17. *Основы расчетов в упругопластической стадии сопротивления материалов.*

17.1 Диаграмма упругопластического деформирования.

Метод расчета по предельной нагрузке предполагает определение расчетным путем не напряжений, а максимальной нагрузки, которую может выдержать конструкция не разрушаясь. В основу метода положено ***условие предельного равновесия системы.***

Расчет ведется для конструкций, выполненных из пластичных материалов, в отдельных зонах или элементах которых допускается работа за пределом упругости.

Достаточная для инженерной практики точность расчета достигается при использовании упрощенной диаграммы растяжения пластичных материалов ***- диаграммы Прандтля*** (рис.17.1). Предполагается, что деформирование подчиняется закону Гука вплоть до предела текучести σ_T, а далее происходит неограниченное пластическое деформирование. Материал, деформирование которого описывается диаграммой Прандтля, называется *идеальным упругопластическим*.

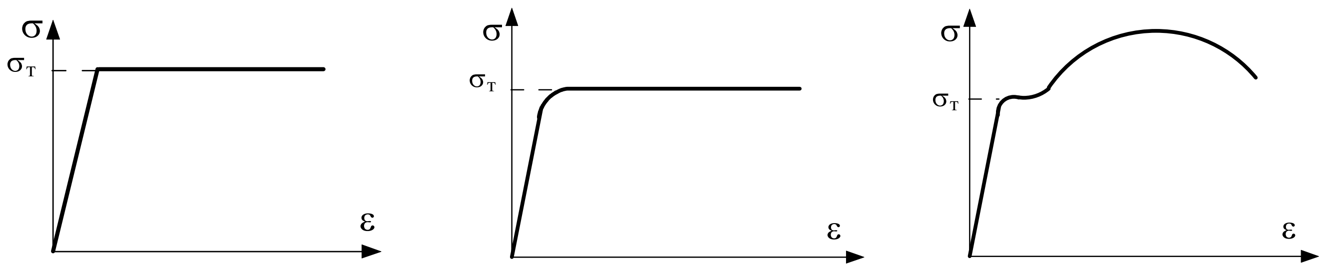

Диаграмма Прандтля | Диаграмма деформирования алюминия | Диаграмма деформирования низкоуглеродистой стали

Рис.17.1

Наиболее близкой к диаграмме Прандтля является диаграмма деформирования алюминия. Для материалов с ограниченной площадкой текучести (низкоуглеродистая сталь) диаграмма Прандтля также допустима.

Если в опасной точке напряжения достигают предела текучести $\sigma_{max} = \sigma_т$, то нагрузка принимает опасное значение для расчета по допускаемым напряжениям: $F = F_т$. При этом, как правило, не происходит исчерпания несущей способности конструкции. При дальнейшем наращивании нагрузки напряжения в опасной точке будут оставаться постоянными, согласно диаграмме Прандтля, а напряжения в других точках системы будут возрастать до предела текучести.

Предельная нагрузка $F_{пр}$ соответствует моменту, когда зона пластических деформаций распространится настолько, что дальнейший рост нагрузки вызовет разрушение конструкции или ее геометрическую изменяемость. Этот момент соответствует полному исчерпанию несущей способности конструкции.

Условие прочности имеет вид: $$F \le [F] = \frac{F_{пр}}{n_F},$$

где n_F – коэффициент безопасности по предельной нагрузке (коэффициент запаса прочности).

$$n_F = (1{,}15 - 1{,}2) \cdot n_\sigma ,$$

где n_σ - коэффициент безопасности в расчете по допускаемым напряжениям.

При рабочей нагрузке $F \le [F]$ в наиболее опасных точках системы напряжение может быть близким или даже равным пределу текучести. Это не сказывается на условиях эксплуатации, но позволяет или снизить расход материала. Или при тех же его затратах повысить рабочие нагрузки. Расчет по предельной нагрузке более экономичен, чем расчет по допускаемым напряжениям, но применяется только для конструкций, изготавливаемых из пластичных материалов.

17.2 Расчет стержневых систем при растяжении- сжатии

При растяжении- сжатии напряжения по площади поперечного сечения распределяются равномерно. Поэтому для статически определимых систем расчеты по допускаемым напряжениям и предельным нагрузкам при одинаковых коэффициентах запаса дают один и тот же результат. Для статически неопределимых систем результаты расчета отличаются.

