

14. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

14.1. Понятия и определения

Формы равновесия. Рассмотрим различные варианты поверхностей, на которых располагается шарик (рис.14.1). Видим, что в зависимости от формы поверхности, шарик может находиться в устойчивом, безразличном и неустойчивом положении.



Рис. 14.1. Формы равновесия шарика на поверхности

Устойчивое положение шарика характерно тем, что при любом отклонении его от положения равновесия, он вернется к этому положению. Безразличное положение – любое положение шарика на плоскости является устойчивым. При расположении шарика на выпуклой поверхности любое малое отклонение от положения шарика на вершине приведет к большим перемещениям его и он не сможет вернуться к исходному положению.

Устойчивость и потеря устойчивости. Как известно, в сопротивлении материалов изучаются инженерные методы расчета стержней **на прочность, жесткость и устойчивость**. Первые две задачи были рассмотрены ранее.

Устойчивость – свойство упругой системы сохранять свое состояние (например, первоначальную форму упругого равновесия) при внешних воздействиях.

Переход неустойчивой системы к новому состоянию – **потеря устойчивости**. Возможны различные последствия в результате потери устойчивости:

а) переход системы к некоторому новому положению равновесия, что сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций и разрушением. Примеры: центрально сжимаемый стержень (рис.14.2 *а*), всесторонне сжимаемая тонкостенная труба (рис.14.2 *б*);

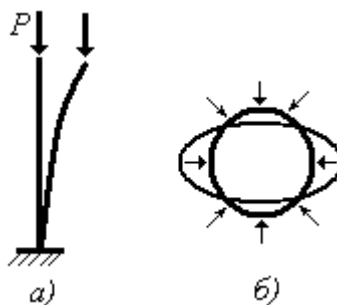


Рис. 14.2. Примеры потери устойчивости

б) конструкция продолжает выполнять свои основные функции после потери ею устойчивости, например обшивка самолета или потеря устойчивости одним из стержней фермы;

в) система не обладает устойчивым равновесием и переходит в режим незатухающих колебаний.

Потеря устойчивости чаще всего наблюдается в легких, тонкостенных конструкциях. Для повышения запаса устойчивости таких конструкций необходимо увеличивать жесткость поперечных сечений.

Простейшим примером элемента конструкции, для которой важным является фактор устойчивости, является **центрально сжимаемый стержень**.

По аналогии с шариком на поверхности (рис.14.1), стержень под действием сжимающей силы также может отклоняться от положения упругого равновесия (рис.14.3).

При этом стержень может находиться в одном из трех состояний – устойчивом, безразличном (так называемом **критическом**) и неустойчивом, что связано с **величиной сжимающей** силы.

Критическая сила и критические напряжения. При анализе устойчивости упругой системы и, в частности, стержней определяются такие значения внешних сил, при которых устойчивое положение равновесия становится неустойчивым. Из рассмотрения рис. 12.3 видим, что при достижении сжимающей силой **критического** значения ее незначительное увеличение приведет к значительному росту прогиба – т.е. к потере устойчивости.

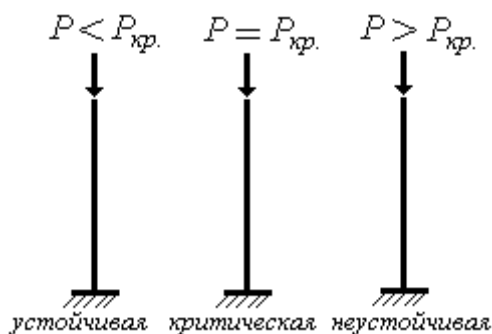


Рис. 14.3. Формы устойчивости стержня

Потеря устойчивости – неограниченный рост перемещений (прогибов) при незначительном увеличении сжимающей силы.

Минимальная по величине сила, при которой стержень теряет устойчивость – КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА.

При этом стержень **обязательно** будет изгибаться **в плоскости минимальной жесткости**. Это легко продемонстрировать на примере обычной линейки: как бы мы не поворачивали ее поперечное сечение по отношению к сжимающей силе – линейка всегда будет изгибаться относительно оси, параллельной большей из сторон прямоугольника. Следовательно, в расчетах будем определять осевой момент инерции относительно оси минимума – I_{min} .

Отсюда можно сделать важный вывод: при выборе формы и размеров сечения стержня необходимо стремиться к тому, чтобы по возможности оба момента инерции сечения были равны по величине.

