

13. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Стержневая система в широком смысле слова – это всякая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса. К таким конструкциям, в частности, относятся фермы, рамы, балки.

Напомним, что статически неопределимыми называют конструкции (стержневые системы) реакции опор и внутренние силовые факторы, в которых, не могут быть определены при помощи уравнений равновесия (статики).

13.1. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии.

Цель расчета бруса и стержневой системы (состоящей из отдельных брусьев – стержней), как и любой конструкции – определение размеров поперечных сечений стержней, при которых обеспечивается прочность или жесткость, или и то и другое. Исходя из условий прочности и жесткости при центральном растяжении-сжатии, видим, что в первую очередь необходимо знать экстремальное значение продольной силы.

На рис. 13.1 а стержень опирается на две жесткие опоры. Возникают две реакции N_1 и N_2 (рис. 13.1 б), величина и направление которых неизвестны, т.к. можно составить только одно уравнение равновесия. В уравнении – два неизвестных осевых усилия:

$$\sum Z = 0; \quad N_1 + N_2 - P = 0.$$

Задача **один раз** статически неопределима. Одна связь (опора) – «лишняя».

На рис. 13.1 в – стержневая система, составленная из трех стержней, соединенных шарнирно.

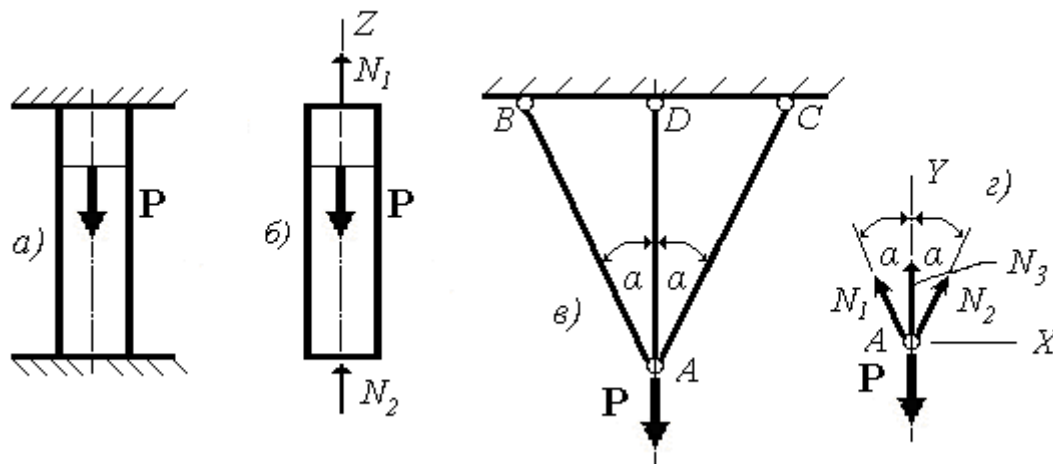


Рис. 13.1. Один раз статически неопределимые системы

Пример 1 (рис.13.1 в). В стержнях действуют **три усилия**, направленные вдоль этих стержней. Можно составить **только два уравнения** равновесия (рис. 13.1 г):

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_2. \\ \sum Y &= 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - P = 0; \\ N_1 &= N_2 = 0,5 \frac{P - N_3}{\cos \alpha} \end{aligned} \quad (13.1)$$

Задача **один раз** статически неопределима, одна связь (стержень) – «лишняя».

«Лишними» такие связи называют потому, что **они не являются необходимыми** для обеспечения равновесия конструкции и ее геометрической неизменяемости (деформация стержней и соответствующие ей перемещения отдельных точек системы могут возникать только от действия внешних сил).

Наличие этих связей обусловлено требованиями к прочности и жесткости конструкции или условиями ее работы.

Для решения задачи по определению неизвестных усилий (говорят – для раскрытия статической неопределимости) **необходимо составить дополнительные уравнения**. Их количество равно степени статической неопределимости.

Число лишних неизвестных или **степень статической неопределимости** системы устанавливается **разностью между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики**.

Дополнительные уравнения составляются на основе общего принципа: **условий совместности деформаций**: т.к. стержни соединяются между собой определенным образом – шарнирно, жестко или в соединении имеются некоторые зазоры, **стержни этой системы деформируются совместно**.

Методику раскрытия статической неопределимости рассмотрим на примере системы (рис. 13.1 в).

Примем, что площадь поперечного сечения боковых стержней одинакова $F_1 = F_2 = F$, а средний стержень имеет площадь nF .

1. **Силовая сторона задачи.** Составляют уравнения равновесия (в данном случае – два). Они нами составлены ранее. Имеем три неизвестных усилия и два уравнения статики. Система **один раз статически неопределима**.

2. **Геометрическая сторона задачи.** Рассмотрим перемещения стержней, сходящихся в точке A (рис. 13.2). Под действием внешней силы исследуемая точка переместится в положение A_1 . Концы стержней AB, AD, AC соединены шарнирно в точке A , поэтому они получат соответствующие удлинения. Причем эти **стержни деформируются совместно**, в соответствии с геометрией системы.

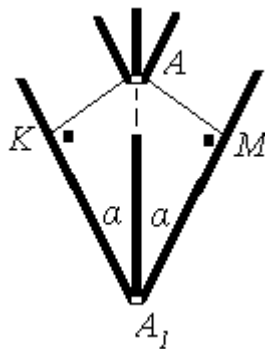


Рис. 13.2. Перемещения стержней в узле A

Мысленно рассоединим стержни в ненагруженном состоянии (в т. A) и соединим их в положении после нагружения (в т. A_1). Концы крайних стержней переместятся по дуге из т. A соответственно в т. K и т. M и, удлинившись, соединятся в т. A_1 . Вертикальное перемещение точки A **весьма мало**; угол AA_1M равен углу AA_1K ; дуги можно заменить прямыми, поэтому углы AKA_1 и AMA_1 – прямые.

Ввиду симметрии системы, абсолютные удлинения крайних стержней будут равны между собой: $\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC}$. Геометрически эти деформации определяются отрезками $KA_1 = MA_1$. Средний стержень удлинится на величину отрезка AA_1 и его удлинение Δl_{AD} .

Рассматривая прямоугольные треугольники AKA_1 и AMA_1 можем записать соотношение сторон:

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} = \Delta l_{AD} \cos \alpha. \quad (13.2)$$

Уравнение (13.2) и есть уравнение совместности деформаций рассматриваемой системы.

3. **Физическая сторона задачи.** В уравнении совместности деформаций выразим абсолютную деформацию через продольные силы по закону Гука:

$$\frac{N_1 l_{AB}}{E F} = \frac{N_3 l_{AD}}{E n F} \cos \alpha.$$

Ввиду малости перемещений длина стержней мало меняется и $l_{AB} = \frac{l_{AD}}{\cos \alpha}$.

После преобразований получим зависимость

$$N_1 = \frac{N_3 \cos^2 \alpha}{n}. \quad (13.3)$$

4. **Решение системы уравнений (синтез).** Решаем систему уравнений (13.1 и 13.3) и после преобразований получим зависимости, с помощью которых определяются искомые усилия в стержнях:

$$N_3 = \frac{P n}{2 \cos^3 \alpha + n}; \quad N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + n}. \quad (13.4)$$

Видим, что с увеличением площади среднего стержня (с увеличением коэффициента n), усилие в нем уменьшится; усилия в крайних стержнях также изменятся. В этом отличительная особенность статически неопределимых систем от статически определимых:

**ПОВЫШЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ (EF) одних элементов приводит к УВЕЛИЧЕНИЮ В НИХ УСИЛИЙ и, обычно, к снижению усилий в других элементах.
В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ усилия в элементах НЕ ЗАВИСЯТ от их жесткости.**

5. **Решение задачи в соответствии с ее условием.** По известным усилиям, записав условие прочности или условие жесткости, решаем задачу по проверке прочности или жесткости, проводим проектировочный расчет или определяем допускаемое значение нагрузки.

Пример 2. Рассмотрим методику раскрытия статической неопределимости для одиночного стержня, изображенного на рис.13.3. Стержень имеет площадь поперечного сечения F и изготовлен из материала с модулем упругости I рода E . Неизвестны 2 усилия – N_1 и N_2 . Их величина будет зависеть от положения точки приложения заданной силы P (рис. 13.3 а).

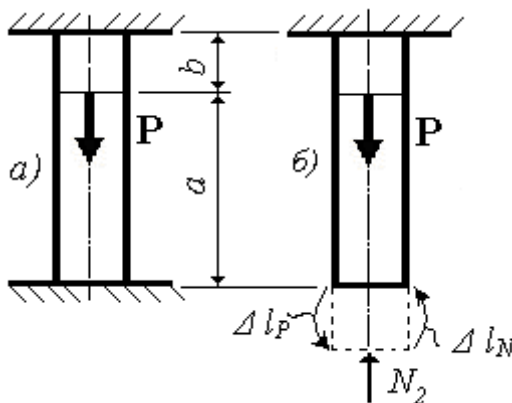


Рис. 13.3. Стержень, защемленный с двух сторон

Уравнение равновесия составлено нами ранее:

$$\sum Z = 0; \quad N_1 + N_2 - P = 0 \quad (13.5)$$

Рассмотрим геометрическую сторону задачи и составим уравнение совместности деформаций для **опорных сечений, в которых перемещения равны нулю**.