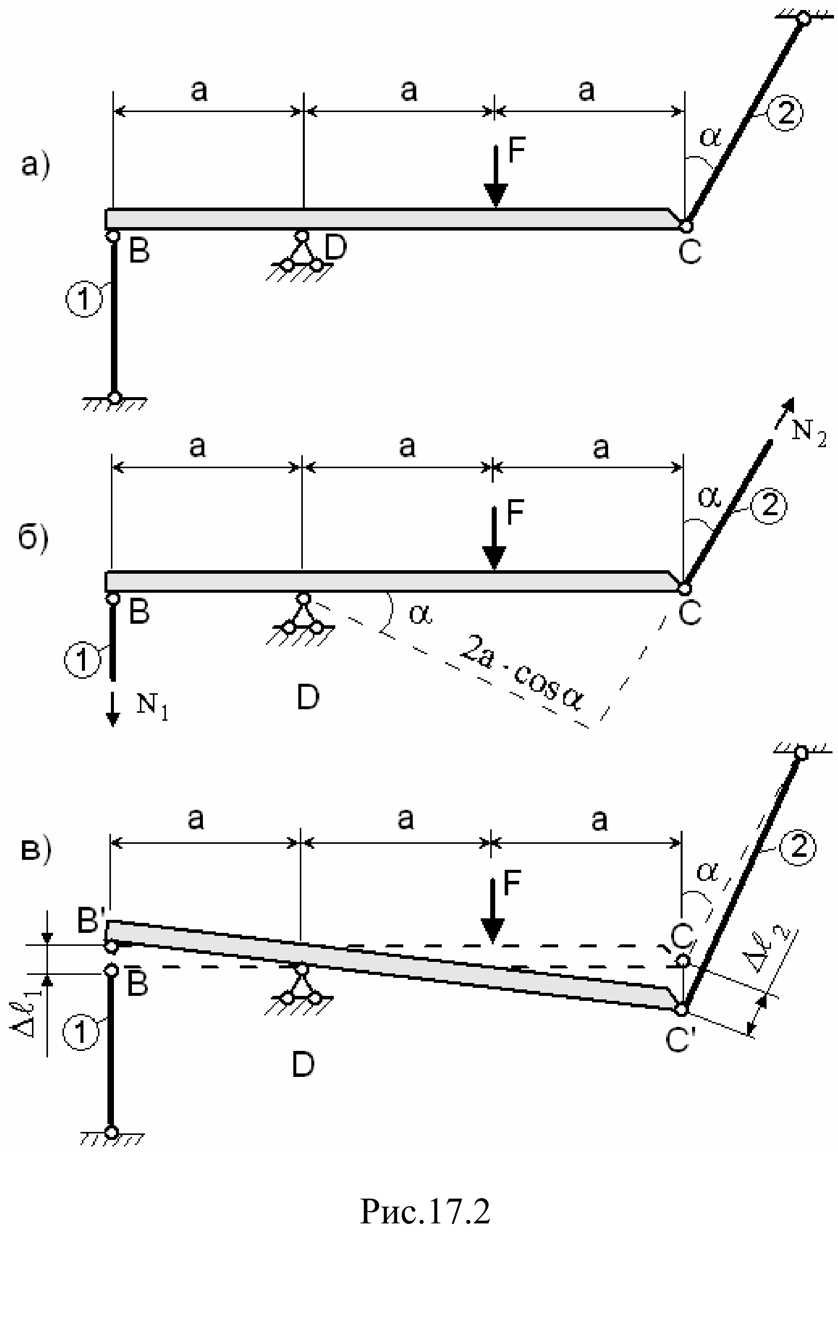

Рис.17.2

Пример

Система состоит из абсолютно жесткого бруса и двух стальных стержней 1 и 2 (рис.2.а)).

Требуется определить грузоподъемность системы, проведя расчет по допускаемым напряжениям и предельным нагрузкам при одинаковых коэффициентах запаса прочности.

Исходные данные:

$\ell_1 = 1{,}5$ *м*, $\ell_2 = 1$ *м*,

$A_1 = 1$ *см*^{2}, $A_2 = 1{,}4$ *см*^{2},

$\alpha = 30^o$,

$[\sigma] = 160$ *МПа*,

$\sigma_m = 240$ *МПа*,

$n_F = n_\sigma = 1{,}5$

Решение

1) Расчет по допускаемым напряжениям.

Проведем сечение через оба стержня и введем в рассмотрение внутренние силы N_1 и N_2 (рис.17.2.б)). Вместе с двумя реакциями на опоре D получается четыре неизвестных усилия. Так как для плоской системы можно составить только три независимых уравнения статики, то рассматриваемая система является 1 раз статически неопределимой: S=4–3=1.