14.2. Устойчивость сжатых стержней в упругой стадии

Формула Эйлера.

Впервые задачу об упругом равновесии центрально сжатого стержня решил академик Российской академии наук Леонард Эйлер.

Он рассмотрел равновесие стержня, сжимаемого центральными силами P (рис.14.4).

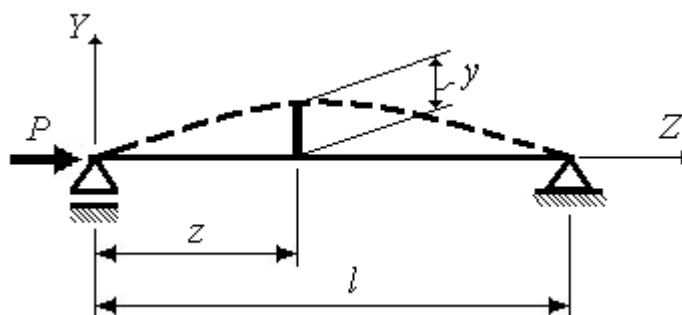


Рис. 14.4. К выводу формулы Эйлера

Определим условия, при которых возможно равновесие стержня с изогнутой осью **при малых прогибах**.

Под действием сжимающей силы определенной величины стержень изогнется и в его поперечных сечениях возникнет изгибающий момент $M = P y$.

Если под действием изгибающего момента **кривизна стержня уменьшается** (стержень распрямляется), то знак момента – **плюс**.

В данном случае кривизна стержня под действием сжимающей силы **увеличивается**, поэтому $M = -P y$.

Из теории изгиба известно приближенное **дифференциальное уравнение упругой линии**: $EI y'' = M = -P y$. Обозначим $\frac{P}{EI_{\min}} = k^2$. Получаем дифференциальное

уравнение второго порядка $y'' + k^2 y = 0$. Решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz.$$

Из граничных условий (на опорах):

при $z = 0$, прогиб на левой опоре $y = 0$. Следовательно, $C_2 = 0$;

при $z = l$, прогиб на правой опоре $y = 0$. Следовательно, $C_1 \sin kl = 0$.

В случае, если $C_1 = 0$ стержень не изгибается. Поэтому $C_1 \neq 0$ и остается принять $\sin kl = 0$. Откуда $kl = \pi n$, где n – ряд простых чисел: 1, 2, 3, ...

Стержень потеряет устойчивость, когда значение силы будет минимальным, т.е. принимаем $n=1$. Следовательно, $k = \frac{\pi}{l}$.

Получаем формулу для определения **критической силы**

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (14.1)$$

Влияние на величину критической силы опорных закреплений.

Формула Эйлера получена **путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси (упругой линии) стержня** при определенном способе закрепления его концов – концы стержня опирались на **шарнирные опоры** (рис.14.4). Такой случай закрепления концов стержня называют **основным**. Найденное выражение для $P_{кр.}$ (14.1) справедливо лишь для этого случая закрепления и будет изменяться при изменении условий закрепления концов стержня.

Если повторить весь ход рассуждений для другого случая закрепления, можно получить формулу другого вида. Здесь мы покажем, что путем простых рассуждений можно получить формулы, в которых будут учитываться особенности закрепления концов стержня (рис. 14.5) в сравнении с основным способом (рис.14.5 а).

Один конец стержня жестко закреплен, а второй свободен (рис. 14.5 б). При достижении силой P значения критической силы, стержень потеряет устойчивость и изогнется по дуге AB . Если мысленно продлить стержень на длину l за закрепление, мы получим вторую полуволну. Таким образом, на **двух длинах** стержня получим синусоиду – как в основном случае закрепления. Для этого случая критическая сила будет равна критической силе для основного случая при длине стержня $2l$.

