

## 11 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БРУСА

Как известно, к сложному сопротивлению (к сложным видам нагружения) относятся виды нагружения, при которых в поперечном сечении бруса возникает **не менее двух внутренних силовых факторов**, одновременно учитываемых при расчетах на прочность и жесткость.

Алгоритм решения задачи остается прежним (тем, который применялся при рассмотрении простых видов нагружения):

- строятся эпюры внутренних силовых факторов;
- определяется вид сложного нагружения и опасное (или опасные) сечение бруса;
- записывается условие прочности (или условие жесткости);
- решается задача (проверка прочности, проектировочный расчет или определение допускаемой нагрузки).

При анализе сложного сопротивления материала бруса используется известный из главы 2 **принцип независимости действия сил** (принцип суперпозиции), т.е. сложное нагружение рассматривается как некая сумма простых видов нагружения.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в расчетной практике виды сложного сопротивления:

- косой изгиб;
- внецентренное растяжение (сжатие).
- изгиб с кручением;

### 11.1 Косой изгиб

Косым изгибом называют такой вид нагружения бруса, при котором внешние нагрузки, вызывающие его изгиб, не лежат ни в одной из главных центральных плоскостей инерции поперечного сечения бруса. Иначе говоря, **силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных центральных плоскостей инерции сечения**.

Как известно, при прямом поперечном изгибе в сечениях бруса действуют **четыре** внутренних силовых фактора (поперечная сила и изгибающий момент): от вертикальной нагрузки  $Q_y$  и  $M_x$  а от горизонтальной –  $Q_x$  и  $M_y$ .

Величина нормальных напряжений от действия изгибающего момента **намного больше** величины касательных напряжений от поперечной силы. Поэтому действием поперечных сил пренебрегаем. Получаем одноосное напряженное состояние.

Рассмотрим консольную балку, защемленную одним концом, и нагруженную на другом силой  $F$  (рис.11.1 а). Эта сила приложена в плоскости поперечного сечения (например, прямоугольного) балки и направлена **под некоторым углом  $\alpha$**  к оси  $Y$ .

Легко видеть, что косой изгиб может быть представлен комбинацией прямых изгибов от действия проекций силы на координатные оси.

*Направление главных центральных осей  $X$  и  $Y$  выбираем таким, чтобы сила  $F$  лежала **в первом квадранте** координатной системы.*

Для проверки прочности необходимо найти точки поперечного сечения с экстремальными значениями величин нормальных напряжений. Для этого необходимо:

- а) получить формулу для вычисления нормального напряжения в любой точке произвольного сечения**, отстоящего на расстоянии  $z$  от свободного конца балки;
- б) определить положение нейтральной оси**;
- в) найти точки, наиболее удаленные от нейтральной линии**, для которых следует записать **условие прочности**.

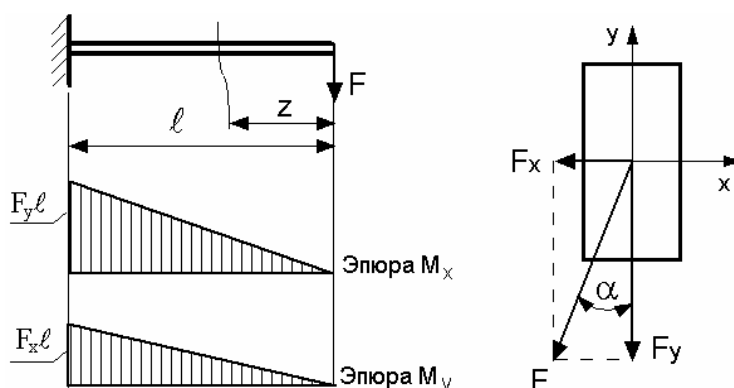


Рис. 11.1. Схема нагружения консольной балки

### Определение напряжений.

Разложим силу  $F$  на составляющие по направлениям главных центральных осей инерции сечения (рис.11.1). Величины этих составляющих:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \sin(\alpha) \\ F_y &= F \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Изгибающие моменты в сечении  $z$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} M_x &= F_y \cdot z = F \cdot \cos(\alpha) \cdot z = M \cdot \cos(\alpha) \\ M_y &= F_x \cdot z = F \cdot \sin(\alpha) \cdot z = M \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

От изгибающих моментов возникают нормальные напряжения, которые определяются по формуле Навье. Суммарное напряжение в произвольной точке с координатами  $x$  и  $y$  согласно принципу независимости действия сил будет равно:

$$\sigma = \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad (11.1)$$

Координаты точки нужно брать со своими знаками в системе главных центральных осей инерции поперечного сечения.

Знак изгибающего момента зависит от его действия на первую четверть. Изгибающий момент считается *положительным*, если он вызывает в точках первого квадранта растягивающие напряжения и *отрицательным* – если сжимающие.

Из формулы (11.1) видно, что **нормальные напряжения при косом изгибе изменяются по линейному закону**. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

### Положение нейтральной линии.

При прямом изгибе нейтральная линия, как известно, проходит **через центр тяжести поперечного сечения балки и перпендикулярна силовой плоскости**.

Преобразуем формулу (11.1):

$$\sigma = \pm \frac{M \cos(\alpha) \cdot y}{I_x} \pm \frac{M \sin(\alpha) \cdot x}{I_y} = \pm M \left( \frac{\cos(\alpha) \cdot y}{I_x} \pm \frac{\sin(\alpha) \cdot x}{I_y} \right) \quad (11.2)$$

По формуле (11.2), при  $x=0$  и  $y=0$  мы получаем  $0$ . Следовательно, **при косом изгибе, как и при прямом, нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения**.

Предположим, что нейтральная линия в поперечном сечении бруса при косом изгибе не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента – силовой плоскости (рис.11.2).

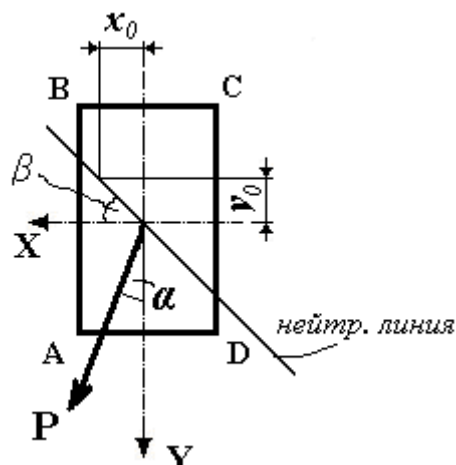


Рис. 11.2. К определению положения нейтральной линии

Известно, что **нейтральная линия есть геометрическое место точек, где нормальные напряжения равны нулю**, поэтому приравняем нулю выражение (11.2).

$$\sigma = \pm M \left( \frac{y_0 \cos \alpha}{I_X} + \frac{x_0 \sin \alpha}{I_Y} \right) = 0,$$

где  $x_0$  и  $y_0$  – координаты точек сечения, принадлежащие нейтральной линии.

Так как момент  $M$  не может быть равным  $0$ , то остается:

$$\frac{\cos \alpha}{I_X} \cdot y_0 + \frac{\sin \alpha}{I_Y} \cdot x_0 = 0. \quad (11.3)$$

Полученная формула (11.3) есть **уравнение нейтральной линии**. Проведя преобразования, получим:

$$y_0 = - \operatorname{tg} \alpha \frac{I_X}{I_Y} \cdot x_0. \quad (11.4)$$

Из рассмотрения рис. 11.2 определим тангенс угла  $\beta$  наклона нейтральной линии к оси  $x$  (отсчет угла  $\beta$  ведется по ходу часовой стрелки).

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} \quad (11.5)$$

Следовательно

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = - \frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Формула для определения положения нейтральной оси при косом изгибе

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (11.6)$$

Из формулы (11.6) видим, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  не равны, следовательно, подтверждается высказанное выше предположение:

**ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ НЕЙТРАЛЬНАЯ ЛИНИЯ НЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА**

Только лишь для сечений, имеющих равные по величине главные центральные моменты инерции ( $I_X = I_Y$ ), нейтральная линия перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента. Например, круглое или квадратное сечения – в брус с такими сечениями нельзя вызвать кривой изгиб. Чего не скажешь о равнобоком уголке, если сила приложена в центре тяжести сечения (рис. 11.3).