Составим уравнение статики.

$$N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a \cdot \cos\alpha - F \cdot a = 0$$

или

$$N_1 + N_2 \cdot 2\cos\alpha = F \qquad (17.1)$$

Составим уравнение совместности деформаций и перемещений, для чего рассмотрим конструкцию в деформированном состоянии (рис.2.в)). В результате удлинения стержней брус повернется вокруг шарнира D, оставаясь прямым.

Перемещение шарнира B равно удлинению первого стержня: $BB' = \Delta\ell_1$. Перемещение шарнира C равно: $CC' = \Delta\ell_2 / \cos\alpha$. Из подобия треугольников DBB' и DCC' получаем:

$$\frac{\Delta\ell_1}{a} = \frac{\Delta\ell_2 / \cos\alpha}{2a}, \quad \text{или} \quad \Delta\ell_2 = 2\cos\alpha \cdot \Delta\ell_1$$

Выразим деформации стержней через продольные силы:

$$\frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A_2} = 2\cos\alpha \cdot \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A_1};$$

$$N_2 = 2\cos\alpha \cdot \frac{\ell_1 \cdot A_2}{\ell_2 \cdot A_1} \cdot N_1 \qquad (17.2)$$

Подставим уравнение (17.2) в уравнение (17.1):

$$\left(1 + 4\cos^2\alpha \cdot \frac{\ell_1 \cdot A_2}{\ell_2 \cdot A_1}\right) \cdot N_1 = F$$

С учетом числовых данных N_1=0,241 F, N_2=0,438 F.

Напряжения в стержнях равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}241 \cdot F}{1 \cdot 10^{-4}} = 2410 \cdot F\left(\frac{1}{\text{м}^2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0{,}438 \cdot F}{1{,}4 \cdot 10^{-4}} = 3130 \cdot F\left(\frac{1}{\text{м}^2}\right)$$

Более нагруженным оказался стержень 2.

Определим допустимую грузоподъемность из условия прочности:

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = 3130 \cdot F \le [\sigma]$$

$$[F] = \frac{[\sigma]}{3130} = \frac{160 \cdot 10^6}{3130} = 51{,}1 \cdot 10^3 \ \text{Н} = 51{,}1 \ \text{кН}$$

2) Расчет по предельным нагрузкам.

Определим предельную нагрузку из условия предельного равновесия, которое наступает, когда во всех точках стержней 1 и 2 напряжения достигают предела текучести. Тогда $N_1 = \sigma_т \cdot A_1$ и $N_2 = \sigma_т \cdot A_2$. Уравнение статики (17.1) будет иметь вид:

$$\sigma_т \cdot A_1 + \sigma_т \cdot A_2 \cdot 2\cos\alpha = F_{пр}$$

Предельная нагрузка равна:

$$F_{пр} = \sigma_т \cdot (A_1 + A_2 \cdot 2\cos\alpha) = 240 \cdot 10^6 \cdot (1 + 1{,}4 \cdot 2\cos 30^o) \cdot 10^{-4} = 82{,}2 \cdot 10^3 \text{ Н} = 82{,}2 \text{ кН}$$

Допускаемая нагрузка равна:

$$[F] = \frac{F_{пр}}{n} = \frac{82{,}2}{1{,}5} = 54{,}8 \text{ кН}$$

Вывод: при расчете по предельным нагрузкам несущая способность оказалась на 7,2% выше, чем при расчете по допускаемым напряжениям:

$$\Delta F = \frac{54{,}8 - 51{,}1}{51{,}1} \cdot 100\% = 7{,}2\%.$$

17.3 Упругопластический изгиб балок

Рассмотрим балку, выполненную из пластичного материала, деформирование которого подчиняется диаграмме Прандтля. Опасным будет сечение с наибольшим изгибающим моментом (рис.17.3).

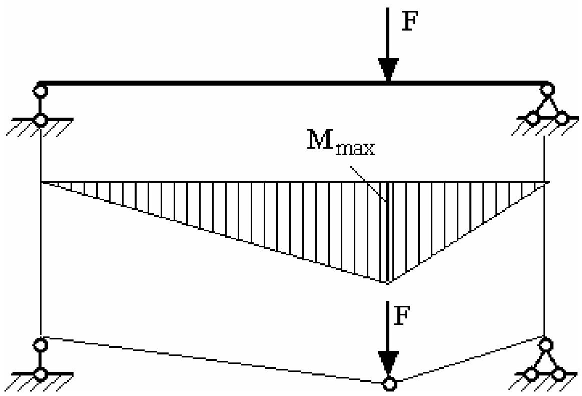

Рис.17.3

Нормальные напряжения при упругих деформациях изменяются по высоте балки линейно, достигая наибольших значений в крайних волокнах (рис.17.4-1):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}.$$

В упругих расчетах на прочность опасное состояние возникает, когда $\sigma_{max} = \sigma_т$ (рис.17.4-2). Но при этом балка еще сохраняет способность воспринимать внешнюю нагрузку за счет недогруженных внутренних волокон. Несущая способность балки не исчерпана.

$$M_т = \sigma_т \cdot W_x.$$

При увеличении нагрузки напряжения текучести будут распространяться от крайних волокон ближе к оси балки. В пластической зоне закон распределения напряжений - постоянный, в упругой области – линейный (рис.17.4-3).

