \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=2} = 4кН;$$

$$M_{ED} = -q \frac{z_3^2}{2} = -2 \frac{z_3^2}{2} \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=2} = -4кНм.$$

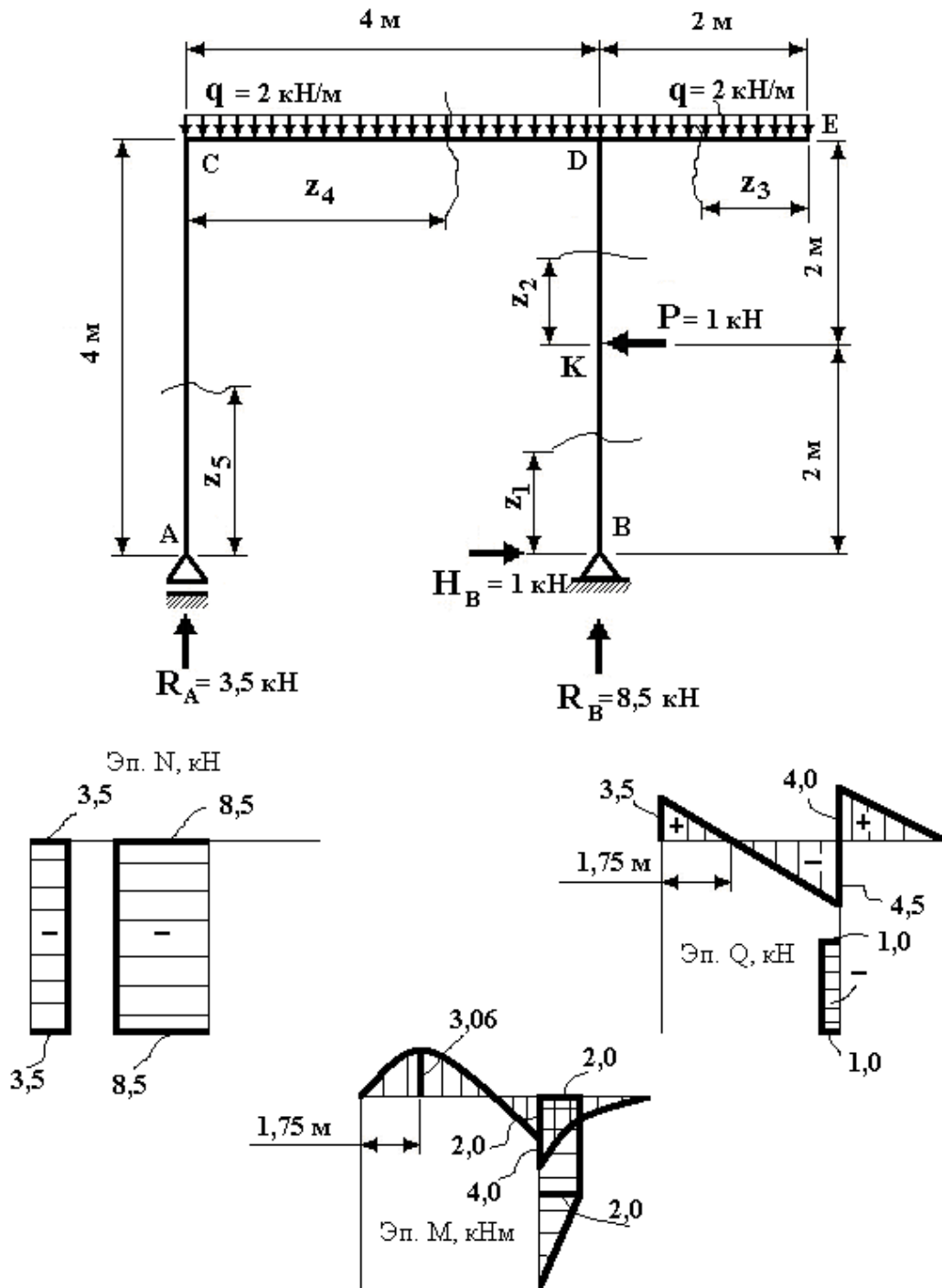


Рис. 2.29. Расчетная схема и эпюры ВСФ для рамы (пример 2)
(эпюры моментов показаны на сжатом волокне)