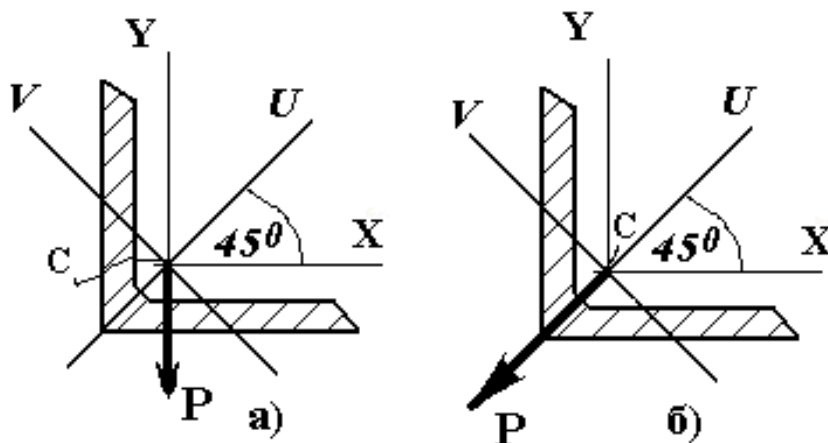


Рис. 11.3. Кривой изгиб (а) и прямой изгиб (б) бруса с поперечным сечением - равнобокий уголок

В сечении «равнобокий уголок» (рис. 11.3) главные центральные оси  $U$  и  $V$  проходят под углом  $45^\circ$  по отношению к центральным осям  $X$  и  $Y$ , которые, в свою очередь, параллельны полкам уголка. Центральные моменты инерции  $J_X$  и  $J_Y$  равны по величине, а главные центральные моменты инерции –  $J_U$  и  $J_V$  не равны по величине. Поэтому на схеме (рис. 11.3 а) получаем кривой изгиб, на схеме (рис. 11.3 б) – прямой изгиб.

#### Определение опасных точек. Условие прочности.

Для сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие углы (например, прямоугольник или двутавр), определение опасных точек сечения не вызывает затруднений.

В рассматриваемом примере (рис. 11.2) опасными точками будут точки  $A$  и  $C$ , как наиболее удаленные от нейтральной линии. Для этих точек нормальные напряжения будут равны соответственно :

$$\sigma_A = -\frac{M_X}{I_X} y_A - \frac{M_Y}{I_Y} x_A = -\frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y};$$

$$\sigma_C = -\frac{M_X}{I_X} (-y_C) - \frac{M_Y}{I_Y} (-x_C) = +\frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y}.$$

В приведенных выше формулах точки  $A$  и  $C$  наиболее удалены от нейтральной линии, т.е. имеют соответствующие координаты  $x_{max}$  и  $y_{max}$  (отсюда переход в этих формулах от моментов инерции к моментам сопротивления).

Для равнопрочного материала (пластичного), обе точки ( $A$  и  $C$ ) являются **одинаково опасными**:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{M_X}{W_X} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]. \quad (11.7)$$

Если же материал неравнопрочен (хрупкий), т.е. хуже сопротивляется растяжению, чем сжатию, то **более опасной будет точка С**, где действуют наибольшие **растягивающие** напряжения. Поэтому условие прочности надо составлять для этой точки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\sigma]_P. \quad (11.8)$$

В случаях, когда **положение опасных точек сечения не очевидно** (тавр, уголок, швеллер), необходимо провести простейший анализ:

- 1) определить положение нейтральной линии;
- 2) установить положение опасных точек;
- 3) определить нормальные напряжения  $\sigma$  по общим уравнениям и сравнить с допускаемым:

$$\sigma = \pm \frac{M_X}{I_X} y \pm \frac{M_Y}{I_Y} x \leq [\sigma]. \quad (11.9)$$

Нормальные напряжения **при косом изгибе** могут значительно отличаться от напряжений **при прямом изгибе**, вызванных изгибающим моментом такой же величины, но действующим в плоскости, которая перпендикулярна главной центральной оси инерции.

**Рассмотрим пример.**

Спроектирована консольная балка (рис.11.4. а) прямоугольного поперечного сечения (рис.11.4. б), размеры которого подобраны под нагрузку  $P$ , приложенную вертикально (**прямой изгиб** от момента  $M=Pl$ ). Расчетом установлено соотношение сторон прямоугольника  $h=5b$ .

В результате монтажа получено отклонение силовой плоскости от вертикали на угол  $\alpha = 5^\circ$  (рис. 11.4. в). Получили косой изгиб от того же момента  $M=Pl$ . Максимальные нормальные напряжения, в соответствии с формулой (11.7):

$$\sigma = \frac{M}{W_X} \left( \cos \alpha + \frac{W_X}{W_Y} \sin \alpha \right) = \frac{M}{W_X} (0,996 + 5 \cdot 0,0872) = 1,432 \frac{M}{W_X}.$$

Отношение осевых моментов сопротивления заданного сечения  $\frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{h}{b} = 5$ .

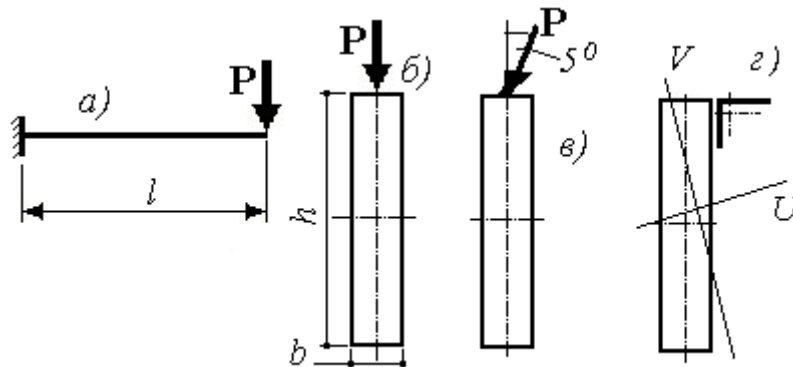


Рис. 11.4. Прямой и косой изгиб консольной балки

Таким образом, отклонение плоскости действия момента от оси  $y$  на  $5^\circ$  приводит к увеличению максимальных напряжений  $\sigma$  на **43%** по сравнению с прямым изгибом моментом той же величины.

На рис. 11.4 з показано сечение (прямоугольник с уголком) – дополнение прямоугольного сечения уголком приводит к смещению центра тяжести и повороту главных центральных осей, т.е. к косому изгибу, что нежелательно.

### Перемещения при косом изгибе.

Рассмотрим определение перемещений на примере определения максимального прогиба балки при косом изгибе (см. рис. 9.1. а и 9.1. з).

Линия, по которой будет перемещаться центр тяжести сечения  $C$ , в отличие от прямого изгиба, **не будет лежать в силовой плоскости** (рис. 9.7).

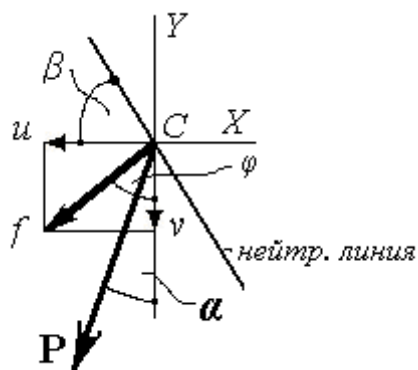


Рис. 11.5 К определению величины и направления прогиба балки

Полный прогиб балки  $f$ , в соответствии с принципом суперпозиции, определим геометрической суммой прогибов в вертикальном  $v$  и горизонтальном  $u$  направлениях:

$$f = \sqrt{u^2 + v^2} . \quad (11.10)$$

Составляющие полного прогиба определим методом начальных параметров.

Для консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на конце консоли длиной  $l$ :

вертикальное перемещение будет равно

$$v = \frac{P_Y \cdot l^3}{3E \cdot I_X} = \frac{P \cdot \cos \alpha \cdot l^3}{3E \cdot I_X} .$$

Аналогично, горизонтальное перемещение

$$u = \frac{P_X \cdot l^3}{3E \cdot I_Y} = \frac{P \cdot \sin \alpha \cdot l^3}{3E \cdot I_Y} .$$

Направление полного прогиба  $f$ , в соответствии с рис. 11.5:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{v} .$$

С учетом значений составляющих полного прогиба, после простых преобразований:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha \cdot I_X}{\cos \alpha \cdot I_Y} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{I_X}{I_Y} . \quad (11.11)$$

Это есть уравнение, по которому определяется **направление полного перемещения** центра тяжести сечения при косом изгибе. Принимая во внимание соотношение (11.6), получаем равенство  $tg\varphi = tg\beta$ .

