

## 15. Продольно-поперечный изгиб

**ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ ИЗГИБОМ называется сочетание поперечного изгиба с центральным сжатием или растяжением бруса.**

### 15.1. Условие прочности.

При действии нескольких видов нагрузки обычно пользуются принципом независимости действия сил. Если к брусу приложены и продольные и поперечные силы (рис.15.1), то:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma], \quad (15.1)$$

где  $M_{max}$  – изгибающий момент от поперечной силы  $P_{\perp}$ ,

$N = \pm P$  – продольная сила.

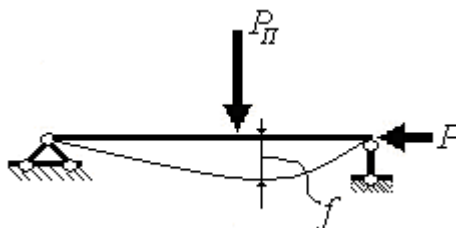


Рис. 15.1. Изгиб бруса от действия поперечной и сжимающей продольной сил

Видим, что  $N = -P$  не учитывается, как сила, вызывающая изгиб бруса. Однако при рассмотрении устойчивости сжатых стержней выяснили, что **сжимающая** сила  $N = -P$  создает изгибающий момент  $M = P f$ . Символом  $f$  обозначен наибольший прогиб (прогиб в опасном сечении бруса).

Таким образом, условие прочности должно быть записано в виде:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W} + \frac{P f}{W} \right| \leq [\sigma]. \quad (15.2)$$

В отличие от продольного сжатия – при растяжении  $f$  уменьшается, и, следовательно, нормальные напряжения будут снижаться ( $\sigma = -\frac{P f}{W}$ ).

Естественно, учесть действие изгибающего момента от сжимающей силы  $P$  можем, определив прогиб  $f$ , величина которого, в свою очередь зависит от величины поперечных сил, сжимающей силы, размеров сечения и положения его относительно действующих поперечных сил.

Это связано с тем, что в отличие от продольного изгиба, момент сопротивления сечения берется **НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО МИНИМАЛЬНЫМ**, а соответствующим положению сечения по отношению к поперечным силам. Поэтому в условии прочности (15.2) индексы при  $W$  отсутствуют.

Таким образом, при рассмотрении центрального сжатия бруса и одновременного действия на него поперечных сил **ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ИСПОЛЬЗОВАТЬ НЕЛЬЗЯ**.

**15.2. Дифференциальное уравнение упругой линии.** Рассмотрим брус, нагруженный продольной силой и системой поперечных сил (рис. 15.2).

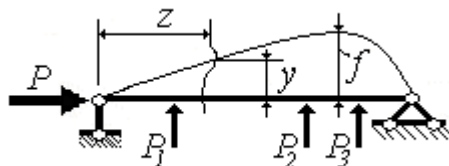


Рис. 15.2. К выводу дифференциального уравнения упругой линии бруса при продольно-поперечном изгибе

При составлении дифференциального уравнения упругой линии бруса изгибающий момент в произвольном сечении может рассматриваться как сумма моментов от поперечных сил  $M_{\Pi}$  и момента от продольной силы  $P$   $y$ .

Прогибы от действия поперечных сил имеют малые значения, поэтому  $M_{\Pi}$  в явном виде будет зависеть **только** от  $z$  и не будет зависеть от  $y$  и  $P$ . Тогда:

$$EI y'' = -P y + M_{\Pi}. \quad (15.3)$$

Вспомнив, что  $\frac{P}{EI} = k^2$  (см. параграф 14) имеем **дифференциальное**

**уравнение упругой линии с правой частью:**

$$y'' + k^2 y = \frac{M_{\Pi}}{EI}. \quad (15.4)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + y^*, \quad (15.5)$$

где  $y^*$  – **частное решение** уравнения (15.4), зависящее от функции  $M_{\Pi}$ .

**Изгибающий момент зависит от вида приложенной к брусу поперечной нагрузки: сосредоточенные силы, распределенная по какому-то закону нагрузка, сосредоточенный момент, а также и вида балки (на опорах, консольная и т.п.).**

В каждом конкретном случае значение  $y^*$  имеет определенное значение, которое необходимо определять и, соответственно  $M_{\max}$  будет иметь также конкретное значение. Например, для двух опорной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 15.3), решение имеет вид:

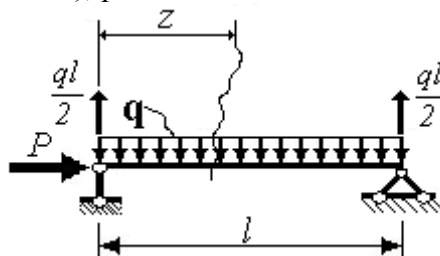


Рис. 15.3. К примеру определения частного решения дифференциального уравнения

$$EI y'' = -P y + \frac{q l}{2} z - \frac{q z^2}{2};$$

$$y'' + k^2 y = \frac{q}{2EI} (l z - z^2);$$

$$y^* = \frac{q}{2 E I k^2} \left( \frac{2}{k^2} + l z - z^2 \right).$$

При более сложных видах поперечной нагрузки, например при нескольких поперечных силах, определение изгибающих моментов становится затруднительным (само решение дифференциального уравнения), поскольку изгибающий момент на различных участках бруса будет записываться различными функциями.

В таких случаях удобнее оказывается применять приближенные, менее точные, но более простые приемы расчета.