Отбросим мысленно нижнюю опору (рис. 13.3 б). Это опорное сечение станет свободным и переместится вниз за счет абсолютной линейной деформации Δl_P участка длиной b под действием силы P . С другой стороны, рассматриваемое опорное сечение – неподвижно, следовательно, перемещение его должно равно нулю. Это условие будет выполняться, если реакция на опоре N будет по величине и направлению такой, что абсолютная линейная деформация от ее действия Δl_N окажется равной по величине и противоположной по направлению деформации Δl_P . Условие совместности деформаций запишется в виде:

$$\Delta l_P = \Delta l_N. \quad (13.6)$$

По закону Гука:

$$\frac{Pb}{EF} = \frac{N_2(a+b)}{EF}. \quad (13.7)$$

Таким образом, $N_2 = \frac{Pb}{a+b}$. Статическая неопределимость раскрыта.

13.1.1. Расчеты в связи с наличием натягов при сборке конструкций. На практике встречаются и другие задачи, например связанные с **неточностью** изготовления элементов (стержней).

Неточность изготовления (даже незначительные погрешности) требует приложения **дополнительных усилий** для сборки узла, при этом возникают **натяги** и соответствующие **монтажные напряжения**.

Пример 1 – средний стержень в стержневой системе изготовлен короче проектного размера на малую величину Δ (рис. 13.4 а). Для сборки стержней в узле A необходимо средний стержень растянуть, а крайние стержни сжать (рис. 13.4 б).

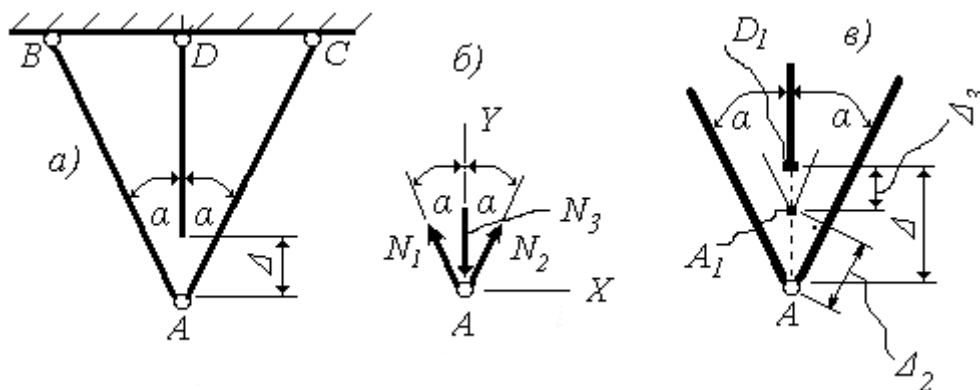


Рис. 13.4. Система из трех стержней с зазором в узле

Уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_2. \quad (13.8)$$

$$\sum Z = 0; \quad N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - N_3 = 0. \quad (13.9)$$

Неизвестны два усилия. Задача 1 раз статически неопределима.

Рассмотрим геометрическую сторону задачи (рис. 13.4 в). Крайние стержни будут укорачиваться на величину $\Delta_1 = \Delta_2 = AA_1 \cos \alpha$, а средний стержень удлинится на величину $\Delta_3 = D_1 A_1$. Тогда **уравнение совместности деформаций** запишется в виде:

$$\Delta = D_1 A_1 + AA_1 = \Delta_3 + \frac{\Delta_2}{\cos \alpha}. \quad (13.10)$$

Ход дальнейшего решения аналогичен порядку решения в предыдущих примерах. Видим, что средний стержень, еще до нагружения внешней силой будет растянут некоторой нагрузкой, т.е. напряжения от натяга будут суммироваться с напряжениями от эксплуатационных нагрузок, что не учитывается в обычных расчетах и может привести к потере прочности.

В качестве примера положительного эффекта от натяга можно привести примеры монтажа бандажа на колесо (металлическое кольцо разогревается и насаживается на колесо, при охлаждении кольцо обжимает колесо), а также предварительно напряженные железобетонные конструкции (в растянутой зоне бетонной плиты располагают предварительно напряженную сжимающими напряжениями стальную арматуру).

Пример 2. – стержень, имеющий жесткость EF , изготовлен короче заданной длины на величину Δ (рис. 13.5 а). Вид расчетной схемы и порядок решения будут зависеть от величины перемещения нижнего сечения (определяемого величиной и положением по длине силы P , а также жесткостью стержня):

а) величина перемещения нижнего сечения **меньше** величины зазора – абсолютная линейная деформация стержня $\Delta l_P < \Delta$. Задача **статически определима**.

б) величина перемещения нижнего сечения **больше** или равна величине зазора – абсолютная линейная деформация стержня $\Delta l_P \geq \Delta$. Задача **статически неопределима**.

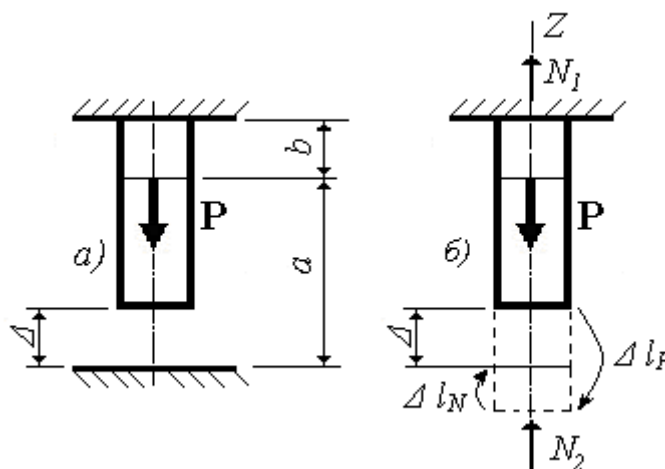


Рис. 13.5. К расчету стержня, выполненного с зазором

Таким образом, в первую очередь, необходимо определить величину перемещения нижнего сечения, которое будет определяться деформацией участка бруса длиной b от действия силы P :

$$\Delta l_P = \frac{Pb}{EF}.$$

Решение для случая $\Delta l_P < \Delta$ традиционно для решения статически определимых задач.

В случае, если $\Delta l_P \geq \Delta$, необходимо раскрыть статическую неопределимость.

На опорах возникнут две реакции, величины которых неизвестны (рис. 13.5 б). Уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0. \quad N_1 + N_2 - P = 0.$$

Уравнение совместности деформаций получим, рассматривая схему (рис. 13.5 б):

$$\Delta l_P = \Delta + \Delta l_N.$$

В соответствии с законом Гука

$$\frac{Pb}{EF} = \Delta + \frac{N_2(a+b)}{EF}.$$

Получаем: $N_2 = \frac{Pb - \Delta EF}{a+b}$. Статическая неопределимость раскрыта.

13.1.2. Расчеты в связи с изменением температуры. Напряжения в сечении стержня также будут возникать даже при отсутствии внешних нагрузок.

Рассмотрим стержень длиной l и площадью F , изготовленный из материала с модулем упругости E . Оба конца стержня жестко зашпелены (рис. 13.6 а). Начальная температура стержня t_1 . Определить напряжения, которые возникнут в сечении стержня, если он нагревается до температуры t_2 . Пусть градиент температуры будет положительным:

$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0.$$

Как известно, при нагреве материалы расширяются, т.е. стержень будет стремиться удлиниться и распирает опорные сечения, но из-за наличия этих жестких опор, в них возникнут реакции N_1 и N_2 .

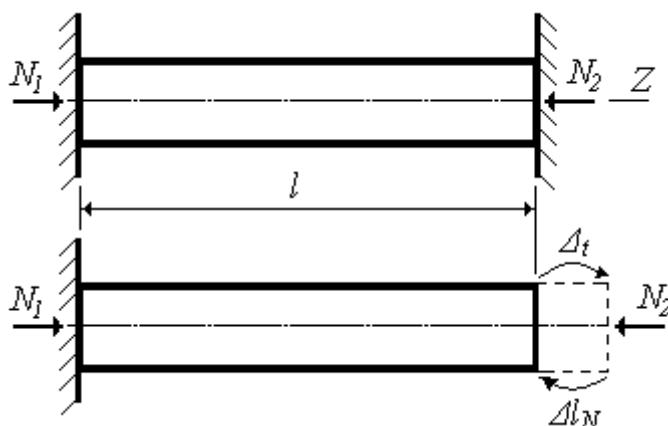


Рис. 13.6. Стержень, подвергнутый действию градиента температур

Уравнение равновесия: $\sum Z = 0. \quad N_1 - N_2 = 0; \quad N_1 = N_2.$

Стержень один раз статически неопределим.

В связи с жестким опиранием, **длина стержня l изменяться не будет**. Т.е. перемещения опорных сечений равны нулю, следовательно, температурная линейная деформация $\Delta t = 0$.

В отсутствие одной из опор, например правой (рис. 13.6 б), стержень удлинится на величину Δt . Это удлинение должно компенсироваться абсолютной линейной деформацией от действия реакции Δl_N .