Отсюда следует, что углы  $\varphi$  и  $\beta$  равны между собой.

**ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ ПЕРЕМЕЩАЕТСЯ  
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ.**

## 11.2 Внецентренное растяжение-сжатие брусков большой жесткости.

Внецентренным растяжением или сжатием называется вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса одновременно действуют продольная сила  $N$  (растягивающая или сжимающая) и изгибающий момент  $M$ .

В качестве примера такого вида нагружения можно привести колонну промышленного здания (рис. 11.6). Нагрузка  $P$  от половины собственного веса мостового крана и груза приложена на консоли колонны (т.  $A$ ), т.е. на расстоянии  $x_p$  от центра тяжести ее поперечного сечения  $C$ . В данном примере  $N = -P$ ,  $M = P x_p$ .

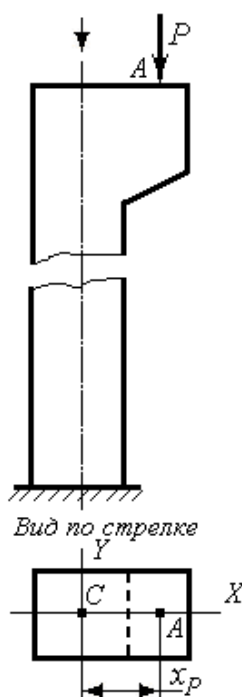


Рис. 11.6. Колонна промышленного здания

### Расчетная схема.

Рассмотрим короткий стержень произвольного поперечного сечения, нагруженного в произвольной точке  $A$  сжимающей силой  $P$  (рис.11.7 а). Расстояние  $OA = e$  и называется **эксцентриситетом**. В соответствии с правилами теоретической механики, силу  $P$  перенесем параллельно самой себе в центр тяжести  $C$ . Видим, что в любом сечении по высоте стержня сила  $P$ , зачеркнутая один раз, вызовет осевое сжатие ( $N = -P$ ), а силы  $P$ , зачеркнутые дважды – изгибающий момент  $M_o = P e$  (рис.11.7 б).

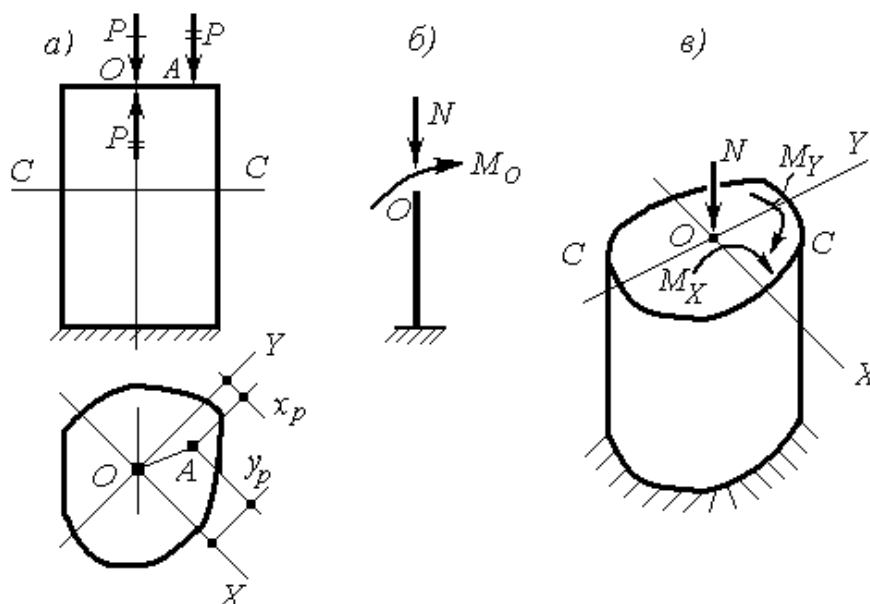


Рис. 11.7. Расчетная схема стержня при внецентренном растяжении-сжатии

#### Определение напряжений.

Рассечем стержень произвольным сечением  $C-C$ , (рис. 11.7 а) отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части. Оси  $X$  и  $Y$  – **главные центральные оси сечения**. Обозначим координаты пересечения плоскости  $C-C$  с линией действия силы  $P$  –  $x_p$  и  $y_p$ . Назовем их **координатами точки приложения силы**.

В связи с тем, что плоскость действия изгибающего момента  $M_0$  в общем случае может не совпадать ни с одной из главных центральных плоскостей инерции поперечного сечения стержня, то в произвольном сечении  $C-C$  имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косоугольного изгиба от моментов  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 11.7 в). Изгибающие моменты также как и продольная сила будут отрицательными. В данном случае они вызывают сжатие в точках сечения, лежащих в первом квадранте.

Имеем следующие значения силовых факторов:

$$N = -P; M_x = -P \cdot y_p; M_y = -P \cdot x_p. \quad (11.12)$$

Величины и знаки всех силовых факторов, действующих в сечении бруса, не зависят от положения этого сечения по его высоте (длине).

**ЛЮБОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ БРУСА ПРИ ЕГО ВНЕЦЕНТРОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ – ОПАСНОЕ.**

В соответствии с принципом независимости действия сил, **нормальное напряжение в любой точке** поперечного сечения с координатами  $(x, y)$ , определяется **суммой нормальных напряжений**: в данном случае нагружения от продольной силы  $\sigma_N$  и от прямого изгиба в двух плоскостях  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{M_y}$ :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}. \quad (11.13)$$

В соответствии с (11.12) и известными формулами для определения нормальных напряжений от действия рассматриваемых силовых факторов, после подстановки их в (11.13), получим



$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_X}{J_X} \cdot y + \frac{M_Y}{J_Y} \cdot x = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p \cdot y}{J_X} - \frac{P \cdot x_p \cdot x}{J_Y}.$$

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p \cdot x}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_X^2} \right), \quad (11.14)$$

где  $i_X$  и  $i_Y$  – радиусы инерции сечения.

#### Радиусы инерции сечения

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{F}}; \quad i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{F}}. \quad (11.15)$$

Легко видеть, что **при изменении направления внешней силы, знак перед формулой (11.14) изменится** на ПЛЮС.

При внецентренном растяжении **перед всем выражением** должен стоять знак ПЛЮС, при внецентренном сжатии – знак МИНУС.

#### Формула для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении-сжатии

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p \cdot x}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_X^2} \right). \quad (11.16)$$

#### Положение нейтральной оси.

Переменными в формуле (11.16) являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. При изгибе наибольшие нормальные напряжения действуют в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Следовательно, для определения опасных точек сечения необходимо **определить положение нейтральной оси**.

Известно, что **нормальные напряжения на нейтральной оси равны нулю**. Приравняв (11.16) нулю, получим:

$$\pm \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p \cdot x}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_X^2} \right) = 0. \text{ Понятно, что } \frac{P}{F} \neq 0, \text{ поэтому, обозначив координаты точек, принадлежащих нейтральной оси, } x_0 \text{ и } y_0, \text{ можно записать}$$

#### уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении-сжатии

$$1 + \frac{x_p \cdot x_0}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y_0}{i_X^2} = 0. \quad (11.17)$$

Если  $x_0 = 0$ , то тогда, обозначив  $y_0 = a_Y$ , получим

$$a_Y = -\frac{i_X^2}{y_p}. \text{ Проведя аналогию, имеем } a_X = -\frac{i_Y^2}{x_p}.$$

#### формулы для определения отрезков, отсекаемых нейтральной осью на главных центральных осях сечения

$$a_X = -\frac{i_Y^2}{x_p}; \quad a_Y = -\frac{i_X^2}{y_p}. \quad (11.18)$$

- Нейтральная ось делит сечение на две части – сжатую и растянутую.
- Положение нейтральной оси не зависит от величины и знака силы  $P$ .
- Нейтральная ось и точка приложения силы всегда лежат по разные стороны от центра тяжести сечения (знак МИНУС).
- Чем дальше от начала координат расположена точка приложения силы  $P$  (чем больше  $x_p$  и  $y_p$ ), тем ближе к центру тяжести сечения проходит нейтральная ось (тем меньше отрезки  $a_x$  и  $a_y$ ) и наоборот.
- Если точка приложения силы расположена на одной из главных центральных осей инерции сечения, то нейтральная ось перпендикулярна к этой оси.