Предельное пластическое состояние наступает, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению: $\sigma = \sigma_т$. Несущая способность балки полностью исчерпана, нагрузка достигает предельного значения $F_{пр}$ ($M_{пр}$) (рис.17.4-4).

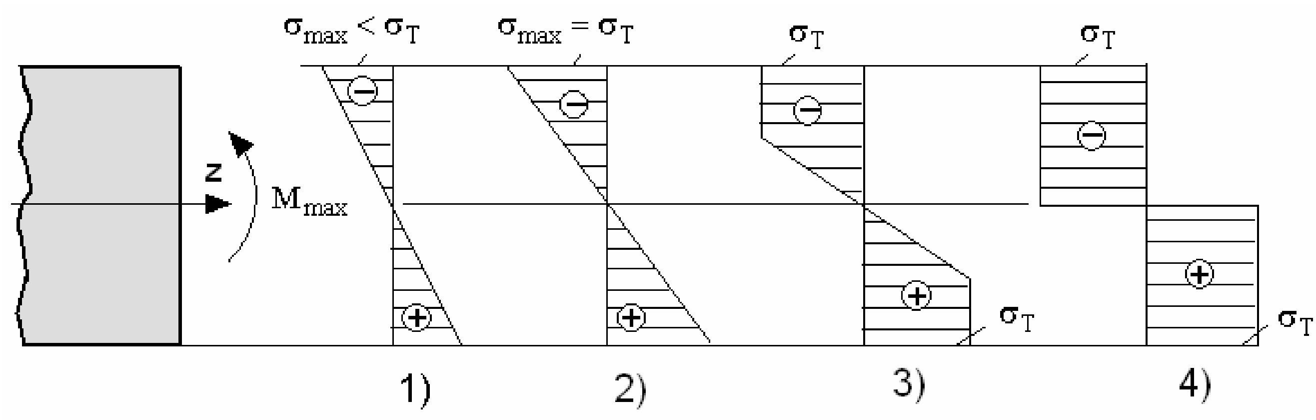

Рис.17. 4

В рассматриваемом сечении образуется ***пластический шарнир***, позволяющий частям балки свободно поворачиваться друг относительно друга. Пластический шарнир превращает статически определимую балку в изменяемую систему. В отличие от идеально шарнира, в пластическом шарнире действует предельный изгибающий момент $M_{пр}$.

По интегральной зависимости: $M_x = \int\limits_F \sigma y dF$,

где y – координата элементарной площадки относительно оси x.

$$M_{пр} = \int\limits_{A_р} \sigma_т y dA + \int\limits_{A_{сж}} \sigma_т y dA = \sigma_т \left(\int\limits_{A_р} y dA + \int\limits_{A_{сж}} y dA \right) = \sigma_т (S_р + S_{сж}) = \sigma_т \cdot W_{пл},$$

где $W_{пл} = S_р + S_{сж}$ – осевой пластический момент сопротивления поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения $S_р = S_{сж} = bh^2/8$, $W_{пл} = bh^2/4$

$$W_{пл} / W_x = 1{,}5$$
$$M_{пр} / M_т = 1{,}5$$

Следовательно, расчет по предельной нагрузке позволяет повысить несущую способность балки прямоугольного сечения в 1,5 раза по сравнению с «упругим» расчетом.

Сечение	W_x	$W_{пл}$	$M_{пр} / M_т$
прямоугольник	$bh^2/6$	$bh^2/4$	1,5
круг	$\pi d^3/32$	$d^3/6$	1,7
двутавр	W_x	$W_{пл} = 2\,S_x$	1,14–1,18

В статически неопределимых балках требуется образование нескольких пластических шарниров, чтобы несущая способность была полностью исчерпана. При этом отношение $M_{пр} / M_т$ изменяется в зависимости от вида нагружения и типа балки.

В пластическом шарнире площадь сжатой области равна площади растянутой области. Нейтральная ось делит площадь опасного сечения на две равновеликие части. Поэтому в несимметричном сечении нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения.