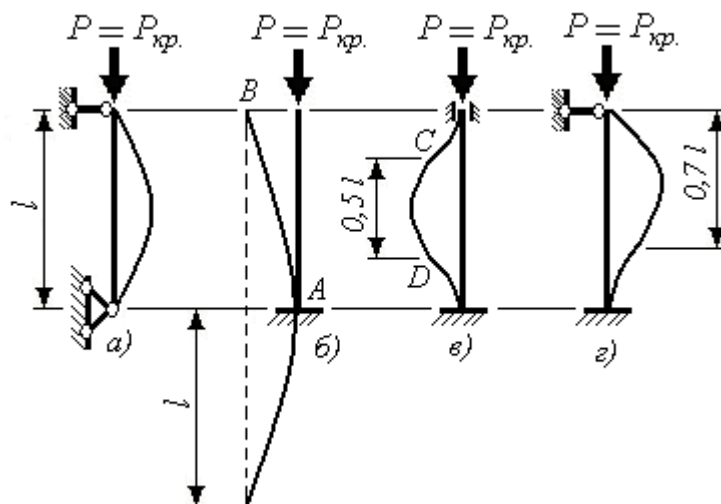


Рис. 14.5. Влияние условий закрепления на форму потери устойчивости

Критическую силу в этом случае определим по формуле

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда оба конца стержня **жестко закреплены** (рис.14.5 в). Видим, что в точках C и D кривая меняет кривизну, т.е. изгибающий момент в этих точках будет равен нулю (условно говоря в этих точках - шарниры). Стержень между точками C и D изгибается также, как и для основного случая – по синусоиде, т.е. при длине стержня $l/2$. Тогда:

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,5l)^2}.$$

Аналогично для схемы с одной заделкой и одной шарнирно подвижной опорой (рис.14.5 г)

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,7l)^2}.$$

Все полученные формулы можно объединить в одну, заменив числа 1; 2; 0,5; 0,7 и т.д. – соответствующие виду закрепления концов, через μ – **коэффициент приведения длины**. Полученная формула носит название

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (14.2)$$

Произведение μl есть приведенная длина. Таким образом, формула Эйлера для критической силы может быть применена для любого случая закрепления концов, если в формулу вводить соответствующий схеме закрепления коэффициент μ .

Критические напряжения. Гибкость стержня.

Преобразуем формулу Эйлера с учетом того обстоятельства, что до момента потери устойчивости стержень будет воспринимать действие центрально приложенной сжимающей силы, т.е. работать при центральном сжатии. Следовательно, $\sigma = \frac{P}{A}$ и по

анalogии критическое напряжение $\sigma_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{A}$. Тогда

$$\sigma_{кр.} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (14.3)$$

где:

λ – гибкость стержня.

$i_{min}^2 = \frac{I_{min}}{A}$ – квадрат минимального радиуса инерции.

Таким образом,

ГИБКОСТЬ СТЕРЖНЯ

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (14.4)$$

Предельная гибкость. Формула Эйлера выведена на основе рассмотрения дифференциального уравнения **упругой линии** балки, то есть приведенные выше рассуждения справедливы только до напряжений, не превышающих значений **предела пропорциональности** материала стержня.

Следовательно,

формула Эйлера справедлива (применима) при соблюдении условия:

$$\sigma_{кр.} \leq \sigma_{пц} \quad (14.5)$$

Подставим в неравенство значение критических напряжений (14.3):

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}. \quad (14.6)$$

Выразим из этого неравенства гибкость λ , обозначив ее $\lambda_{пред.}$:

ПРЕДЕЛЬНАЯ ГИБКОСТЬ

$$\lambda_{пред.} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (14.7)$$

Пределы применимости формулы Эйлера. Таким образом, формула Эйлера применима при условии:

УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

$$\lambda \geq \lambda_{пред.} \quad (14.8)$$

Определим, например, предельную гибкость для широко распространенных материалов: для стали Ст.3: $\sigma_{нц.} = 200 \text{ МПа}$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$; $\pi^2 \approx 10$;

$$\lambda_{пред.} = \sqrt{\frac{10 \times 2 \times 10^5}{200}} = 100.$$

Для чугуна $\lambda_{пред.} = 80$, для дерева $\lambda_{пред.} = 110$, для стали Ст.5 $\lambda_{пред.} = 85$.

Стержни, для которых выполняется неравенство (14.8) называют стержнями большой гибкости.

Обычно это тонкие и длинные стержни.

В формуле (14.6) заменим предел пропорциональности материала стержня на критическое напряжения и запишем ее в виде равенства:

$$\sigma_{кр.} \lambda^2 = \pi^2 E.$$

Видим, что произведение критического напряжения на квадрат гибкости есть величина постоянная, а график зависимости имеет вид **гиперболы**.

14.3. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

Стержни средней и малой гибкости.