Уравнение совместности деформаций: $\Delta t = \Delta l_N$.

По известной из курса физики формуле определим температурную деформацию стержня:

$$\Delta t = \alpha l \Delta t, \quad (13.11)$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения материала стержня, град^{-1} .

По закону Гука $\Delta l_N = \frac{N_2 l}{EF}$. **Сила сжимает стержень!**

Приравняв полученные зависимости, определим значение реакции на опоре и соответствующие температурные напряжения:

$$\sigma_t = \frac{N_2}{F} = \alpha E \Delta t. \quad (13.12)$$

Отметим, что температурные (при нагреве стержня) напряжения по знаку – **сжимающие**. Следовательно, в случае охлаждения такого стержня ($\Delta t = t_2 - t_1 < 0$), нормальные напряжения будут **растягивающими**. Кроме того, видим, что на величину напряжений не влияет длина стержня. Эти обстоятельства следует учитывать в случае использования хрупких материалов, а также, если стержень подвергается действию изменяющихся по величине и знаку температур.

Отметим, что на практике встречаются достаточно сложные схемы стержневых систем, и в каждом конкретном случае задача сводится к геометрическому анализу деформаций и составлению соответствующих уравнений совместности деформаций.

В заключение рассмотрим еще один пример.

Задача. Абсолютно жесткий брус (рис. 13.7 а) на стержнях, прикрепленных шарнирами, и нагружен силой P . Площадь стержней, соответственно, равна $2F$ и F ($F = 10 \text{ см}^2$). Длина стержней $2l$ и l . Определить значение допускаемой силы $[P]$ из расчета по допускаемым напряжениям и из расчета по разрушающим (предельным) нагрузкам. Материал стержней – сталь Ст.3 ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$).

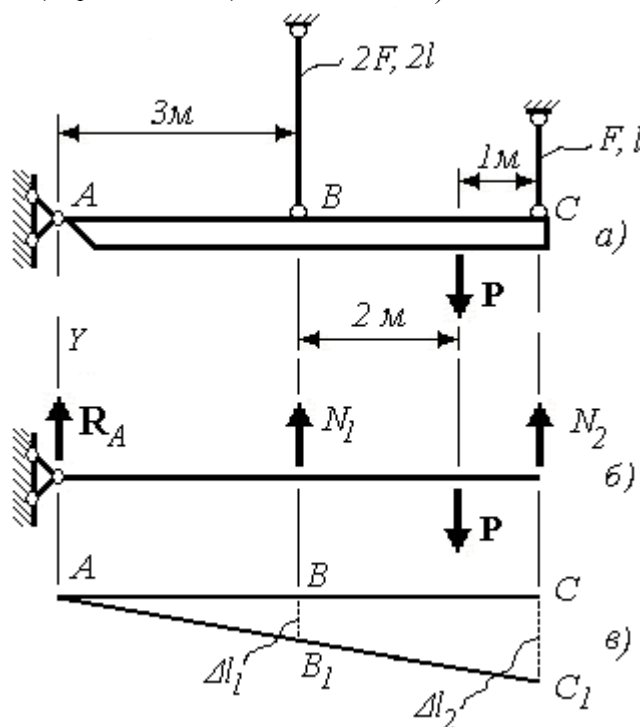


Рис. 13.7.

Можно составить два уравнения равновесия для силовой схемы (рис. 13.7 б). Т.к. стержни соединены с жестким брусом посредством шарниров, то усилия в стержнях будут направлены вдоль оси этих стержней:

$$\sum Y = 0; \quad N_1 + N_2 - P + R_A = 0; \quad (13.13)$$

$$\sum m_A = 0; \quad 3N_1 - 5P + 6N_2 = 0. \quad (13.14)$$

Первое из них включает и неизвестную реакцию, т.е. имеем **три неизвестных**. Во втором уравнении **неизвестных два** – усилия N в стержнях. Следовательно, в решении удобнее использовать второе уравнение равновесия.

Рассмотрим **геометрическую сторону** задачи (рис. 13.7 в). Под действием внешней силы P брус, оставаясь прямым (абсолютно жесткий брус – не деформирующийся), повернется вокруг шарнира A на некоторый угол. Стержни в местах крепления удлинятся, т.е. точки B и C переместятся вертикально в положения B_1 и C_1 . Отрезки BB_1 и CC_1 – абсолютные линейные деформации стержней. Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 имеем:

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad 2\Delta l_1 = \Delta l_2. \quad (13.15)$$

Получили уравнение совместности деформаций.

Подставляем в полученное уравнение усилия в соответствии с формулой закона Гука (**физическая сторона задачи**).

$$2 \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{N_2 l_2}{E F_2}; \quad 2 \frac{N_1 1}{10} = \frac{N_2 2}{20}; \quad N_1 = 0,5 N_2. \quad (13.16)$$

Решаем систему уравнений (5.30 и 5.32): $3 \times 0,5 N_2 - 5P + 6N_2 = 0$. Получаем значения усилий в стержнях в долях силы P :

$$N_2 = 0,67P; \quad N_1 = 0,5 \times 0,67P = 0,33P. \quad (13.17)$$

13.1.3 Расчет по допускаемым напряжениям.

Из условия прочности $\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$, с учетом, что максимальные нормальные напряжения возникают во втором стержне, имеем:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,67P}{F} = [\sigma].$$

Решаем уравнении относительно силы P :

$$[P] = \frac{F \times [\sigma]}{0,67} = \frac{10 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \times 160 \times 10^3 \text{ кПа}}{0,67} = 238,8 \text{ кН}.$$

13.1.4 Расчет по разрушающей нагрузке (см. 5.2.2).

Материал стержней – сталь, т.е. пластичный материал. Следовательно, после достижения напряжения **во втором** стержне (как в более нагруженном) значения **предела текучести**, этот стержень нагружаться не будет (напряжения не растут, увеличиваются деформации – см. диаграмму растяжения на площадке текучести). Нагрузку будет воспринимать **первый** стержень. Таким образом, $N_2 = \sigma_T 2F$; $N_1 = \sigma_T F$ и уравнение (5.30) примет вид: $3 \sigma_T 2F - 5P + 6 \sigma_T F = 0$.

Откуда получаем значение силы, при котором в обоих стержнях напряжения достигнут предела текучести – **предельная грузоподъемность** системы:

$$P_T = \frac{12 \times 240 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-4}}{5} = 576 \text{ кН}.$$

Разделим предельное значение силы на коэффициент запаса $n_T = 1,5$ и получим допускаемое значение силы:

$$[P_T] = 576 : 1,5 = 384 \text{ кН}.$$

Видим, что при расчете во втором случае допускаемая нагрузка выше, чем в первом на величину $384 : 238,8 = 1,61$, т.е. расчет по разрушающим нагрузкам дает возможность в большей степени использовать свойства материала и особенности стержневой системы.

13.2. Основы расчета статически неопределимых систем, работающих на изгиб

13.2.1 Анализ структуры простейших стержневых систем

Указанный анализ проведем на примере рам. В зависимости от взаимного расположения осей стержней и силовых плоскостей, рамы подразделяются на:

плоские стержневые системы (рамы, балки) – оси стержней и все внешние силы лежат в одной плоскости (рис. 13.8 а, б);

плоско-пространственная системы – оси составляющих элементов в недеформированном состоянии лежат в одной плоскости, а внешние нагрузки лежат в другой – перпендикулярной плоскости (рис. 13.8 в);

пространственная система – силы и оси стержней могут находиться в произвольно расположенных плоскостях (рис. 13.8 г).

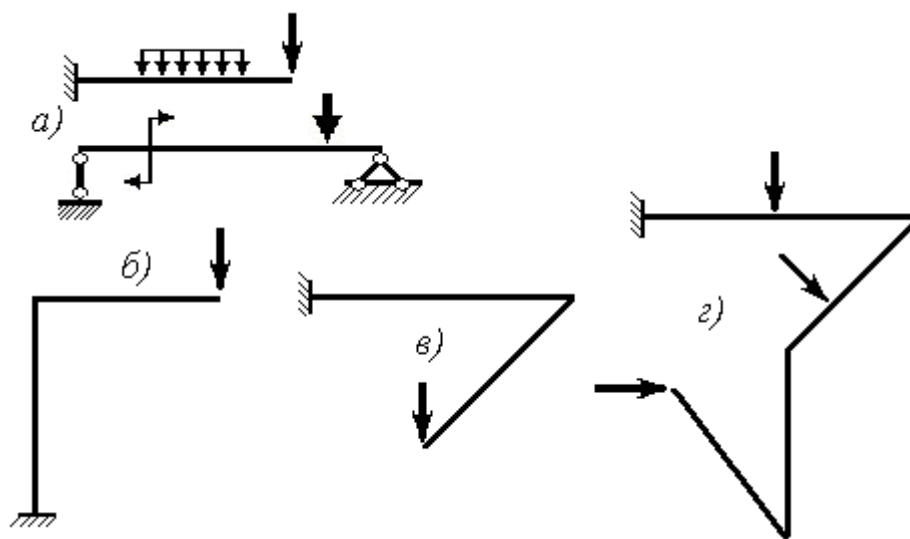


Рис. 13.8. Виды стержневых систем

Понятие о степенях свободы и связях. Известно, что в пространстве тело обладает **ШЕСТИЮ степенями свободы**, а в плоскости – **ТРЕМЯ**.