*Например: когда точка приложения силы расположена на оси  $X$ , то  $y_p = 0$  и  $a_y = \infty$ , то нейтральная ось перпендикулярна оси  $X$  и параллельна оси  $Y$ .*

#### Эпюра нормальных напряжений.

Рассмотрим сечение  $C-C$  стержня, изображенного на рисунке 11.7, отложим значения отрезков  $a_x$  и  $a_y$ , полученные по формулам (11.18), и покажем положение нейтральной оси (рис. 11.8).

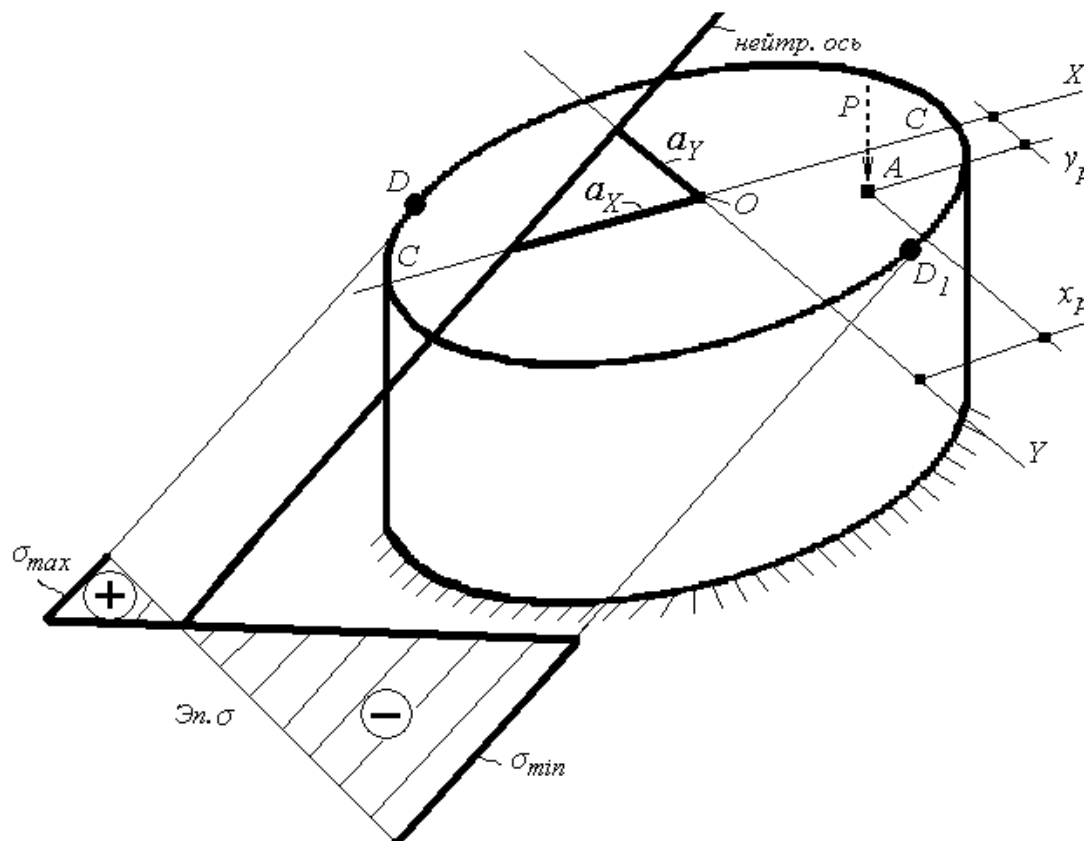


Рис. 11.8. Положение нейтральной оси и эпюра распределения нормальных напряжений

Если к контуру сечения провести касательные, параллельные нейтральной оси, то можно определить две точки  $D$  и  $D_1$ , которые наиболее удалены от нейтральной оси (рис. 11.8). В этих точках будут действовать наибольшие сжимающие (**минимальные**) и наибольшие растягивающие (**максимальные**) нормальные напряжения. На указанном выше рисунке изображена эпюра распределения нормальных напряжений.

### Условие прочности.

Условие прочности составляется для **опасных точек** опасного сечения бруса. При составлении условия прочности необходимо учитывать геометрические особенности сечения и особенности поведения материалов в зависимости от знака напряжений. Например, ХРУПКИЕ материалы плохо воспринимают действие растягивающих напряжений и достаточно хорошо – сжимающих (**бетон и чугун**). ПЛАСТИЧНЫЕ материалы **безразличны к знаку** напряжения.

Если сечение бруса вписывается в прямоугольник (*прямоугольник, двутавр, швеллер*), то определение опасных точек не вызывает затруднений. Экстремальные по величине нормальные напряжения возникают в волокне (в точке), где **суммируются напряжения от всех внутренних силовых факторов** (угловая точка сечения).

**Условие прочности** для ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА записывается для **максимальных по абсолютной величине** напряжений.

$$|\sigma_{\max}| = \pm \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p \cdot x}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_X^2} \right) \leq [\sigma], \quad (11.19)$$

где  $x$  и  $y$  координаты точек сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси.

**Условие прочности** для ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА составляется в двух вариантах – для волокон, где возникают **максимальные** по величине напряжения и для волокон, где возникают **минимальные** напряжения. Каждое из значений сравнивается с соответствующим значением допускаемого напряжения.

$$\sigma_{\max}^{\text{раст}} = \pm \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p \cdot x}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_X^2} \right) \leq [\sigma]_{\text{раст}}, \quad (11.20)$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \pm \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p \cdot x}{i_Y^2} + \frac{y_p \cdot y}{i_X^2} \right) \leq [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (11.21)$$

В формулы (11.20 и 11.21) подставляются значения координат  $x$  и  $y$  точек сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, в которых возникают соответственно максимальные растягивающие и сжимающие напряжения.

### Ядро сечения.

**Нейтральная ось делит сечение бруса на ДВЕ ОБЛАСТИ – растянутую и сжатую** (рис. 11.8). Следовательно, для нейтральной оси **возможно** и положение, при котором она не пересекает сечение, а лишь касается его контура. В этом случае во всех точках сечения напряжения будут иметь **один знак**. Это важно, например, при конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон, камень, чугун). Для брусев из таких материалов необходимо обеспечить положение нейтральной оси, при котором бы все сечение работало на сжатие. Этого можно добиться, **ограничивая величину эксцентриситета** приложения силы.

Задача, таким образом, сводится к определению величины «возможного» смещения точки приложения силы по отношению к центру тяжести заданного сечения. То есть вблизи от центра тяжести может быть выделена некоторая область, которую называют **«ядро сечения»**.

Пока точка приложения силы  $A$  будет располагаться внутри ядра, нейтральная ось не будет пересекать контур поперечного сечения. При удалении точки  $A$  от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру. Граница ядра сечения определяется тем, что при расположении точки  $A$  на этой границе нейтральная ось будет являться касательной к сечению. Таким образом, если точка  $A$  будет перемещаться так, что-

бы нейтральная ось «катилась» по контуру сечения, не пересекая его, то она (точка  $A$ ) будет перемещаться по границе ядра сечения.

**ЯДРО СЕЧЕНИЯ – область вокруг центра тяжести поперечного сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы  $P$ , НЕ ВЫЗЫВАЯ в этом поперечном сечении действия НАПРЯЖЕНИЙ РАЗНОГО ЗНАКА.**

Чтобы получить очертания ядра сечения, необходимо дать **нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру**, и, определив для этих положений отрезки  $a_X^{кас.}$  и  $a_Y^{кас.}$ , вычислить координаты  $x_Я$  и  $y_Я$  точки приложения силы по формулам; полученным из выражения (11.18).

**Координаты точек контура ядра**

$$x_Я = -\frac{i_Y^2}{a_X^{кас.}}; \quad y_Я = -\frac{i_X^2}{a_Y^{кас.}}. \quad (11.22)$$

При многоугольном контуре сечения с числом сторон  $n$  расчетом по формулам (11.22) получают координаты  $n$  точек границы ядра сечения.

**Для построения контура ядра сечения найденные точки следует соединить между собой прямыми линиями.**

Рассмотрим **примеры построения ядра сечения** для некоторых простых сечений (рис. 11.9).