Русский инженер Ф.С. Ясинский, на основе собственных исследований, а также результатов исследований других ученых пришел к выводу, что при $\sigma_{нц.} \leq \sigma_{кр.} \leq \sigma_T$ возможно разрушение конструкции: продольное сжатие стержня будет сопровождаться **не только упругой, но и пластической деформацией**, причем в момент потери устойчивости (при искривлении оси стержня) появляются дополнительные нормальные напряжения от изгиба. После снятия нагрузки стержень уже не выпрямляется, как при упругом сжатии.

Это характерно для так называемых **стержней средней гибкости** – гибкость стержня имеет значения, меньшие ее предельного значения. В этом случае, например, для стали Ст.3 гибкость стержня изменяется в пределах ($30 \dots 40 \leq \lambda \leq 100$).

Короткие стержни (для стали Ст.3 $\lambda = 30 \div 40$) теряют несущую способность не из-за нарушения устойчивости прямолинейной формы, а вследствие потери прочности материала при сжатии. Для **стержней малой гибкости** критические напряжения практически близки: для пластичных материалов к σ_T , а для хрупких к σ_{σ} . То есть **для стержней малой гибкости расчёт на устойчивость теряет смысл**.

Построим график зависимости $\sigma = f(\lambda)$, например, для стали Ст.3: $\sigma_{нц.} = 200 \text{ МПа}$; $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ (рис.12.6).

График состоит из трёх частей:

- кривая второго порядка $\lambda > \lambda_{пред.} = 100$ (гипербола Эйлера);
- наклонная прямая $40 \leq \lambda \leq 100$ (прямая Ясинского);
- горизонтальный участок $\lambda \leq 40$ ($\sigma_{кр.} \approx \sigma_T$).

Формула Ф. С. Ясинского.

Для вычисления критических напряжений применяются **эмпирические формулы**. В СССР – использовалась формула Ясинского, которая применяется в расчетах стержней средней гибкости и в настоящее время.

ФОРМУЛА ЯСИНСКОГО

для определения критических напряжений: $\sigma_{кр.} = a - b\lambda$; (14.9)

для определения критической силы: $P_{кр.} = A(a - b\lambda)$,

где:

a, b – коэффициенты, зависящие от свойств материала стержня. Имеют размерность напряжений.

Их значения получены опытным путем и приводятся в справочной литературе. В частности для дерева: $a = 29,3 \text{ МПа}$; $b = 0,194 \text{ МПа}$;

для стали Ст.3: $a = 310 \text{ МПа}$; $b = 1,14 \text{ МПа}$.

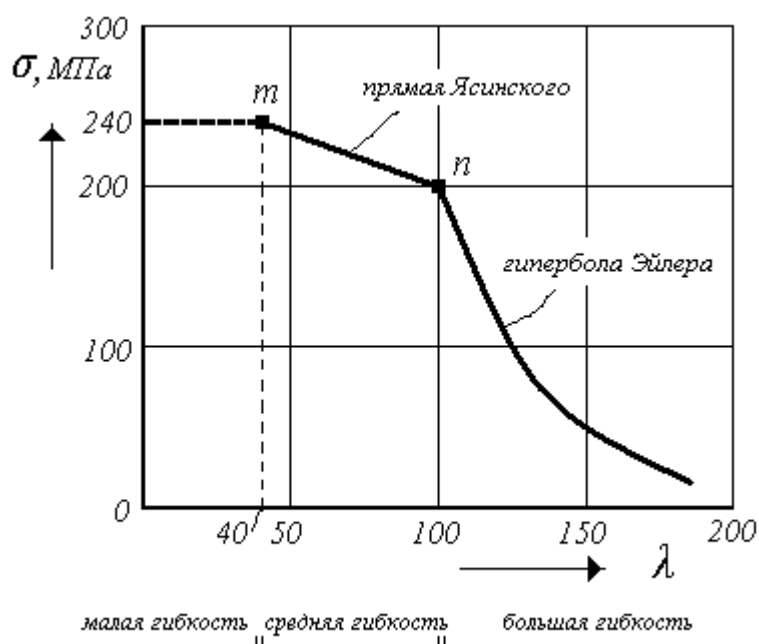


Рис. 14.6. Зависимость нормальных напряжений от гибкости для стального стержня

14.4. Практический расчет сжатых стержней на устойчивость

Расчет на прочность. На первом этапе проводится расчет стержня на прочность, причем с учетом **возможного ослабления поперечного сечения стержня**, т.е. в условии прочности при сжатии оперируют так называемой **площадью НЕТТО**:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_{нетто}} \leq [\sigma]. \quad (14.10)$$

При этом, как известно, $[\sigma] = \frac{\sigma_{оп.}}{n}$. Опасное же напряжение равно, соответственно, для пластичного материала – пределу текучести, для хрупкого – пределу прочности.