Независимая координата, определяющая положение тела в плоскости или пространстве, называется степенью свободы.

Ограничения, которые накладываются на тело, называются связями. Каждая связь снимает одну степень свободы.

Количество связей, накладываемых на тело (стержневую систему), **может быть любым**. Для обеспечения равновесия и неподвижности тела в плоскости или пространстве необходимо и достаточно снять соответствующее количество степеней свободы – иначе говоря, наложить соответствующее число связей (3 или 6). Эти связи – **необходимые**.

Всякая связь, наложенная **сверх необходимой** – дополнительная («лишняя») связь. В сопротивлении материалов и строительной механике связи разделяются на **внешние** (опорные) C_o и **внутренние** C_v .

Опорные связи – связи, накладываемые опорными устройствами, (рис. 13.9 а):

- шарнирно-подвижная опора накладывает **одну связь** (снимает **одну степень свободы**);
- шарнирно-неподвижная – соответственно **две**;
- в заделке на опорное сечение стержня накладывается **три связи**.

Внутренние связи ограничивают взаимное перемещение стержней в сечениях, где они соединяются (рис. 13.9 б):

- **жесткое** соединение двух стержней накладывает **три связи**;
- **шарнирное** соединение двух стержней – **две связи**;
- **три** стержня, соединенные **жестко**, – **шесть связей**;
- **три** стержня, соединенные **шарнирно**, – **четыре связи**.

Таким образом, **шарнир снимает одну связь**.

Анализ рис. 13.9 б позволяет сделать вывод о том, что шарнир, включенный в узел, где сходятся n стержней, снижает степень статической неопределимости на $(n-1)$.

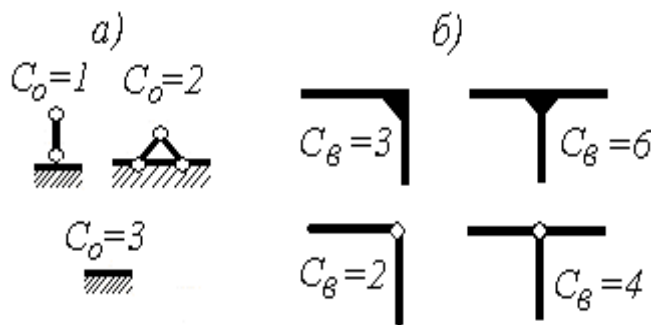


Рис. 13.9. Связи, накладываемые на стержневую систему

Определение степени статической неопределимости. Реакции, возникающие в «лишних» связях – «**лишние**» неизвестные. Уравнений равновесия оказывается недостаточно для решения задачи – определения опорных реакций. Как известно, такие задачи называют статически неопределимыми. **Степень статической неопределимости определяется числом лишних связей.**

В строительной механике используются различные формулы для определения степени статической неопределимости или числа лишних связей L . Приведем одну из них:

$$L = C_o + C_v - 3D, \quad (13.18)$$

где D – число стержней (в строительной механике – **дисков**).

Рассмотрим примеры стержневых систем – плоских рам (рис. 13.10) и определим степень их статической неопределимости расчетом по формуле (13.18).

- рис.13.10 а):

число лишних связей $L = 3 + 2 \times 3 - 3 \times 3 = 0$, т.е. система **статически определима**;

- рис. 13.10 б):

$L = (3 + 2) + 2 \times 3 - 3 \times 3 = 2$, т.е. система **2** раза статически неопределима (**внешним образом**, т.к. лишними являются **2** опорные связи);

- рис. 13.10 в):

$L = (2 + 1) + 6 \times 3 - 3 \times 6 = 3$, т.е. система **3** раза статически неопределима (**внутренним образом**, т.к. лишними являются **3** внутренние связи).

Заметим, что **жесткий замкнутый контур ТРИЖДЫ** статически неопределим (**внутренним образом**);

- рис. 13.10 г):

$L = (3 + 3) + 6 \times 3 - 3 \times 6 = 6$, т.е. система **6** раз статически неопределима (**3** раза **внешним образом** и **3** раза – **внутренним образом**).

Заметим, что в данной схеме фактически имеем **два жестких замкнутых контура**;

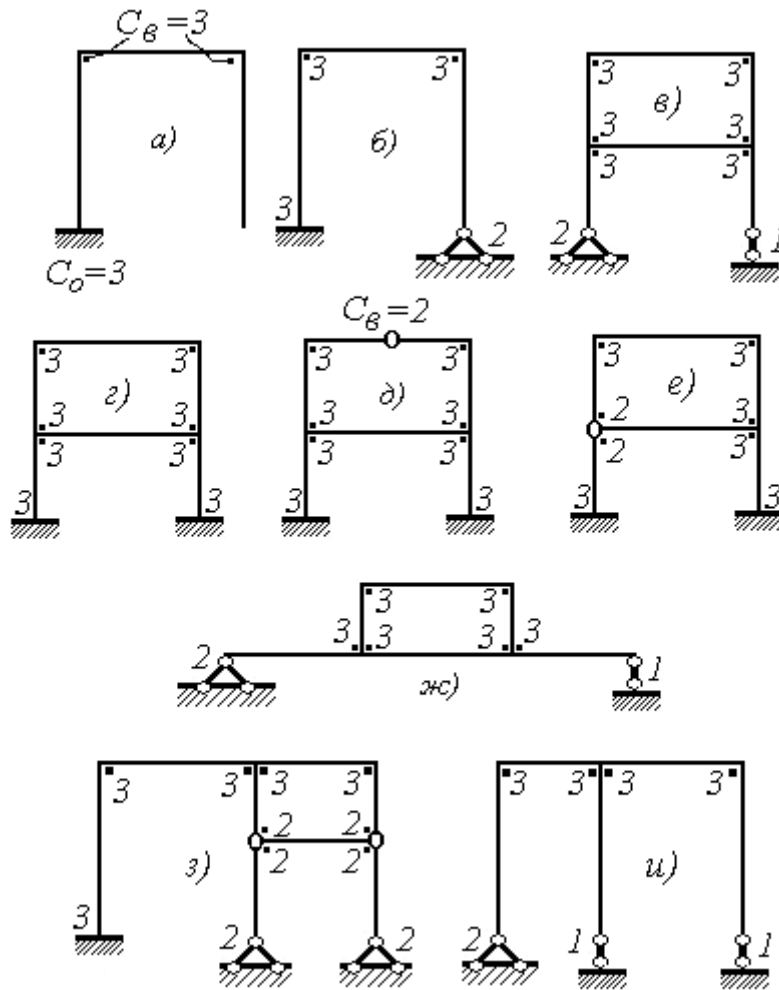


Рис. 13.10. Примеры плоских рам с разной степенью статической неопределимости

- рис. 13.10 д):

$L = (3 + 3) + (6 \times 3) + 2 - 3 \times 7 = 5$, т.е. система 5 раз статически неопределима.

В данном случае верхний горизонтальный стержень (ригель) **разделен шарниром на два стержня**. Помним, что шарнир снимает 1 связь, если соединяет два стержня;

- рис. 13.10 е):

$L = (3 + 3) + (4 \times 3) + (2 \times 2) - 3 \times 6 = 4$. Шарнир соединяет три стержня.

- рис. 13.10 ж):

$L = (2 + 1) + 6 \times 3 - 3 \times 6 = 3$. Один замкнутый жесткий контур;

- рис. 11.3 з):

$L = (3 + 2 + 2) + (4 \times 3 + 4 \times 2) - 3 \times 8 = 3$;

- рис. 13.10 и):

$L = (2 + 1 + 1) + 4 \times 3 - 3 \times 5 = 1$.

Геометрическая и кинематическая неизменяемость. Геометрический и кинематический анализ стержневых систем подробно излагается в дисциплине «Строительная механика».

Под действием нагрузок сооружение (стержневая система) деформируется, и его точки перемещаются (при этом изменяется также и форма сооружения).

Если указанные перемещения возможны только за счет деформации стержней (элементов сооружения), то стержневая система называется **геометрически неизменяемой** (рис.13.11 а). Иначе говоря, в элементах конструкции должны отсутствовать перемещения точек, **не связанные** с деформацией этих элементов под действием нагрузки. В сопротивлении материалов и строительной механике рассматриваются **только такие** конструкции (в том числе и стержневые системы).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА – система соединенных между собой стержней, допускающая относительные перемещения стержней ТОЛЬКО ПРИ ИХ ДЕФОРМАЦИИ.

Геометрически изменяемые системы (рис. 13.11 б) – это по сути **механизмы**. Перемещения точек элементов такой системы **возможны без деформирования стержней** (элементов конструкции).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА – система соединенных между собой стержней, допускающая КОНЕЧНЫЕ перемещения стержней БЕЗ ИХ ДЕФОРМАЦИИ.