Рассмотрим один из них. Прогиб  $f_{\Pi}$  и изгибающий момент  $M_{\Pi}$  будем определять **В СЕРЕДИНЕ ПРОЛЕТА**. Обратимся к выражению (15.3). При **отсутствии продольной силы** оно принимает вид:

$$E I y''_{\Pi} = M_{\Pi} \quad (15.6)$$

Индексом  $\Pi$  подчеркивается, что учитывается действие только поперечной силы.

Подставим (15.6) в (15.3) (то есть исключим  $M_{\Pi}$ ):

$$E I y'' = E I y''_{\Pi} - P y \quad (15.7)$$

Примем, что форма упругой линии, как при наличии продольной силы, так и без нее, ближе к синусоиде, то есть решение ищем в виде:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l}, \text{ а вторая производная } y'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

$$\text{Тогда } y_{\Pi} = f_{\Pi} \sin \frac{\pi z}{l},$$

где  $f$  – прогиб балки в середине пролета.

$$\text{Вторая производная } y''_{\Pi} = -f_{\Pi} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Тогда:

$$E I f \frac{\pi^2}{l^2} = E I f_{\Pi} \frac{\pi^2}{l^2} + P f \quad (15.8)$$

Решая уравнение 15.8

$$E I f \frac{\pi^2}{l^2} = E I \frac{\pi^2}{l^2} \left( f_{\Pi} + \frac{P f l^2}{E I \pi^2} \right), \text{ получаем выражение}$$

$$f = f_{\Pi} + \frac{P f}{P_{\text{Э}}}, \text{ в котором обозначено}$$

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} - \text{ЭЙЛЕРОВА СИЛА} \quad (15.9)$$

$$f \left( 1 - \frac{P}{P_{\text{Э}}} \right) = f_{\Pi}.$$

**Прогиб ПОСЕРЕДИНЕ ПРОЛЕТА при продольно-поперечном изгибе**

$$f = \frac{f_{\Pi}}{1 - \frac{P}{P_{\text{Э}}}} \quad (15.10)$$

Заметим, что  $P_{Э}$  (эйлерова сила) – **не равна критической силе**, т.к., момент инерции здесь не минимальный, то есть такие балки изгибаются чаще всего в плоскости наибольшей жесткости. Кроме того, на величину эйлеровой силы не оказывают влияния условия закрепления концов стержня, следовательно эта **сила не зависит** от ГИБКОСТИ СТЕРЖНЯ.

Предполагая изгибающие моменты пропорциональными прогибам, можно записать формулу для расчета

**изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе:**

$$M = \frac{M_{\Pi}}{1 - \frac{P}{P_{Э}}}. \quad (15.11)$$

Проанализируем результаты расчетов по формуле (15.11) – график рис. 15.4 и таблица 15.1.

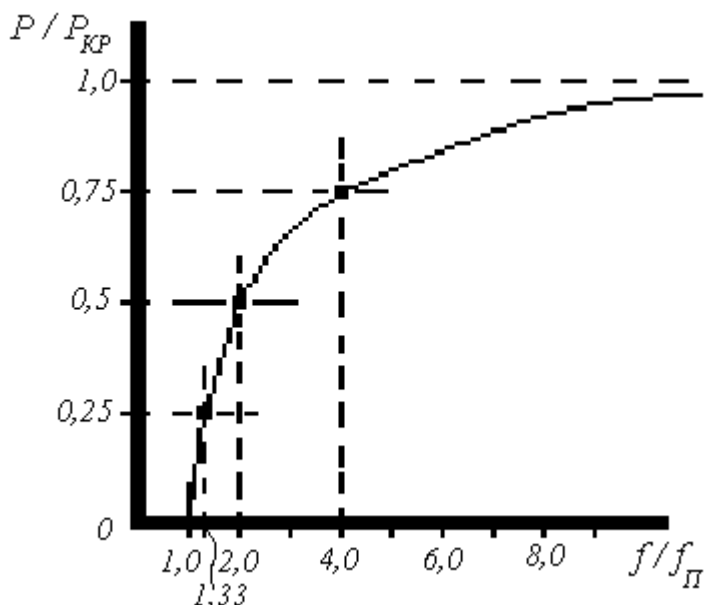


Рис. 15.4. Зависимость значений прогибов от величины сил

Таблица 15.1. Значения отношений прогибов в зависимости от отношения сил

$P / P_{кр}$	0	0,25	0,5	0,75	1,0
$f / f_{\Pi}$	1,0	1,33	2,0	4,0	$\infty$

Видим, что при  $\frac{P}{P_{КР}} = 1$ , то есть при  $P = P_{КР}$   $\frac{f}{f_{\Pi}} \rightarrow \infty$ .

В действительности это не так. Например, согласно точному решению для случая действия только продольной силы на двух опорную балку (рис. 15.5), если принять, например, что  $\frac{f_{\Pi}}{l} = \frac{1}{600}$ :

при  $P = P_{KP}$

$$\frac{f}{f_{\Pi}} = 129, \text{ а при } P = 0,5P_{KP}$$

$$\frac{f}{f_{\Pi}} = 2.$$

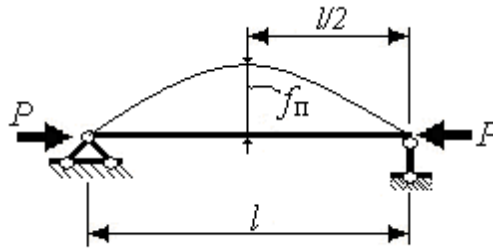


Рис.15.5. К сравнению точного и приближенного решений задачи о продольно-поперечном изгибе стержня