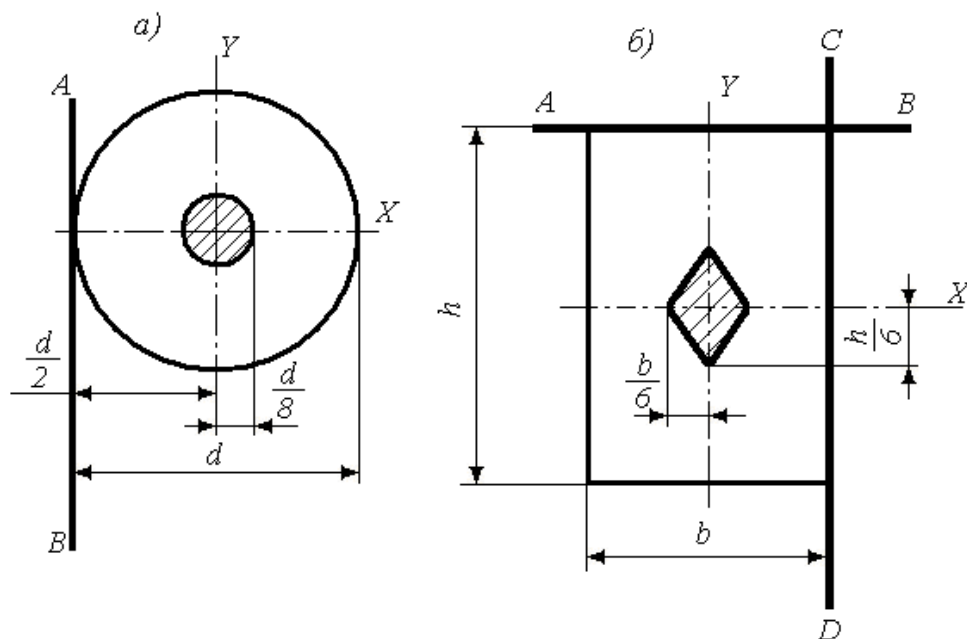


Рис. 11.9 Форма и размеры ядра сечения для круглого и прямоугольного сечений бруса

**Круг** диаметром  $d$  (рис. 11.9  $a$ ). Круг обладает двумя осями симметрии. Очевидно, что для построения ядра достаточно определить положение (величину отрезка и знак) **одной точки**, лежащей на контуре ядра сечения и, следовательно, достаточно провести **одну касательную** к контуру сечения.

**Касательная  $AB$**  отсекает на оси  $X$  отрезок  $a_X^{кас.} = -\frac{d}{2}$ , и на оси  $Y$  отрезок  $a_Y^{кас.} = \infty$ .

По формулам (11.22) получаем:

$$x_{Я} = \frac{i_Y^2}{a_X^{кас.}} = -\frac{\frac{J_Y}{F}}{-\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4 \cdot 4 \cdot 2}{64 \cdot \pi d^2 \cdot d} = \frac{d}{8}; \quad y_{Я} = 0.$$

**Ядро сечения круглого поперечного сечения – круг радиусом  $\frac{d}{8}$ .**

**Прямоугольник** со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 11.9 б). Прямоугольник обладает двумя осями симметрии. Также очевидно, что в данном случае достаточно провести **две касательные** к контуру сечения и определить величину и знак двух отрезков на осях координат.

Для **касательной  $AB$** :

$$a_X^{кас.} = \infty; \quad x_{Я} = 0. \quad a_Y^{кас.} = \frac{h}{2}; \quad y_{Я} = -\frac{i_X^2}{a_Y^{кас.}} = -\frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot bh \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Для **касательной  $CD$** :

$$a_Y^{кас.} = \infty; \quad y_{Я} = 0. \quad a_X^{кас.} = \frac{b}{2}; \quad x_{Я} = -\frac{i_Y^2}{a_X^{кас.}} = -\frac{hb^3 \cdot 2}{12 \cdot hb \cdot b} = -\frac{b}{6}.$$

**Примеры решения задач.**

**Пример 1.** Для короткого бруса прямоугольного сечения со сторонами  $h=2b$ ;  $b$ , сжимаемого силой  $P$ , (рис. 11.10) определить экстремальные значения напряжений, если:

- сжимающая сила приложена в **центре тяжести** сечения  $C(0; 0)$ ;
- сжимающая сила **приложена в точке  $A(0; h/4 = b/2)$ .**

Для **первого условия** имеем центральное сжатие. Нормальные напряжения:

$$\sigma = -\frac{N}{F} = -\frac{P}{bh} = -\frac{P}{2b^2}.$$

Для **второго условия** имеем внецентренное сжатие, т.к. точка  $A$  располагается за пределами ядра сечения ( $h/4 > h/6$ ).

Определим значения геометрических параметров:

$$x_p = 0; \quad y_p = h/4 = b/2; \quad i_X^2 = \frac{J_X}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{b(2b)^3}{12b2b} = \frac{b^2}{3}.$$

Значения отрезков, отсекаемых нейтральной осью на осях координат:

$$a_X = \infty; \quad a_Y = -\frac{i_X^2}{y_p} = \frac{b^2 \cdot 2}{3b} = -\frac{2}{3}b.$$

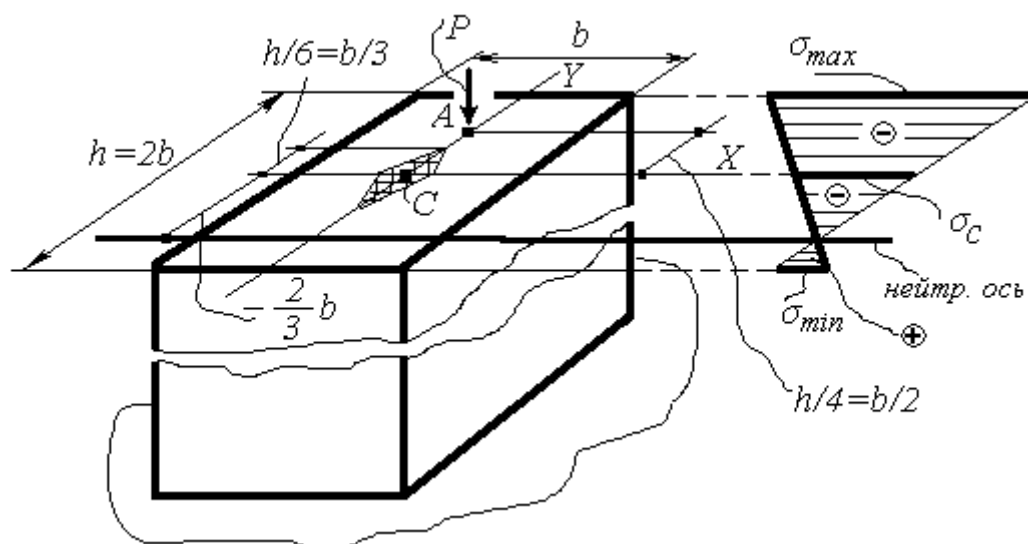


Рис. 11.10. Схема бруса к примеру 1

Определим нормальные напряжения по формуле (11.19).

**Максимальные сжимающие напряжения** будут действовать в **верхнем** от нейтральной оси слое ( $y = h/2 = b$ ):

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{2b^2} \left( 1 + 0 + \frac{\frac{b}{2}(b)}{\frac{b^2}{3}} \right) = -\frac{P}{2b^2} (1 + 1,5) = -2,5 \frac{P}{2b^2}.$$

Максимальные растягивающие напряжения будут действовать в **нижнем** от нейтральной оси слое ( $y = -h/2 = -b$ ):

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{2b^2} \left( 1 + 0 + \frac{\frac{b}{2}(-b)}{\frac{b^2}{3}} \right) = -\frac{P}{2b^2} (1 - 1,5) = 0,5 \frac{P}{2b^2}.$$

Видим, что *ошибка при монтаже (точка приложения силы за пределами центра тяжести и ядра сечения) приводит к увеличению сжимающих напряжений в 2,5 раза.*

**Пример 2.** Проверить прочность короткой чугунной стойки (рис. 11.11), сжимаемой силой **200 кН**, если допускаемые напряжения  $[\sigma]_p = 40 \text{ МПа}$  и  $[\sigma]_{сж.} = 100 \text{ МПа}$ . Построить ядро сечения.

1) Определим положение центра сечения в системе координат  $X, Y$

$$x_c = \frac{2F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{2F_1 + F_2} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 6 + 32 \cdot 1}{2 \cdot 24 + 32} = 4 \text{ см.}$$

Проводим оси  $X_c$  и  $Y_c$ . Положительное направление этих осей выбираем таким, чтобы точка приложения силы (т.А) находилась в первой четверти.