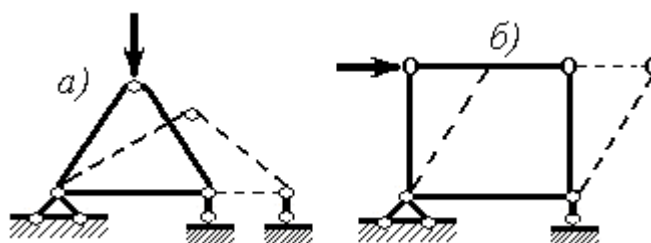


Рис. 13.11. Геометрически неизменяемая (а) и геометрически изменяемая (б) стержневые системы

КИНЕМАТИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА (ее еще называют **МГНОВЕННО ИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА**) – система соединенных между собой стержней, допускающая **БЕЗ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ**, после чего система становится неизменяемой.

Геометрическими признаками мгновенно изменяемых систем являются следующие:

- шарниры или шарнир и стержень находятся на одной прямой;
- стержни параллельны или пересекаются в одной точке.

13.2.2. Метод сил

Основная система.

Для раскрытия статической неопределимости стержневых систем в машиностроении применяют **метод сил**.

Неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил» (в строительной механике применяется также и метод перемещений).

МЕТОД СИЛ заключается в том, что заданная статически неопределимая система **ОСВОБОЖДАЕТСЯ** от лишних связей, а **их действие заменяется усилиями** по направлению этих связей.

Величина усилий подбирается таким образом, **чтобы перемещения по их направлениям соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями.**

Рассмотрим метод сил на примере статически неопределимой рамы. Решение задачи (раскрытие статической неопределимости) начинаем с отбрасывания лишних связей. Система **освобождается** от лишних связей и становится статически определимой.

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА, полученная из заданной путем отбрасывания «лишних» связей – ОСНОВНАЯ СИСТЕМА.

Таких систем можно составить сколь угодно много. Примеры основных систем, составленные для заданной статически неопределимой системы (рис. 13.12 *a*) приведены на рис. 13.12 *б-з*. Схема (рис. 13.12 *и*) – не является основной, т.к. три шарнира располагаются на одной прямой. Это кинематически изменяемая система.

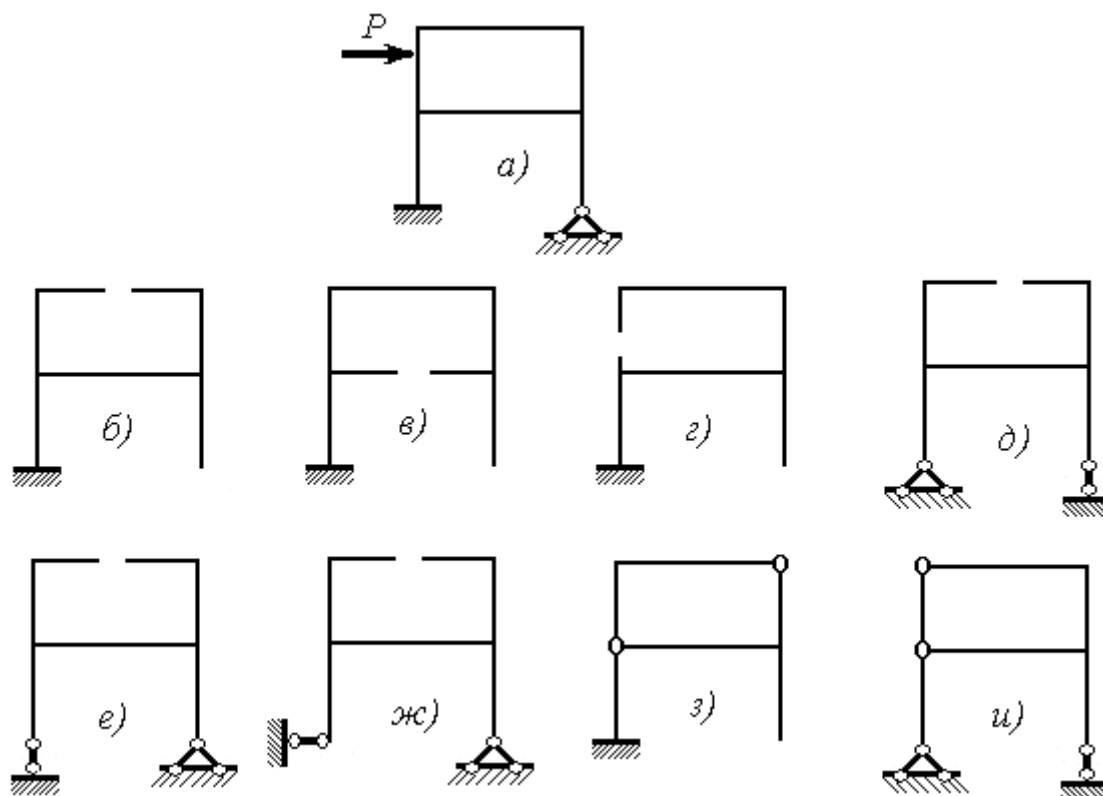


Рис. 13.12. Пример статически неопределимой системы (*a*) и возможных основных систем (*б-з*)

Эквивалентная система.

Продолжая решение задачи, в основной системе приложим внешние нагрузки и усилия (силовые факторы) по направлению отброшенных связей, которые мы назвали «**лишними**» **неизвестными**. Усилиями по направлению отброшенных связей являются силы и моменты. Силы ограничивают линейные перемещения, а моменты – соответствующие угловые перемещения.

Направление усилий выбирают произвольно:

- вверх или вниз;

- вправо или влево;
- по часовой или против часовой стрелки.

Неизвестные усилия обозначаем $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i$, где i – номер силового фактора. Число этих неизвестных будет соответствовать степени статической неопределимости, причем направления этих связей X_i являются взаимными.

Основная система, в которой приложены внешние нагрузки и усилия по направлению отброшенных связей называется эквивалентной системой.

Каждой основной системе будет соответствовать своя эквивалентная система (рис. 13.13).

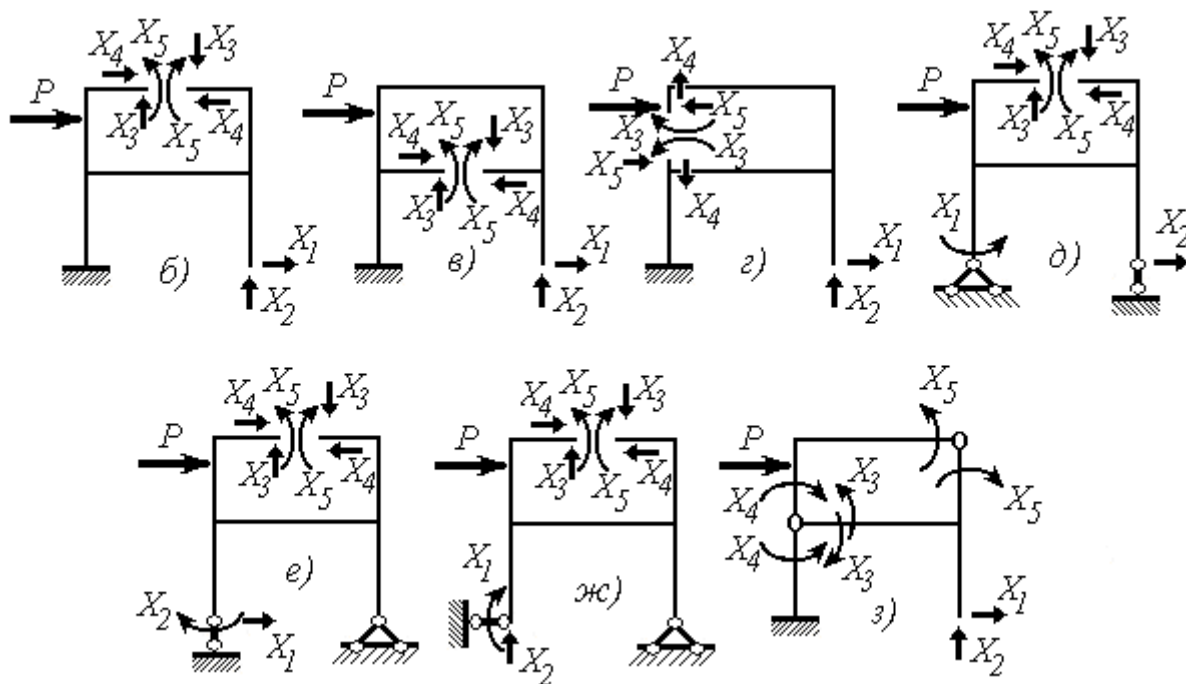


Рис. 13.13. Эквивалентные системы, соответствующие основным (см. рис.13.12 б-з)

Канонические уравнения метода сил.

Рассмотрим, например, заданную схему (рис. 13.12 а), выберем для нее основную (рис. 13.12 б) и изобразим эквивалентную системы (рис. 13.14). В **заданной схеме** линейные **перемещения** (горизонтальное и вертикальное) на опоре A и линейные и угловое перемещения в сечении B на верхнем ригеле **запрещены**. Но **они же разрешены в основной системе**. **Неизвестные усилия**, показанные в эквивалентной системе, по величине и направлению должны обеспечить равенство нулю указанных перемещений.