Участок AC: $0 \leq z_5 \leq 4 \text{ м}$;

$$N_{AC} = -R_A = -3,5 \text{ кН}; \quad Q_{AC} = 0; \quad M_{AC} = 0.$$

Участок CD: $0 \leq z_4 \leq 4 \text{ м}$;

$$N_{CD} = 0; \quad Q_{CD} = R_A - qz_4 = 3,5 - 2z_4 \Big|_{z=0} = 3,5 \Big|_{z=4} = -4,5 \text{ кН};$$

$$M_{CD} = R_A z_4 - q \frac{z_4^2}{2} = 3,5 z_4 - 2 \frac{z_4^2}{2} \Big|_{z=0} = 0 \Big|_{z=4} = -2 \text{ кНм}.$$

На данном участке Q меняет знак, поэтому проведем исследование на экстремум. $Q_{CD} = R_A - qz_4 = 0; \quad Q_{CD} = 3,5 - 2z_4 = 0; \Rightarrow z = 1,75 \text{ м}.$

$$\text{Тогда } M_{\max} = 3,5 \times 1,75 - 2 \frac{1,75^2}{2} = 3,06 \text{ кНм}.$$

4. По полученным данным строим эпюры N , Q , M . (Тонкой линией на эпюрах показаны оси рамы).

5. Проводим проверку правильности построения эпюр.

Видим, что скачки на эпюрах присутствуют в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы (в том числе и реакции). На эпюре M скачков нет.

Линии, которыми очерчены эпюры, соответствуют расчетной схеме (наклонные прямые и параболы).

На участках, где Q положительна, ординаты M возрастают и, наоборот, (при расположении участков в правой системе координат).

В сечении, где $Q = 0$ на эпюре M – экстремум.

Рассмотрим равновесие узлов, рассматривая построенные эпюры (рис.2.29).

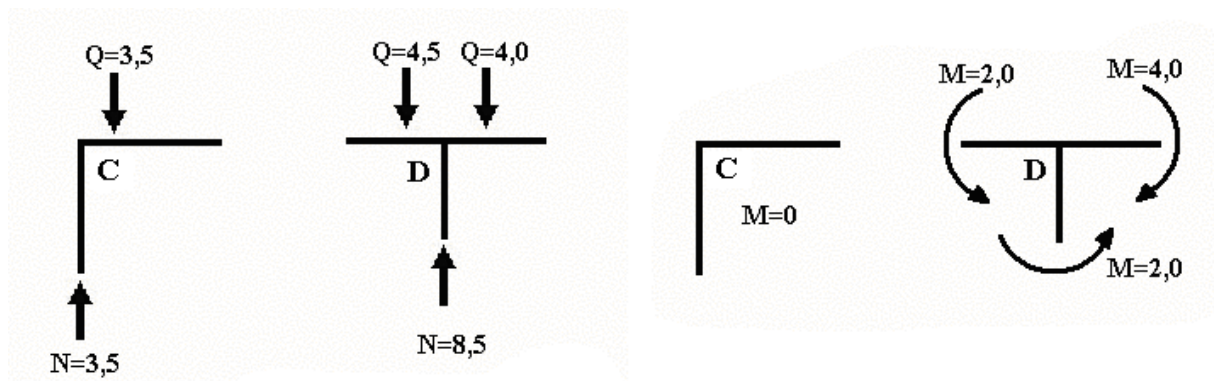


Рис. 2.30. К контролю правильности решения для схемы (пример 2)

Узел **С**: **снизу** по стойке действует *сжимающая продольная сила*, **справа**, со стороны ригеля – *положительная поперечная сила*, **равные между собой**. *Изгибающие моменты* со стороны стойки и ригеля **равны нулю**.

Узел **Д**: **снизу** по стойке действует *сжимающая продольная сила*, **слева**, со стороны ригеля – *отрицательная поперечная сила*; **справа**, со стороны консоли – *положительная поперечная сила*. **Сумма сил равна нулю**.

Изгибающий момент: **снизу**, со стороны стойки, *сжимает правое волокно*, **слева**, со стороны ригеля и **справа**, со стороны консоли, – *сжимает нижнее волокно*. **Сумма моментов равна нулю**.

Эпюры построены правильно.