ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

Часть 2

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Могилев 2012

УДК 519.21
ББК 22.171
М 16

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» января 2011 г., протокол № 8

Составители: ассистент О. А. Маковецкая;
доц. И. И. Маковецкий

Рецензент доц. Е. С. Жесткова

Приведены методические разработки шести практических занятий по разделу «Теория вероятностей» дисциплины «Высшая математика», которые могут быть использованы студентами дневной и заочной форм обучения для самостоятельной работы.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск Л. В. Плетнев

Технический редактор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка И. А. Алексеюс

Подписано в печать 12.03.2012. Формат 60x84 /16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 165 экз. Заказ № 187.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/0548519 от 16.06.2009.
Пр. Мира, 43, 212000, Могилев.

Содержание

Часть 2

7 Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек.

$F(x)$ – неубывающая функция.

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

$F(x)$ непрерывна слева.

Распределение непрерывной случайной величины X также можно задать с помощью ***плотности вероятности*** $f(x) = F'(x)$.

$f(x) \ge 0$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

К числовым характеристикам непрерывной случайной величины относятся ***начальный момент*** порядка k, ***центральный момент*** порядка k, ***математическое ожидание***, ***дисперсия***, ***среднее квадратическое отклонение***.

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ – математическое ожидание.

$\gamma_k = M\left(X^k\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$ – начальный момент порядка k.

$\mu_k = M\left(\left(X - M(X)\right)^k\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^k f(x)\,dx$ – центральный момент порядка k.

$D(X) = \mu_2 = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = \gamma_2 - \gamma_1^2$ – дисперсия.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ – среднее квадратическое отклонение.

Примеры решения задач

Пример 1 – Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ \ x\le 0;\\ ax^2,\ \text{при}\ \ 0<x\le 1;\\ 1,\ \text{при}\ \ x>1.\end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент a;

б) плотность вероятности $f(x)$;

в) вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение между 0,25 и 0,5;

г) числовые характеристики случайной величины.

Решение:

а) значение коэффициента a определим, учитывая, что функция распределения непрерывная: $F(1-0)=F(1+0)=F(1)$.

$$\lim_{x\to 1-0}F(x)=\lim_{x\to 1-0}ax^2=a;$$

$$\lim_{x\to 1+0}F(x)=\lim_{x\to 1+0}1=1.$$

Приравнивая, получаем $a=1$;

б) плотность вероятности $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}2x,\ \text{при}\ \ 0<x\le 1;\\ 0,\ \text{при}\ \ x\le 0\ \text{или}\ x>1;\end{cases}$$

в) вероятность попадания в интервал

$$P(0{,}25<X<0{,}5)=F(0{,}5)-F(0{,}25)=0{,}5^2-0{,}25^2=0{,}25-0{,}0625=0{,}1875;$$

г) числовые характеристики:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\left(M(X)\right)^2=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1-\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{9-8}{18}=\frac{1}{18}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Требуется найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) математическое ожидание $M(X)$;

в) дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания СВ X на заданный интервал $(\alpha;\beta)$;

д) построить графики функций $f(x)$, $F(x)$.

1.1 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ \sin 2x, \text{ при } 0<x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{\pi}{6}$;

1.2 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 2;\\ \dfrac{1}{2}(x-2)(5-x), \text{ при } 2<x\le 3;\\ 1, \text{ при } x>3;\end{cases}$ $\alpha=2{,}5$; $\beta=3$;

1.3 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), \text{ при } 0<x\le\pi;\\ 1, \text{ при } x>\pi;\end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{\pi}{2}$;

1.4 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0<x\le 2;\\ 1, \text{ при } x>2;\end{cases}$ $\alpha=1$; $\beta=2$;

1.5 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right), \text{ при } 0<x\le 3;\\ 1, \text{ при } x>3;\end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{3}{2}$;

1.6 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } \dfrac{1}{e}\le x\le 1;\\ \ln x, \text{ при } 1<x\le e;\\ 1, \text{ при } x>e;\end{cases}$ $\alpha=1$; $\beta=2$.

2 Дана плотность $f(x)$ распределения вероятностей случайной величины X. Найти:

а) значение постоянного параметра этого распределения;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$;

г) дисперсию $D(X)$;

д) вероятность попадания СВ X на заданный интервал $(\alpha;\beta)$;

е) построить графики функций $f(x)$; $F(x)$.