Взаимное смещение точек системы условимся обозначать следующим образом:

Δ_{iX_j} ; Δ_{iP} , где :

первый индекс – направление по которому определяется перемещение,

второй индекс – причина, вызвавшая это перемещение,

i – направление перемещения (по направлению неизвестных сил $X_1, X_2, \dots, X_i$),

X_j – сила, вызвавшая перемещение (**неизвестные силы** $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_i$),

P – **любая система внешних нагрузок**.

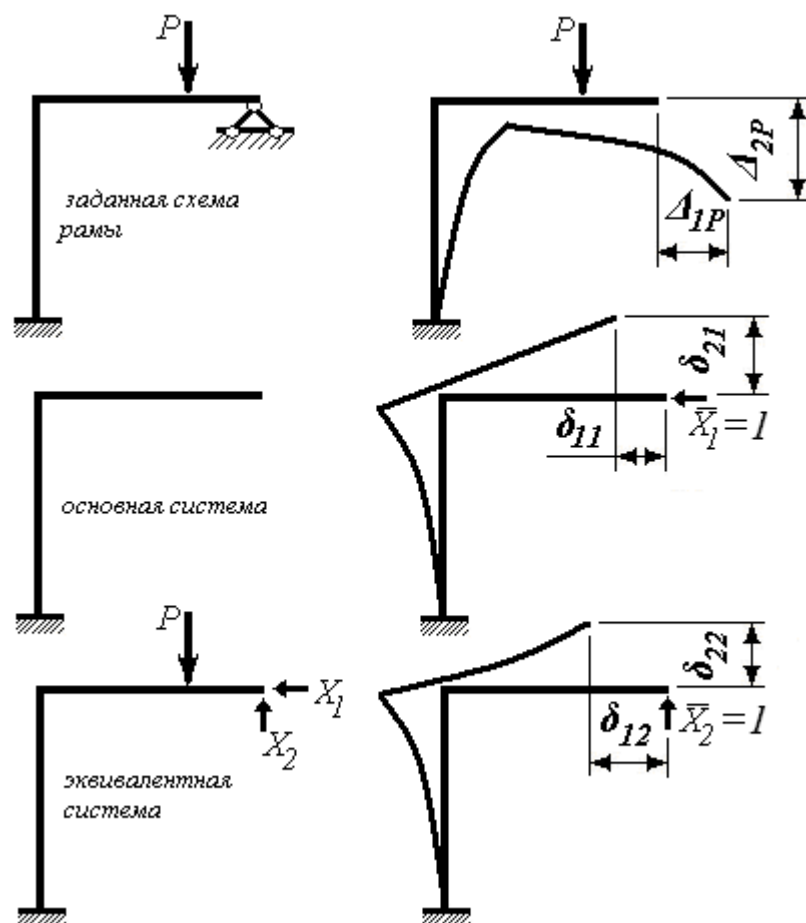


Рис. 13.15. К определению геометрического смысла коэффициентов канонических уравнений

3. Перемножаем эпюры по способу Верещагина и находим значения коэффициентов канонических уравнений:

главные коэффициенты получаем, перемножая единичные эпюры «сами на себя», т.е. в качестве грузовой рассматривается та же единичная эпюра:

$\overline{M}_1 \times \overline{M}_1; \dots; \overline{M}_i \times \overline{M}_i; \dots; \overline{M}_n \times \overline{M}_n$. Или по формуле Верещагина

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1 \overline{M}_1^C}{EI}; \dots; \delta_{ii} = \sum \frac{\omega_i \overline{M}_i^C}{EI}; \dots; \delta_{nn} = \sum \frac{\omega_n \overline{M}_n^C}{EI};$$

побочные коэффициенты определяются перемножением единичных эпюр в соответствии с записью $\overline{M}_1 \times \overline{M}_2; \dots; \overline{M}_2 \times \overline{M}_3; \dots; \overline{M}_i \times \overline{M}_n$, т.е. одна из единичных **условно** считается грузовой. По Верещагину

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{\omega_1 \overline{M}_2^C}{EI} = \sum \frac{\omega_2 \overline{M}_1^C}{EI}; \dots; \delta_{in} = \delta_{ni} = \sum \frac{\omega_i \overline{M}_n^C}{EI} = \sum \frac{\omega_n \overline{M}_i^C}{EI};$$

свободные члены определяются перемножением грузовой эпюры, **поочередно**, на единичные в соответствии с записью $\overline{M}_p \times \overline{M}_1; \dots; \overline{M}_p \times \overline{M}_i$. По Верещагину

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\omega_p \overline{M}_1^C}{EI}; \dots; \delta_{iP} = \sum \frac{\omega_p \overline{M}_i^C}{EI}; \dots; \delta_{nP} = \sum \frac{\omega_p \overline{M}_n^C}{EI}.$$

4. Подставляем значения вычисленных коэффициентов в систему канонических уравнений, решаем ее и определяем значения $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$.

Если значения некоторых **неизвестных** получаем **со знаком МИНУС**, это значит, что действительное направление их обратно по отношению к принятому в эквивалентной системе. **Желательно** при продолжении решения (при построении окончательных эпюр) **поменять направление этих неизвестных**.

5. В эквивалентной системе вместо неизвестных усилий $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ прикладываем их значения (в положительном направлении), определяем опорные реакции и **строим эпюры M, Q, N** .

6. Проводится проверка правильности расчетов (см. 11.3.2).

13.2.3. Расчет статически неопределимых рамных систем

Рациональный выбор основной системы.

Основная система (удовлетворяющая выше приведенным требованиям) может быть любой, но трудоемкость расчетов будет различной:

а) учитывая, что в процессе решения нужно строить и перемножать эпюры, лучше выбирать такой вариант основной системы, для которого легче эти эпюры строить;

б) протяженность эпюр и их очертания должны быть, по возможности, простыми;

в) для некоторых схем рам возможно использование свойств **симметрии и кососимметрии** (рис.13.16).

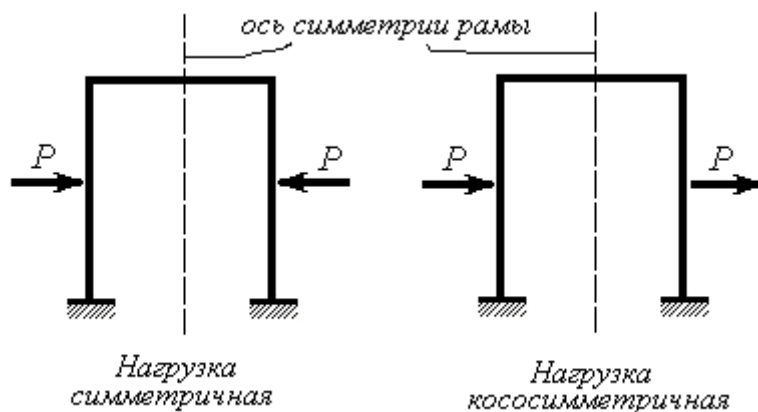


Рис. 13.16. К понятиям симметрии и кососимметрии

Положительный эффект учета свойств симметрии и кососимметрии поясним на примере (рис. 13.17). В заданной схеме рамы приложена кососимметричная нагрузка. Основная система и неизвестные усилия являются симметричными.

Прикладываем в основной системе поочередно неизвестные усилия и внешнюю нагрузку и строим эпюры изгибающих моментов. Получаем симметричные и кососимметричные эпюры.

Перемножение СИММЕТРИЧНОЙ эпюры на КОСОСИММЕТРИЧНУЮ эпюру дает 0.

Следовательно, соответствующие коэффициенты канонических уравнений будут равны нулю, и решение этих уравнений упрощается. Например:

$$\delta_{12} = \left(-\frac{1}{2} h \cdot h \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} h \cdot h \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{1}{EI} = 0.$$