17.4 Упругопластическое кручение брусьев

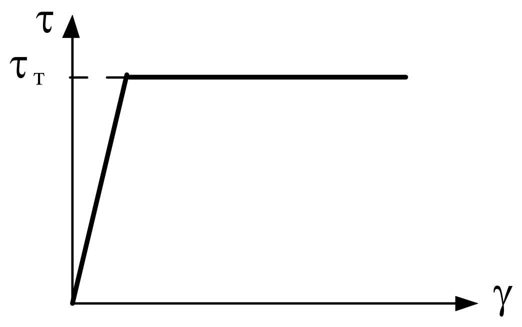

Рис.17.5

Касательные напряжения при упругих деформациях вала сплошного круглого сечения изменяются линейно в соответствии с формулой:

$$\tau = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{I_\rho}.$$

Максимальные напряжения возникают по внешнему контуру сечения (рис.17.6-а):

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}.$$

Опасное состояние вала при расчете по допускаемым напряжениям определяется появлением пластических деформаций в крайних волокнах, т.е. когда $\tau_{max} = \tau_т$ и крутящий момент соответствует пределу текучести:

$$M_т = \tau_т \cdot W_\rho,$$

где $W_\rho = \dfrac{\pi \cdot d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения.

При этом вал сохраняет способность воспринимать возрастающий крутящий момент вследствие роста напряжений до уровня предела текучести в точках, лежащих ближе к центру тяжести сечения.

В пластической зоне закон распределения напряжений станет постоянным, в упругой области останется линейным (рис.17.6-б).

Предельное пластическое состояние наступает, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению: $\tau = \tau_т$. Несущая способность вала полностью исчерпана, когда нагрузка достигает предельного значения ($M_{пр}$) (рис.17.6-в):.

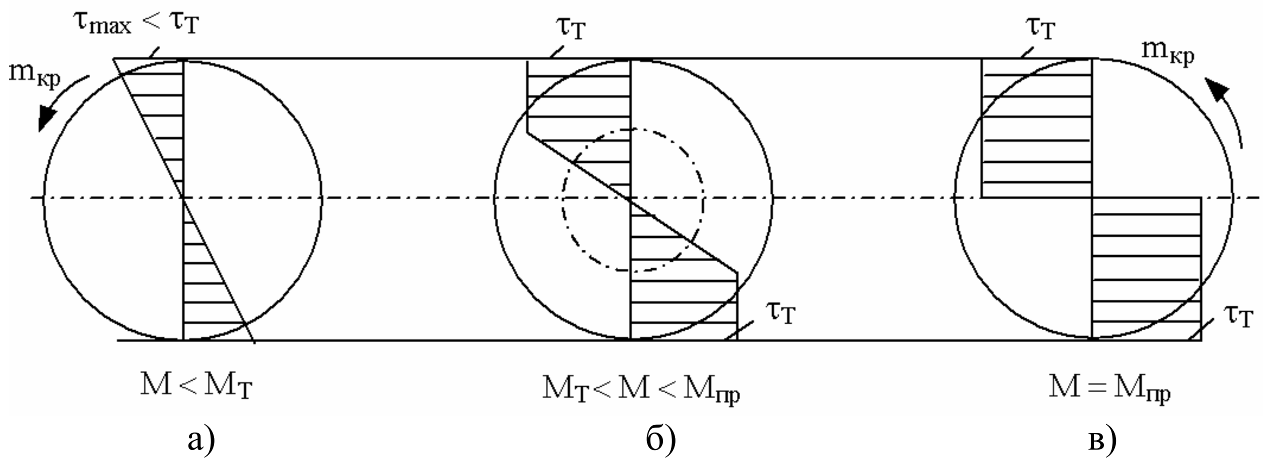

Рис. 17.6

По интегральной зависимости: $M_{кр} = \int\limits_A \tau\rho dA$,

где ρ – радиальная координата элементарной площадки относительно центра.

Предельный крутящий момент равен:

$$M_{пр} = \int\limits_A \tau_т \rho dA = \tau_т \int \rho dA = \tau_т \cdot W_{\rho\,пл},$$

где $W_{\rho\,пл} = \dfrac{\pi \cdot d^3}{12}$ – пластический момент сопротивления при кручении.

$$W_{\rho\,пл} / W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot 16}{12 \cdot \pi \cdot d^3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$$

$$M_{пр} / M_т = 1{,}33$$

Следовательно, скрытый запас прочности скручиваемого круглого стержня (статически определимого), который обнаруживается при переходе от расчета по допускаемым напряжениям к расчету по предельному состоянию, равен 33%. В статически неопределимой системе запас прочности зависит от конфигурации стержня и условий нагружения.