Расчёт на устойчивость.

Расчет проводят как проверочный по аналогичной (14.10) формуле, но **без учета** ослабления сечения (т.е. по **площади БРУТТО**), т.к. местное ослабление сечений (на-

пример, отверстия) мало влияет на величину критической силы. В качестве **опасного напряжения принимают критическое напряжение** материала стержня:

$$\sigma_y = \frac{P}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma]_y. \quad (14.11)$$

Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость $[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр.}}{n_y}$.

Коэффициент запаса при расчете на устойчивость принимают несколько выше, чем коэффициент запаса прочности $n_y > n$, так как n_y учитывает не только величину n при расчете на прочность, но и возможные **эксцентриситет приложения нагрузки, начальную кривизну стержня, неоднородность материала** и т.д.

Приведем ориентировочные значения коэффициентов запаса устойчивости для различных отраслей и материалов.

В **строительстве**: для стали $n_y = 1,8 \dots 3,5$; для чугуна $n_y = 5,0 \dots 5,5$; для дерева $n_y = 2,8 \dots 3,2$. В **машиностроении**, например для стальных ходовых винтов станков $n_y = 4 \dots 5$.

Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость $[\sigma]_y$ зависит не только от свойств материала, но и от формы и геометрических размеров стержня, так как $\sigma_{кр.}$ есть функция их (см. формулы 14.3 и 14.9). Поэтому в каждом конкретном случае $[\sigma]_y$ необходимо вычислять, что не очень удобно.

Коэффициент продольного изгиба.

При потере устойчивости стержень изгибается – продольная сила создает в поперечных сечениях изгибающий момент. Поэтому **наравне** с термином **устойчивость** используется и другое название – **продольный изгиб стержня**.

Запишем отношение допускаемых напряжений $\frac{[\sigma]_y}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр.} \cdot n}{n_y \cdot \sigma_{оп.}} = \varphi$,

где:

$\sigma_{оп.}$ – опасные напряжения (σ_T или σ_{σ}),

φ – **коэффициент продольного изгиба** (коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие).

КОЭФФИЦИЕНТ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА изменяется в пределах:

$$0 \leq \varphi \leq 1. \quad (14.12)$$

Его значения приводятся в таблицах в зависимости от **гибкости** λ и вида **материала**.

Условие устойчивости.

С учетом коэффициента φ можно записать условие устойчивости центрально сжатых стержней (14.13) – **значение основного допускаемого напряжения снижается на величину указанного коэффициента**.

С использованием указанной формулы осуществляется проверка устойчивости.

ПРОВЕРКА УСТОЙЧИВОСТИ:

$$\sigma_y = \frac{P}{A} \leq [\sigma]_y = \varphi [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_y = \frac{P}{\varphi A} \leq [\sigma]. \quad (14.13)$$

Записав формулу (14.13) относительно площади сечения стержня, решаем проектировочную задачу (14.14).

ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ:

$$A \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}. \quad (14.14)$$

Аналогично решается задача по определению допускаемой (с точки зрения обеспечения устойчивости) нагрузки (14.15).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКАЕМОЙ НАГРУЗКИ:

$$[P] \leq A\varphi[\sigma]. \quad (14.15)$$

Порядок проведения проверочного расчета.

Проверка устойчивости проводится в следующей последовательности.

- определяется минимальный момент инерции сечения I_{\min} ;
- определяется площадь сечения A ;
- определяется минимальный радиус инерции сечения ($i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$).

Для прокатных профилей значения i_{\min} находят в таблицах сортамента. Необходимо помнить, что сжимающая сила приложена в центре тяжести сечения и, поэтому, геометрические характеристики сечения следует определять **в главных центральных осях**;

- определяется гибкость стержня ($\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$);
- по таблице, в зависимости от материала и гибкости, определяется коэффициент продольного изгиба φ (линейной интерполяцией);
- проводится проверка устойчивости по **формуле (14.13)**.

Аналогичным образом ведут **расчет допускаемой нагрузки** (по **формуле 14.15**).

Пример 1. Определить допускаемую нагрузку и запас устойчивости деревянной колонны (рис. 14.7) квадратного поперечного сечения со стороной $a=15$ см, при $[\sigma]=10$ МПа.