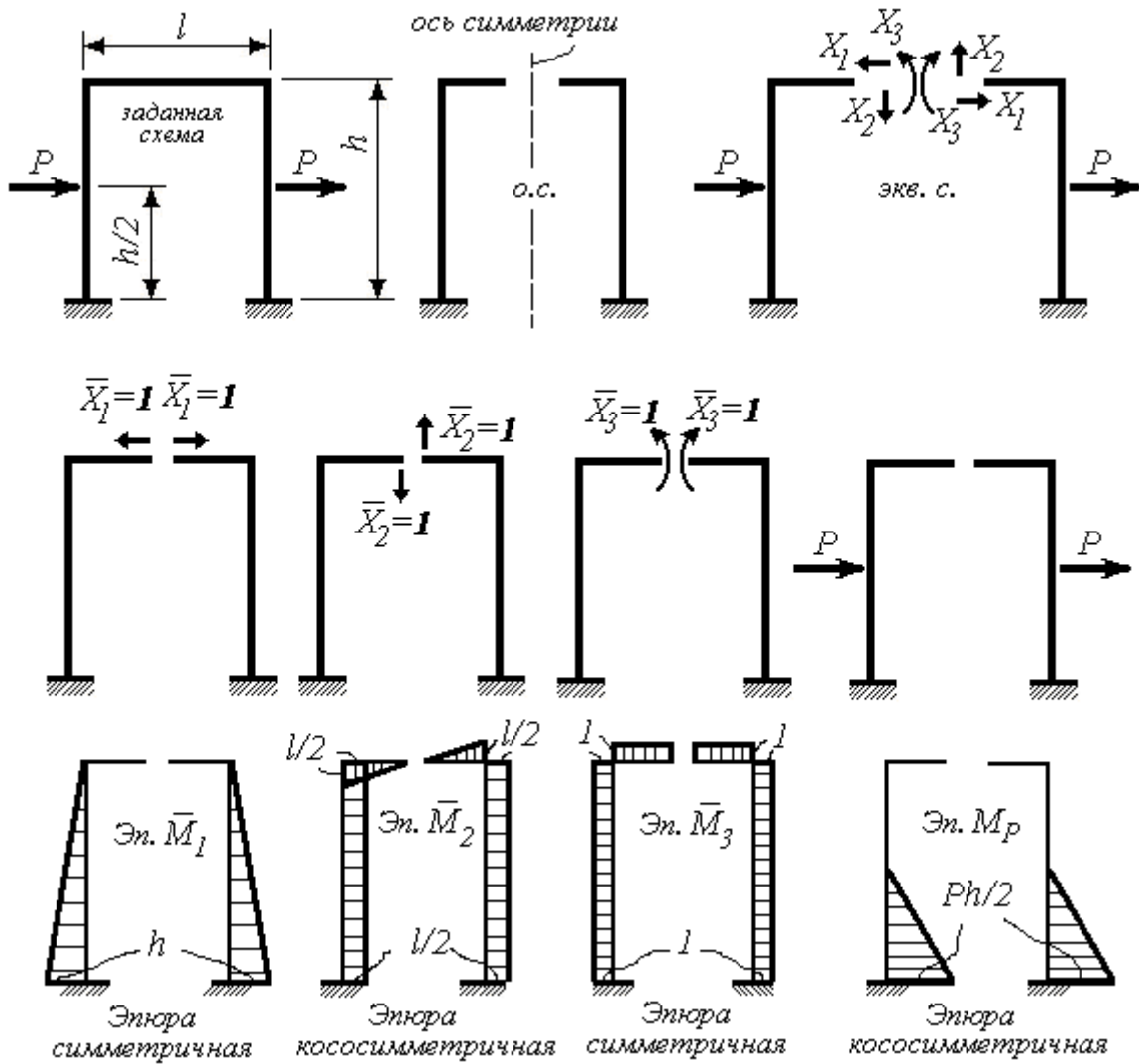


Рис. 13.17. Пример использования симметрии и кососимметрии

Таким образом, в нашем примере будут равны нулю коэффициенты:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0; \delta_{23} = \delta_{32} = 0; \Delta_{1P} = 0; \Delta_{3P} = 0.$$

и система канонических уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0; \end{cases}$$

упрощается:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно $X_1 = 0$, $X_3 = 0$. Получим одно уравнение:

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Таким образом, **вместо решения системы трех уравнений**, достаточно решить **одно уравнение**. Соответственно, вместо трижды статически неопределимой системы имеем один раз статически неопределимую систему.

В том случае, если в рассмотренном примере **внешние нагрузки будут приложены симметрично** (так, как показано на рис. 13.16), то и эпюра M_P будет **симметричной**. Тогда

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0; \delta_{23} = \delta_{32} = 0; \Delta_{2P} = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{22}X_2 = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{cases}$$

Видим, что в этом случае **только X_2 равно нулю**, т.е. необходимо решать систему двух уравнений.

Проверка правильности расчетов.

Проверка должна проводиться на всех этапах решения:

- правильность выбора основной системы;
- соответствие эквивалентной системы выбранной основной;
- правильность определения реакций во всех расчетных схемах;
- правильность построения эпюр: единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов;
- правильность определения коэффициентов канонических уравнений;
- правильность решения системы уравнений;
- правильность построения окончательных эпюр M , Q , N .

Однако, **подтверждением правильности решения задачи**, является так называемая **ДЕФОРМАЦИОННАЯ ПРОВЕРКА**.

Деформационная проверка заключается в том, что исполнитель расчета должен убедиться, что ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ЛЮБОЙ ИЗ ОТБРОШЕННЫХ СВЯЗЕЙ РАВНЫ НУЛЮ (возможна погрешность в расчете – 5%).

Для этого окончательную эпюру изгибающих моментов **перемножают поочередно на каждую из единичных эпюр**. И желательно на те единичные, которые не использовались в расчете, т.е. для другой основной системы.

Более надежной является проверка, которая проводится путем сравнения некоторых сумм **коэффициентов уравнений** (полученных в расчете) и результатов перемножения эпюр.

Дополнительно строят **суммарную единичную эпюру $\overline{M}_S$** . Ее легко построить графически, суммировав единичные эпюры $\overline{M}_i$, т.е. $\overline{M}_S = \sum \overline{M}_i$.

А) построчная проверка заключается в сравнении **сумм коэффициентов по строкам** с результатом перемножения суммарной единичной эпюры **с каждой из единичных**:

$$\begin{aligned} \sum \delta_{1S} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} = \overline{M}_S \times \overline{M}_1; \\ \sum \delta_{2S} &= \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n} = \overline{M}_S \times \overline{M}_2; \\ \sum \delta_{iS} &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \dots + \delta_{in} = \overline{M}_S \times \overline{M}_i; \\ \sum \delta_{nS} &= \delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \dots + \delta_{nn} = \overline{M}_S \times \overline{M}_n; \\ \sum \Delta_{iP} &= \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP} = \overline{M}_S \times M_P. \end{aligned}$$

Б) универсальная проверка заключается в сравнении суммы всех главных δ_{ii} и побочных δ_{ij} коэффициентов с результатом перемножения суммарной единичной эпюры самой на себя:

$$\sum \delta_{ij} = (\delta_{11} + \delta_{22} + \dots + \delta_{ii} + \dots + \delta_{nn}) + \\ + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{23} + \delta_{24} + \dots + \delta_{2n} + \dots) = \bar{M}_S \times \bar{M}_S.$$

Рассмотрим пример расчета статически неопределимой плоской рамы методом сил.

Для рамы (рис. 13.18 а) построить эпюры M , Q , N . Определить вертикальное перемещение точки C .

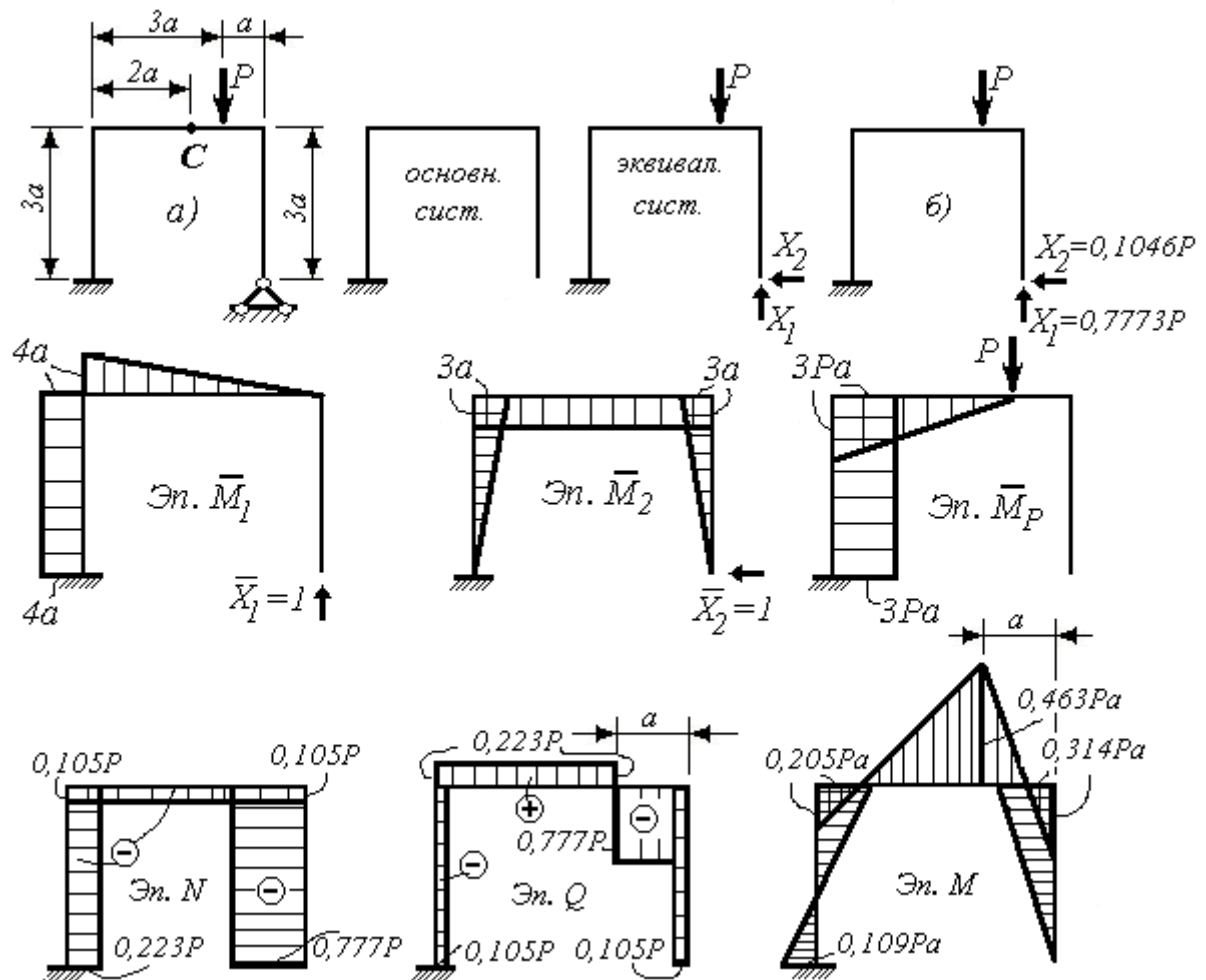


Рис. 13.18. К примеру расчета статически неопределимой плоской рамы

1. Определяем степень статической неопределимости

$$L = C_0 + C_B - 3D = 5 + 6 - 3 \times 3 = 2.$$

2. Выбираем основную систему и строим для нее эквивалентную систему
3. Записываем систему из двух канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