2) Главные центральные моменты инерции сечения

$$J_{X_c} = 2 \left( \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 24 \cdot 9^2 \right) + \frac{2 \cdot 16^3}{12} = 4580 \text{ см}^4.$$

$$J_{Y_C} = 2 \left( \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 24 \cdot 2^2 \right) + \frac{16 \cdot 2^3}{12} + 32 \cdot 3^2 = 1070 \text{ см}^4.$$

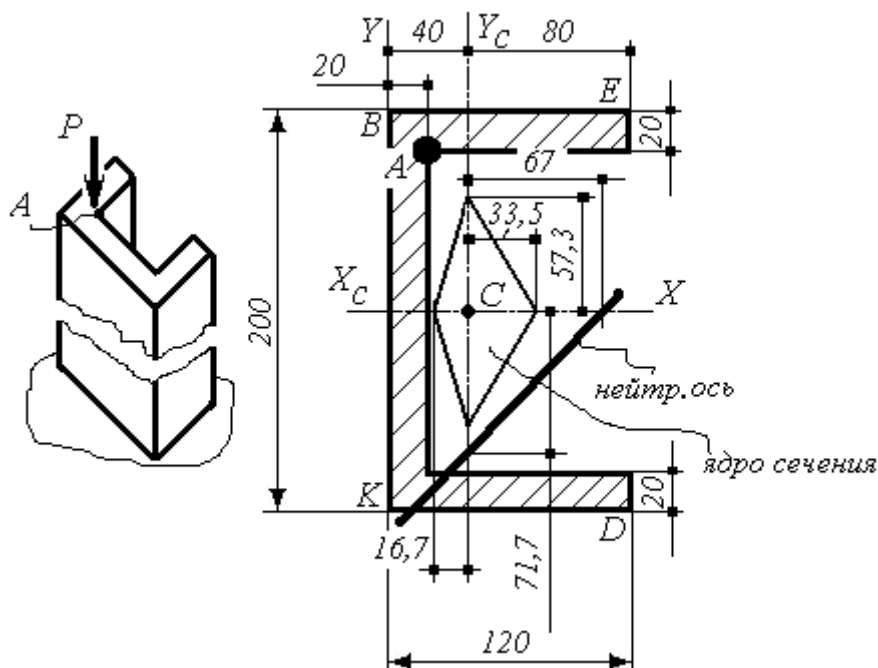


Рис. 11.11. Схема бруса к примеру 2

- 3) Квадраты радиусов инерции сечения

$$i_X^2 = \frac{I_{X_C}}{F} = \frac{4580}{2 \cdot 24 + 32} = 57,3 \text{ см}^2,$$

$$i_Y^2 = \frac{I_{Y_C}}{F} = \frac{1070}{2 \cdot 24 + 32} = 13,4 \text{ см}^2.$$

- 4) Точка приложения силы в системе  $X_C C Y_C$  имеет координаты  $x_p = 2 \text{ см}$ ;  $y_p = 8 \text{ см}$ .

- 5) Определим положение нейтральной оси, т.к. опасными являются точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси (точки  $B$  и  $D$ ):

$$a_X = -\frac{i_Y^2}{x_p} = -\frac{13,4}{2} = -6,7 \text{ см},$$

$$a_Y = -\frac{i_X^2}{y_p} = -\frac{57,3}{8} = -7,17 \text{ см}.$$

- 6) Нормальные напряжения определяем в соответствующих точках  $B$  и  $D$ , подставляя координаты этих точек в формулу (11.19). Перед формулой ставим знак **минус**:

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_p x}{i_Y^2} + \frac{y_p y}{i_X^2} \right),$$

где  $x_B = 4 \text{ см}$ ,  $y_B = 10 \text{ см}$ ;  $x_D = -8 \text{ см}$ ,  $y_D = -10 \text{ см}$ .

$$\sigma_B = \sigma_{сж} = \sigma_{max} = -\frac{200}{80} \left( 1 + \frac{2 \cdot 4}{13,4} + \frac{8 \cdot 10}{57,3} \right) = -7,483 \frac{\kappa H}{\text{см}^2} = -74,8 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{сж} = 74,8 \text{ МПа} < [\sigma]_{сж.} = 100 \text{ МПа}$$

$$\sigma_D = \sigma_{раст.} = \sigma_{max} = -\frac{200}{80} \left( 1 + \frac{2 \cdot (-8)}{13,4} + \frac{8 \cdot (-10)}{57,3} \right) = 3,975 \frac{\kappa H}{\text{см}^2} = 40 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{раст.} = 40 \text{ МПа} = [\sigma]_p$$

7) Если сила  $P$  будет приложена в центре тяжести сечения, то:

$$\sigma = -\frac{P}{F} = -\frac{200 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^{-4}} = -25 \text{ МПа}$$

8) Контуры ядра сечения (рис. 11.11) определим, проведя три касательные ( $BK$ ,  $ED$ ,  $BE$ ). Значения отрезков, отсекаемых касательными на осях координат, подставим с учетом их знаков в системе главных центральных осей:

$$x_{Я} = -\frac{i_Y^2}{a_X^{BK}} = -\frac{13,4}{4} = -3,35 \text{ см}.$$

$$x_{Я} = -\frac{i_Y^2}{a_X^{ED}} = -\frac{13,4}{-8} = 1,67 \text{ см}.$$

$$y_{Я} = -\frac{i_X^2}{a_Y^{BE}} = -\frac{57,3}{10} = -5,73 \text{ см}.$$

### 11.3. Расчет брусьев круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

В общем случае нагружения вала в поперечном сечении его возникают крутящий  $M_{кр}$  и изгибающие моменты  $M_X$  и  $M_Y$ , нормальная (продольная)  $N$  и поперечные  $Q_X$  и  $Q_Y$  силы. При рассмотрении конкретных схем нагружения некоторые из перечисленных внутренних силовых факторов могут не учитываться. Например, в сопротивлении материалов обычно **пренебрегают** влиянием **продольных**, а также **поперечных сил** (величина касательных напряжений от действия поперечных сил намного меньше, чем от действия крутящего момента).

С сочетанием изгиба и кручения брусьев круглого поперечного сечения наиболее часто приходится встречаться при расчете валов круглого поперечного сечения (в брусое круглого сечения **не возникает косой изгиб**).

#### Внутренние силовые факторы.

Рассмотрим пространственную стержневую систему (рис. 11.12). Требуется **записать условие прочности** для опасных точек опасного сечения стержня круглого поперечного сечения  $AB$  диаметром  $d$ . Для этого необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов, определить опасное сечение и найти его опасные точки.



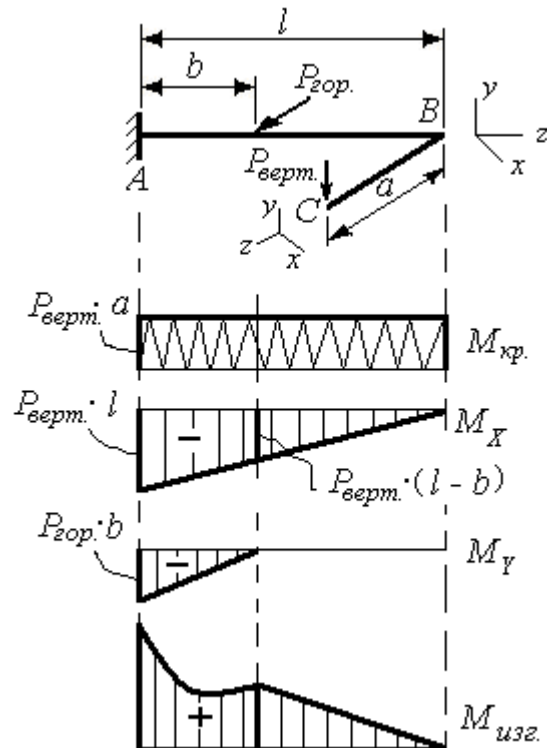


Рис. 11.12. Пространственная стержневая система и эпюры внутренних силовых факторов для стержня  $AB$

С учетом вышеприведенных комментариев (пренебрегаем действием поперечных сил), на рис. 11.12 для участка  $AB$  построены эпюры крутящего  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_X$  и  $M_Y$ . В связи с тем, что для круглого бруса косой изгиб невозможен ( $W_X = W_Y$ ), эпюры изгибающих моментов можем сложить геометрически (плоскости их действия можем совместить) – получим **суммарную эпюру изгибающих моментов  $M_{изг}$** .