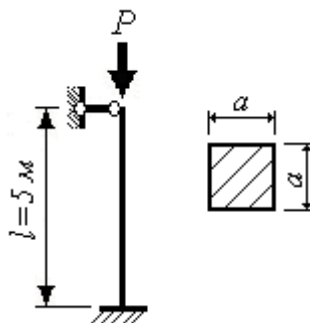


Рис. 14.7. Расчетная схема к примеру 1.

Решение.

Допускаемую нагрузку определим по формуле (14.15), а коэффициент запаса, т.к. сжимающая сила неизвестна, определяется отношением сил – критической и допускаемой: $n_y = \frac{P_{кр.}}{[P]}$. Если внешняя нагрузка задана, то коэффициент запаса определяется отношением этой нагрузки к допускаемой.

Для заданной схемы закрепления концов стержня $\mu = 0,7$.

1) Определим геометрические характеристики квадратного сечения:

$$I_{\min} = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4219 \text{ см}^4; \quad A = a^2 = 15^2 = 225 \text{ см}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4219}{225}} = 4,33 \text{ см.}$$

2) Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \times 500}{4,33} = 80,8$.

3) По таблице для гибкости $\lambda = 80,8$ и дерева путем линейной интерполяции находим коэффициент продольного изгиба:

при $\lambda = 80$ коэффициент $\varphi = 0,49$, а при $\lambda = 90$ коэффициент $\varphi = 0,38$. Следовательно, на 10 единиц гибкости приходится $0,49 - 0,38 = 0,11$. И тогда

$$0,49 - \frac{0,11}{10} \cdot 0,8 = 0,481. \text{ Принимаем } \varphi = 0,48.$$

4) Допускаемая нагрузка:

$$[P] = \varphi A [\sigma] = 0,48 \times 225 \times 10^{-4} \times 10 \times 10^3 = 108 \text{ кН}$$

5) Критическая сила:

т. к. $\lambda = 80,8 < \lambda_{пред.} = 110$ (дерево), то по формуле Ясинского:

$$P_{кр.} = A(a - b \lambda) = 225 \times 10^{-4} \times (29,3 - 0,194 \cdot 80,8) \times 10^3 = 306,6 \text{ кН.}$$

6) Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр.}}{[P]} = \frac{306,6}{108} = 2,84.$$

Расчет на устойчивость по коэффициентам уменьшения допускаемых напряжений.

Проектировочный расчет, который проводится по формуле (14.14), связан с определенной трудностью по определению коэффициента φ . Она заключается в том, что **искомой является площадь сечения**, без знания значения которой, нельзя найти гибкость и, следовательно, коэффициент продольного изгиба. Имеем замкнутый круг. Поэтому при проведении расчетов используется так называемый **метод последовательных приближений**.

Задачу решают, задаваясь рядом последовательных значений коэффициента φ , в результате определяется такое значение площади, при котором обеспечивается выполнение условия устойчивости (при обеспечении минимальной материалоемкости).

Первое приближение.

1) Задаются коэффициентом φ_1 . Его значение, как известно, изменяется в пределах $0 \leq \varphi \leq 1$. Обычно принимают $\varphi = 0,5 \dots 0,6$, иногда даже $0,1 \dots 0,2$.

2) Определяют площадь в первом приближении: $A_I = \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]}$.

3) В зависимости от заданной формы сечения по площади определяют его размеры (или номер прокатного профиля).

4) Определяют геометрические характеристики сечения: I_{\min}, i_{\min} .

5) Рассчитывают гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$.

6) По таблице определяют значение φ'_1 и сравнивают с φ_1 . Если $\varphi'_1 = \varphi_1$, то расчёт окончен. Если они отличаются, то выполняют **второе** приближение.

7) Во **втором** приближении задаются средним значением φ .

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

8) Выполняются расчеты в соответствии с п. п. 2 – 6 и, если есть необходимость, переходят к **третьему** приближению и т.д.

9) Расчет прекращают при выполнении условия устойчивости

$$\sigma_y = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma].$$

При этом превышение правой части над левой не должно быть более 5%. В идеале напряжения слева и справа должны быть одинаковыми.

Пример 2. Определить размеры прямоугольного сечения деревянной стойки, сжимаемой силой $P = 50$ кН. Отношение сторон прямоугольного сечения $b/h = 3$. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 8$ МПа. Один конец стойки заделан, другой свободен (рис. 14.8).