4. Строим единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов. Для уменьшения объема рисунка совместили единичные и грузовую схемы с соответствующими эпюрами.

5. Методом Верещагина определяем коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 4a \cdot 4a \cdot \frac{2}{3} 4a + 4a \cdot 3a \cdot 4a \right] = \frac{208}{3EI} a^3.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} 4a \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot 4a \right] = -\frac{42}{EI} a^3.$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} 3a \cdot 2 + 3a \cdot 4a \cdot 3a \right] = \frac{54}{EI} a^3.$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} 3Pa \cdot 3a \left(a + \frac{2}{3} 3a \right) - 3Pa \cdot 3a \cdot 4a \right] = -\frac{99}{2EI} Pa^3.$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 3Pa \cdot 3a \cdot 3a + \frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot 3Pa \right] = \frac{27}{EI} Pa^3.$$

Коэффициенты вида δ_{ii} и δ_{ij} имеют размерность $[м^3]$, а Δ_{iP} – $[кНм^3]$. В данной задаче все коэффициенты безразмерны, т.к. нагрузки и размеры заданы в общем виде.

При перемножении эпюр учитываем общие границы участков.

6. Подставляем найденные значения коэффициентов в систему канонических уравнений. Определяем значения X_1 ; X_2 :

$$\begin{cases} \frac{208}{3EI} a^3 X_1 - \frac{42}{EI} a^3 X_2 - \frac{99}{2EI} Pa^3 = 0; \\ -\frac{42}{EI} a^3 X_1 + \frac{54}{EI} a^3 X_2 + \frac{27}{EI} Pa^3 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = 0,7773P; \quad X_2 = 0,1046P.$$

7. Прикладываем найденные значения неизвестных усилий в эквивалентной системе (рис. 13.18 б).

В случае, если найденное значение неизвестного усилия получаем со знаком (–), его направление МЕНЯЕМ НА ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ.

8. Строим эпюры N , Q , M .

9. Контроль правильности построения эпюр и всего расчета (деформационная проверка).

9.1. Перемножаем по методу Верещагина эпюру M поочередно на единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$, и определяем вертикальное и горизонтальное перемещения шарнирно неподвижной опоры.

Перемножим эпюры $\bar{M}_1 \times M$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{Pa^2}{EI} \left[\frac{1}{2} 0,463 \times \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} 0,314 \times \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} 0,463 \times 3 \left(a + \frac{1}{3} 3a \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} 0,205 \times 3 \left(a + \frac{2}{3} 3a \right) + \frac{1}{2} 0,109 \times 3 \times 4a - \frac{1}{2} 0,205 \times 3 \times 4a \right] = \\ &= \frac{Pa^3}{EI} (2,197 - 2,206) = \frac{0,008Pa^3}{EI}. \end{aligned}$$

Погрешность расчета (в сравнении с нулем): $\frac{0,008 \times 100\%}{2,197} = 0,36\%$.

Перемножим эпюры $\bar{M}_2 \times M$:

$$\Delta_2 = \frac{Pa^3}{EI} \left[\frac{1}{2} 0,314 \times 3 \times \frac{2}{3} 3 + \frac{1}{2} 0,314 \times 3 - \frac{1}{2} 0,463 \times 3 - \frac{1}{2} 0,463 \times 3 \times 3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} 0,205 \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} 0,205 \times 3 \times \frac{2}{3} 3 - \frac{1}{2} 0,109 \times 3 \times \frac{1}{3} 3 \right] = \frac{Pa^3}{EI} (2,951 - 2,942) = \\ = \frac{0,009 Pa^3}{EI}.$$

Погрешность расчета (в сравнении с нулем): $\frac{0,009 \cdot 100\%}{2,942} = 0,31\%$.

Решение выполнено правильно.

Рассмотрим другой возможный вариант основной системы (рис. 13.19).

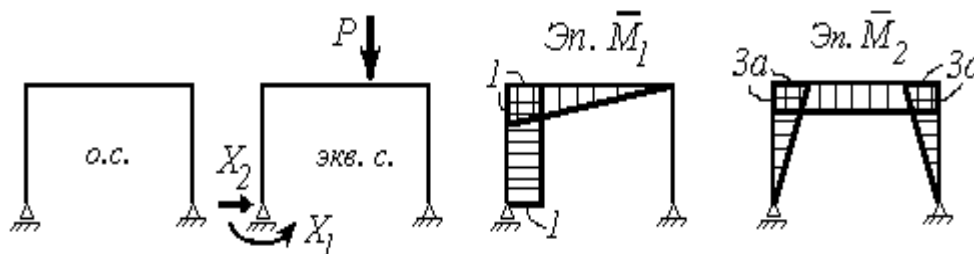


Рис. 13.19. Возможный вариант основной системы и соответствующие ей единичные эпюры

Видим, что **очертания эпюр совпадают** с такими же единичными эпюрами на рис. 13.18 (отличаются только значения ординат на эпюре $\bar{M}_1$). Следовательно, и результаты перемножения совпадут.

Правильность решения задачи подтверждается.

Проведем проверки, рекомендованные ранее. Для этого построим суммарную единичную эпюру $\bar{M}_S$ (рис. 13.20), сложив единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ (см. рис. 13.18).

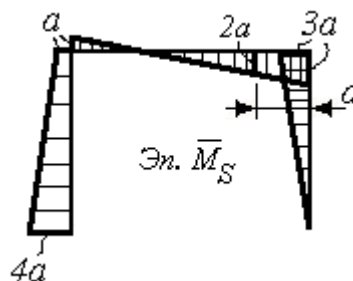


Рис. 13.20. Суммарная единичная эпюра

Построчная проверка:

$$\sum \delta_{1S} = \delta_{11} + \delta_{12} = \bar{M}_S \times \bar{M}_1: \quad \left(\frac{208}{3} - 42 \right) a^3 = \frac{82}{3} a^3;$$

$$\frac{1}{2}a \times 4a \times \frac{2}{3}4a - \frac{1}{2}4a \times 3a \times \frac{1}{3}4a + \frac{1}{2}a \times 3a \times 4a + \frac{1}{2}4a \times 3a \times 4a = \frac{82}{3}a^3.$$

$$\sum \delta_{2S} = \delta_{21} + \delta_{22} = \overline{M}_S \times \overline{M}_2 : \quad (-42 + 54)a^3 = 12a^3;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}3a \times 3a \times \frac{2}{3}3a + \frac{1}{2}3a \times 4a \times 3a - \frac{1}{2}a \times 4a \times \\ & \times 3a - \frac{1}{2}a \times 3a \times \frac{2}{3}3a - \frac{1}{2}4a \times 3a \times \frac{1}{3}3a = 12a^3. \end{aligned}$$

$$\sum \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \overline{M}_S \times M_P : \quad \left(-\frac{99}{2} + 27\right)Pa^3 = -22,5Pa^3;$$

$$\frac{1}{2}3Pa \times 3a \times \left(\frac{1}{3}2a - \frac{2}{3}a\right) - 3Pa \times 3a \times \left(\frac{a + 4a}{2}\right) = -22,5Pa^3.$$

Универсальная проверка:

$$\sum \delta_{ij} = (\delta_{11} + \delta_{22}) + 2\delta_{12} = \overline{M}_S \times \overline{M}_S : \quad \left(\frac{208}{3} + 54 + 2(-42)\right)a^3 = \frac{118}{3}a_3;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}3a \times 3a \times \frac{2}{3}3a + \frac{1}{2}4a \times a \times \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}3a\right) + \frac{1}{2}4a \times 3a \times \left(\frac{2}{3}3a - \frac{1}{3}a\right) + \\ & + \frac{1}{2}a \times 3a \times \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}4a\right) + \frac{1}{2}4a \times 3a \times \left(\frac{2}{3}4a + \frac{1}{3}a\right) = \frac{118}{3}a^3. \end{aligned}$$

Результаты проверки подтверждают правильность решения задачи.