На рис. 11.13 показано произвольное сечение круглого бруса  $AB$  на участке длиной  $b$ , нагруженное моментами.

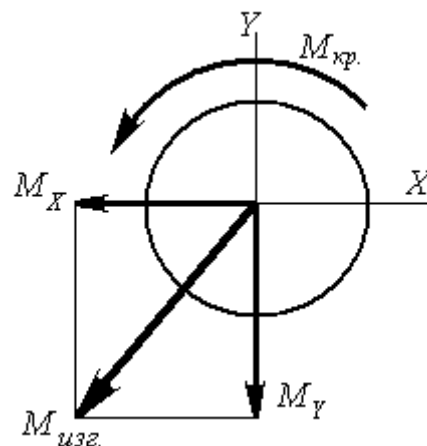


Рис. 11.13. К определению суммарного изгибающего момента

Из этого рисунка следует, что значение суммарного изгибающего момента определится по формуле  $M_{изг} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$ . Соответствующая эпюра приведена на рис.

11.12. Обратим внимание, что на разных участках бруса эпюра  $M_{изг.}$  очерчивается прямой или кривой. Обратимся к математике.

Если обе эпюры очерчиваются прямыми линиями и описываются уравнением вида  $y=kz$ , то эпюра суммарного изгибающего момента также очерчивается наклонной прямой:

$$\sqrt{(k_1 z)^2 + (k_2 z)^2} = kz$$

На других же участках, где прямые линии описываются выражениями вида  $y=a+kz$ , получим уравнение кривой второго порядка – параболы с минимумом:

$$\sqrt{(a_1 + k_1 z)^2 + (a_2 + k_2 z)^2}$$

#### Условие прочности.

Условие прочности записывается для опасных (опасной) точек опасного сечения. **Опасным** считается сечение, в котором суммарный изгибающий момент и крутящий момент одновременно достигают величин, близких к своим максимумам.

В рассматриваемом примере опасным сечением является опора  $A$  (см. рис. 11.12).

Для нахождения опасных точек сечения построим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  от действия суммарного изгибающего момента и эпюру касательных напряжений  $\tau$  от действия крутящего момента (рис. 11.14 а). Опасными будут точки  $D$  и  $K$ , наиболее удаленные от нейтральной линии, которая, в свою очередь будет перпендикулярна линии действия  $M_{изг.}$  (линия, совпадающая с  $KD$ ).

Напряженное состояние элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки  $D$ , будет следующим (см. рис. 11.14 б). Имеет место частный случай плоского напряженного состояния (отсутствуют нормальные напряжения по направлению оси  $Y$ ).

Условие прочности по III и IV теориям прочности для опасного сечения при плоском напряженном состоянии, как известно, записывается в виде:

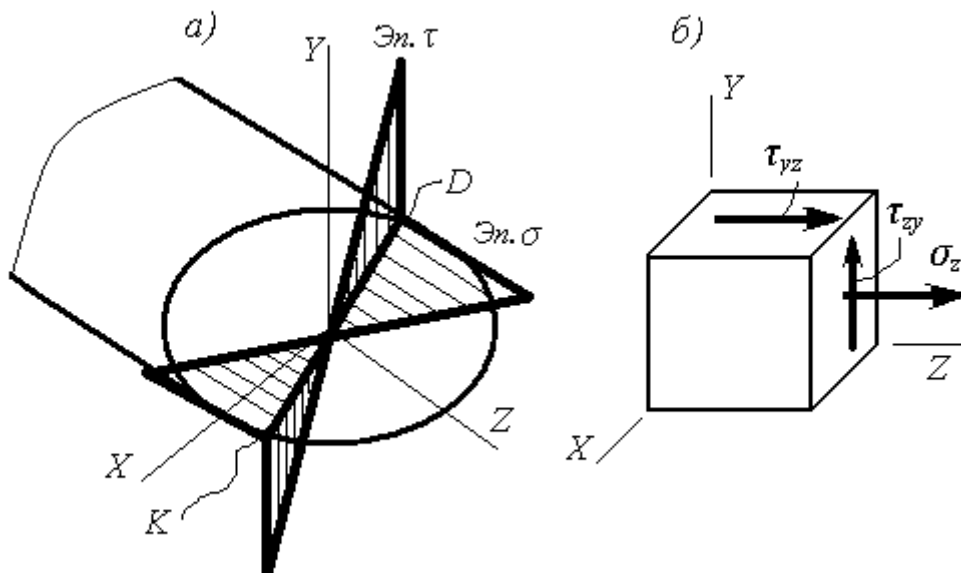


Рис. 11.14. Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений в сечении и напряженное состояние в опасной точке  $D$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}}^{III} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{экв}}^{IV} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].\end{aligned}\quad (11.23)$$

Напряжения, действующие в опасной точке, имеют максимальные значения и определяются в соответствии с расчетными формулами.

$$\text{При прямом изгибе: } \sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{изг.}}}{W_X}, \text{ при кручении } - \tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_\rho}.$$

Подставим значения напряжений, например в III условие прочности (11.23), с учетом, что  $W_X = 2 W_\rho$ .

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг.}}}{W_X}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{\text{кр}}}{2W_X}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг.}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W_X} \leq [\sigma]. \quad (11.24)$$

$$\text{Обозначим } M_p^{III} = \sqrt{M_{\text{изг.}}^2 + M_{\text{кр}}^2}. \quad (11.25)$$

Это есть **приведенный** (эквивалентный или расчетный) момент по III теории прочности.

Аналогичные рассуждения для **четвертой** теории прочности дадут:

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{изг.}}}{W_X}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{кр}}}{2W_X}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг.}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W_X} \leq [\sigma], \quad (11.26)$$

$$\text{где } M_p^{IV} = \sqrt{M_{\text{изг.}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}. \quad (11.27)$$

Таким образом, условие прочности при совместном действии изгиба с кручением можно записать следующим образом:

$$\sigma_p = \frac{M_p}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (11.28)$$

Учитывая, что осевой момент сопротивления сечения  $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$ , можно записать:

**формула для определения диаметра вала при совместном действии изгиба с кручением**

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_p}{\pi [\sigma]}}. \quad (11.29)$$

Полученное по расчету значение  $d$  округляем до ближайшего большего в соответствии с таблицей нормализованного ряда.

### Приведение усилий к центру тяжести вала.

Валы в различных механизмах предназначаются для передачи или перераспределения мощности и частоты вращения за счет использования клиноременных или зубчатых передач. Промежуточными элементами, являются зубчатые колеса (шестерни) и шкивы,

например: карданный вал – коробка передач – оси колес транспортного средства. При этом валы подвергаются действию скручивающих моментов и усилий, действующих в общем случае по всем направлениям.

Рассмотрим **зубчатую** передачу. На параллельных валах, расположенных произвольно друг относительно друга, насажены шестерни. Последние находятся в зацеплении и передают некоторое усилие (давление)  $P$ , возникающее в зацеплении (рис. 11.15 а).