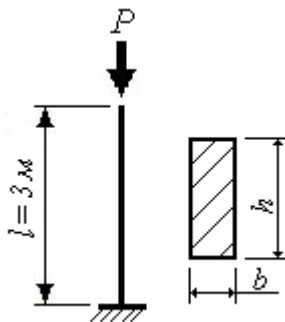


Рис. 14.8. Расчетная схема к примеру 2.

Для удобства расчетов, с учетом исходных данных, запишем параметры, используемые при решении, через величины b или φ :

- площадь поперечного сечения (по условию задачи $h = 3b$)

$$A = b \times h = 3b^2;$$

- эта же площадь (в соответствии с формулой 14.14)

$$A = \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{50}{\varphi \times 8 \times 10^3 \times 10^{-4}} = \frac{62,5}{\varphi} \text{ см}^2;$$

- минимальный радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{h \times b^3}{12 \times b \times h}} = \frac{b}{\sqrt{12}};$$

- гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{\mu l \sqrt{12}}{b} = \frac{2 \times 300 \times \sqrt{12}}{b} = \frac{2078,4}{b} \text{ см.}$$

Ориентировочно примем $\varphi = 0,5$ и подсчитаем значение площади сечения по формуле (14.14):

$$A = \frac{62,5}{\varphi} \text{ см}^2 = \frac{62,5}{0,5} = 125 \text{ см}^2.$$

Сравнивая значения площадей $125 = 3b^2$, определим значение основания прямоугольника

$$b = \sqrt{\frac{125}{3}} = 6,45 \text{ см.}$$

Для полученного значения $b = 6,45 \text{ см}$: $\lambda = \frac{2078,4}{6,45} = 322$.

По таблице при $\lambda = 322$ и дерева $\varphi < 0,08$ и, следовательно, значение $\varphi = 0,5$ сильно завышено. Поэтому примем значение коэффициента в первом приближении намного меньшим ориентировочного значения, например, равным $0,1$.

Первое приближение:

для $\varphi_1 = 0,1$ $A_1 = \frac{62,5}{\varphi_1} = \frac{62,5}{0,1} = 625 \text{ см}^2 = 3b^2$, откуда

$$b_1 = \sqrt{208,3} = 14,4 \text{ см}; \quad \lambda_1 = \frac{2078,4}{14,4} = 144.$$

По таблице для $\lambda_1 = 144$, линейно интерполируя, получаем $\varphi'_1 = 0,152$.

Второе приближение:

$$\varphi_2 = \frac{0,152 + 0,1}{2} = 0,13, \quad A_2 = \frac{62,5}{0,13} = 481 \text{ см}^2 = 3b^2.$$

$$b_2 = \sqrt{160,3} = 12,7 \text{ см}; \quad \lambda_2 = \frac{2078,4}{12,7} = 163,6,$$

По таблице, линейно интерполируя, получаем $\varphi'_2 = 0,117$.

Третье приближение:

$$\varphi_3 = \frac{0,117 + 0,13}{2} = 0,124, \quad A_3 = \frac{62,5}{0,124} = 504 \text{ см}^2 = 3b^2.$$

$$b_3 = \sqrt{168} = 13,0 \text{ см}; \quad \lambda_3 = \frac{2076}{13,0} = 160.$$

Получаем $\varphi'_3 = 0,12$.

Четвертое приближение:

$$\varphi_4 = \frac{0,124 + 0,12}{2} = 0,122; \quad A_4 = \frac{62,5}{0,122} = 512 \text{ см}^2 = 3b^2.$$

$$b_4 = \sqrt{170,7} = 13,05 \text{ см}; \lambda_4 = \frac{2078,4}{13,05} = 159, \text{ получаем } \varphi'_4 = 0,122.$$

Принятое и полученное значения коэффициента φ равны.

Таким образом, принимаем $b = 13,05 \text{ см}; h = 3b = 39,15 \text{ см}.$

Проверяем правильность расчета:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{50}{13,05 \cdot 39,15 \times 10^{-4}} = 979 \text{ кПа};$$

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma] = 0,122 \times 8 \times 10^3 = 976 \text{ кПа}.$$

Превышение напряжений над допускаемыми:

$$\frac{979 - 976}{976} \times 100\% = 0,31\% < 5\%.$$

Условие устойчивости – соблюдается.