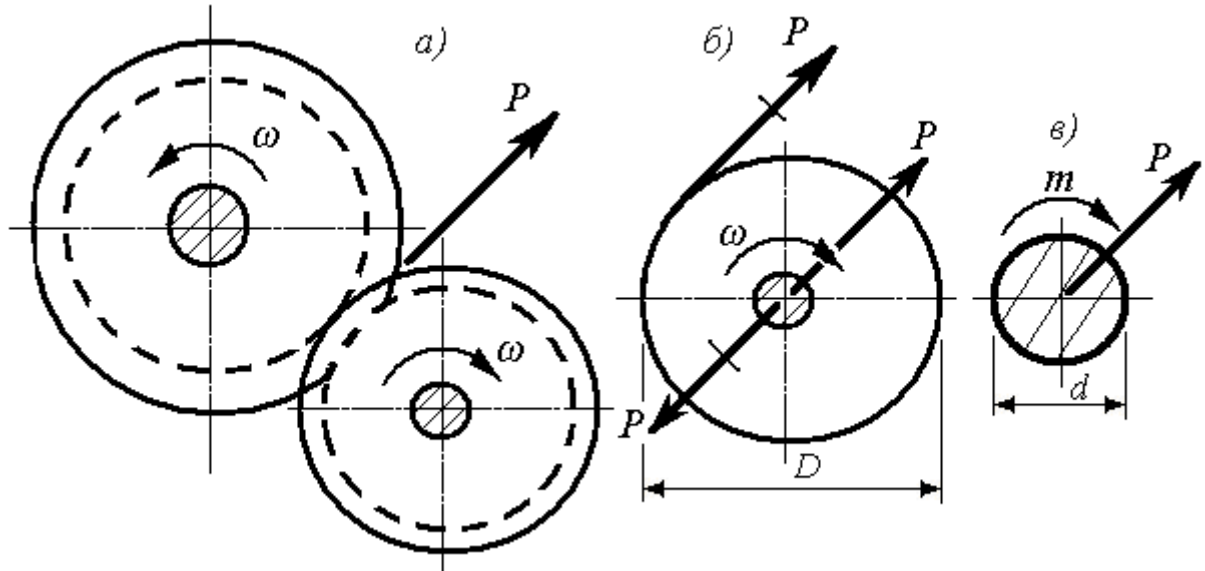


Рис. 11.15. Приведение усилия в зубчатом зацеплении к центру тяжести вала

Стрелкой показаны направления вращения шестерен с круговой частотой  $\omega$ . Рассмотрим, например, нижнюю шестерню диаметром  $D$  и перенесем вектор  $P$  параллельно самому себе в центр тяжести вала (рис. 11.15 б), уравновесив его таким же усилием, но направленным в противоположную сторону. Перечеркнутые вектора усилия  $P$  создают пару сил – **момент, скручивающий вал**:

$$m = P \cdot \frac{D}{2}. \quad (11.30)$$

Таким образом, вал диаметром  $d$  нагружен скручивающим моментом  $m$  и усилием  $P$ , приложенным в центре тяжести вала (рис. 11.15 в).

Обычно скручивающий момент задан или может быть определен через мощность  $N$ , кВт и частоту вращения  $\omega$ , рад/сек:

$$m = \frac{N}{\omega}. \quad (11.31)$$

В свою очередь частота вращения  $\omega$  связана с числом оборотов вала  $n$ , об/мин зависимостью:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (11.32)$$

Используя формулу (11.30) определяем усилие  $P$

$$P = \frac{2m}{D}. \quad (11.33)$$

В случае, если мощность  $N$  будет задана в **лошадиных силах** (л.с.), а число оборотов в  $n$ , об/мин, то скручивающий момент  $m$  рассчитывается в кГм в соответствии с формулой

$$m = 716,2 \frac{N}{n}. \quad (11.34)$$

В **клиноременной передаче** на валы насажены шкивы, которые соединяются между собой ремнем. За счет натяжения ремня усилие передается с одного вала на другой (рис. 11.16 а).

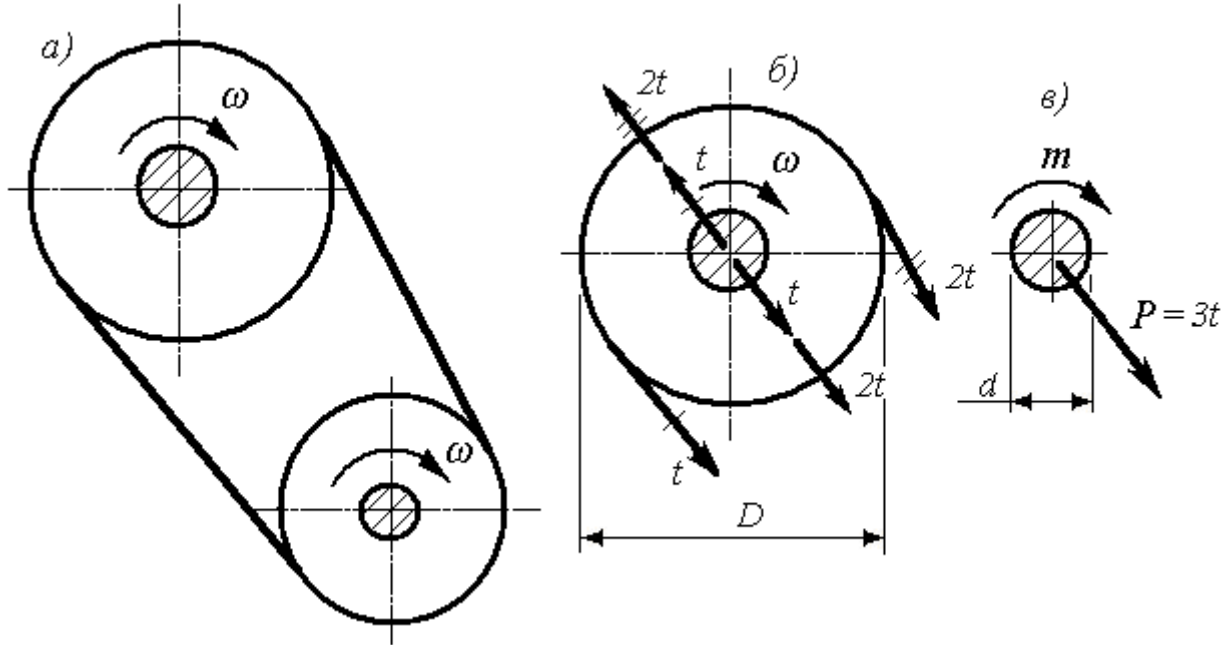


Рис. 11.16. Приведение усилий в клиноременной передаче к центру тяжести вала

Рассечем ремень и рассмотрим равновесие верхнего шкива диаметром  $D$ , приведя усилия (натяжение **набегающей** ветви –  $t$ , а **сбегающей** –  $2t$ ), возникающие в ветвях ременной передачи, к центру тяжести вала (рис. 11.16 б). Вал диаметром  $d$  нагружен скручивающим моментом  $m$  и усилием  $P=3t$ , приложенным в центре тяжести вала (рис. 11.16 в).

Скручивающий момент определяется в соответствии с соотношением

$$m = (2t - t) \frac{D}{2} = t \frac{D}{2}. \quad (11.35)$$

По заданному моменту определяется натяжение

$$t = \frac{2m}{D}. \quad (11.36)$$

Усилие, действующее в центре тяжести, равно  $P=3t$ .

Необходимо также иметь в виду, что **шкивы** – достаточно массивные тела и их **собственный вес необходимо учитывать**. Естественно, вес шкива  $G$  прикладывается в центре тяжести вала и направлен вертикально вниз.

#### Порядок расчета вала.

Валы подвергаются действию одновременно линейных деформаций (от  $M_X$  и  $M_Y$ ) и угловой деформации (от  $M_{кр}$ ). Здесь мы **не будем учитывать**, что нормальные напряжения (от  $M_{изг.}$ ) переменны во времени.

Валы опираются на подшипники. В подшипниках вал вращается без трения. Мощность и вращение передаются с вала на вал посредством шкивов и шестерен.

Направления усилий (давления шестерен и натяжения ремней) зависят от взаимного расположения валов и задаются некоторым углом.

Рассмотрим порядок расчета вала.

1) Для заданной схемы вала по мощности и частоте вращения определяют значения скручивающих моментов, передаваемых шкивами и шестернями. При необходимости определяют величину и направление неизвестного скручивающего момента, составляя уравнение равновесия  $\sum m = 0$ .

2) Строят эпюру крутящих моментов  $M_{кр.}$ .

3) Определяют усилия (давления) на шестернях  $P$  и натяжения ремней  $t$  (см формулы 11.33 и 11.36).

4) Приводят усилия к центру тяжести вала, в соответствии с рис. 11.15 и 11.16. Для шкивов учитывают также собственный вес  $G$ .

5) С учетом полученных схем приведения сил, определяют проекции этих сил на оси координат. Силы  $P_X$  и  $P_Y$  вызывают изгиб вала в двух плоскостях. При определении вертикальных составляющих учитывают величину и направление собственного веса.

6) Изображают схему действия сил **в вертикальной плоскости** (с учетом направлений векторов), определяют опорные реакции и вычерчивают эпюру  $M_x$ .

7) Изображают схему действия сил **в горизонтальной плоскости** (с учетом направлений векторов), определяют опорные реакции и вычерчивают эпюру  $M_y$ . Часто, для удобства, вектора сил поворачивают **в одном направлении** (по ходу или против хода часовой стрелки) в плоскость чертежа – в вертикальную плоскость.

8) Строят эпюру  $M_{изг.}$ , как суммарную от действия  $M_x$  и  $M_y$ .

9) Рассматривая эпюру **крутящих и суммарных изгибающих моментов**, определяют **опасное сечение** вала.

10) По одной из теорий прочности проводят расчет вала (чаще всего – расчет диаметра вала).