2.1 $f(x)=\begin{cases} A\sin 2x, \text{ при } \dfrac{3\pi}{4}<x\le\pi; \\ 0, \text{ при } x\le\dfrac{3\pi}{4} \text{ или } x>\pi; \end{cases}$ $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$; $\beta=\dfrac{5\pi}{6}$;

2.2 $f(x)=\begin{cases} A(3x+1), \text{ при } 0<x\le\dfrac{1}{3}; \\ 0, \text{ при } x\le 0 \text{ или } x>\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\alpha=0{,}1$; $\beta=0{,}2$;

2.3 $f(x)=\begin{cases} Ax^2, \text{ при } 0<x\le\dfrac{1}{3}; \\ 0, \text{ при } x\le 0 \text{ или } x>\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=0{,}5$;

2.4 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{9-x^2}}, \text{ при } -3<x\le 3; \\ 0, \text{ при } x\le -3 \text{ или } x>3; \end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{\pi}{2}$;

2.5 $f(x)=\begin{cases} A\cos^2 x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \text{ при } x\le-\dfrac{\pi}{2} \text{ или } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\alpha=0$; $\beta=\dfrac{\pi}{4}$;

2.6 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x}, \text{ при } 1<x\le e; \\ 0, \text{ при } \dfrac{1}{e}\le x\le 1 \text{ или } x>e; \end{cases}$ $\alpha=1$; $\beta=2$.

Домашнее задание

1 Перечислить характеристические свойства функции распределения случайной величины.

2 Может ли функция $F(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ при $x\in(-\infty;+\infty)$ являться функцией распределения некоторой случайной величины?

3 Может ли функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ являться плотностью вероятности некоторой случайной величины?

4 Дана функция $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le -\dfrac{\pi}{2};\\ \cos x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, \text{ если } x>0.\end{cases}$

Показать, что эта функция является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность $P\left(-\dfrac{\pi}{3}\le X\le 0\right)$, числовые характеристики этой случайной величины.

5 Найти числовые характеристики случайной величины X, если функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -a;\\ \dfrac{(a+x)^2}{2a^2}, \text{ при } -a<x\le 0;\\ 1-\dfrac{(a-x)^2}{2a^2}, \text{ при } 0<x\le a;\\ 1, \text{ при } x>a.\end{cases}$$

8 Равномерное и показательное распределение

Непрерывная случайная величина X называется распределенной ***равномерно***, если ее плотность вероятности задается функцией

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ при } a\le x\le b;\\ 0, \text{ при } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$$

Для равномерно распределенной случайной величины X:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ при } a\le x\le b;\\ 1, \text{ при } x>b.\end{cases}$$

$P(\alpha\le X\le\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, если $a\le\alpha\le\beta\le b$.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному*** закону, если ее плотность вероятности задается функцией

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x\ge 0;\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Для случайной величины, распределенной по показательному закону:

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda};$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \text{ при } x\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

$$P(\alpha\le X\le\beta)=e^{-\lambda\cdot\alpha}-e^{-\lambda\cdot\beta}.$$

Примеры решения задач

Пример 1 – Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Найти вероятность того, что ему придется ждать не более полминуты.

Решение

Поскольку событие может наступить в любой момент времени на протяжении 2 мин, то данная случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [0;2], функция распределения которой имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}, \text{ при } 0<x\le 2;\\ 1, \text{ при } >2.\end{cases}$$

Тогда искомая вероятность

$$P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{4}.$$

Пример 2 – Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0;\\ 5e^{-5x}, \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение

По условию $\lambda=5$. Следовательно,

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5};\ D(X)=\sigma^2(X)=\frac{1}{25}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале $(2a;2b)$.

2 Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Найти плотность распределения СВ *T* – времени, в течение которого ему придется ждать поезда, числовые характеристики этой случайной величины. Найти вероятность того, что ожидать придется более одной минуты.

3 Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

4 Случайная величина *X* распределена равномерно на интервале $(a;b)$. Найти вероятность того, что в результате опыта она отклонится от своего математического ожидания больше, чем на 3σ.

5 Случайные величины *X* и *Y* независимы и распределены равномерно: *X* – в интервале $(a;b)$, Y - в интервале $(c;d)$. Найти математическое ожидание произведения $X \cdot Y$.

6 Написать плотность вероятности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 8$.

7 Случайная величина *X* имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти $P(1 < X < 2)$.

8 Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}01e^{-0{,}01t}$ $(t > 0)$, где t – время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

9 Испытываются три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}1t}$, для второго - $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$, для третьего - $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$, $t > 0$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;5)$ ч откажут:

а) только один элемент;

б) только два элемента;

в) все три элемента.

10 Доказать, что если непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность того, что *X* примет значение меньшее математического ожидания $M(X)$, не зависит от величины параметра λ. Найти вероятность $P(X > M(X))$.

Домашнее задание

1 Какой вид имеет функция распределения F(x) случайной величины *X*, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha;\beta]$?

2 Чему равны дисперсия и математическое ожидание случайной величины *X*, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$?

3 Какой вид имеет функция распределения для показательного закона?

4 Чему равна вероятность попадания в заданный интервал значений случайной величины *X*, имеющей показательное распределение?

5 Случайная величина *X* имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M(X) = 3$ и дисперсией $D(X)=\frac{4}{3}$. Найти функцию распределения данной случайной величины.

6 Время обнаружения *T* цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно 10 с.

7 Среднее время работы каждой из двух радиоламп соответственно равно 750 и 800 ч. Определить вероятность того, что обе лампы будут работать не менее 1000 ч.

9 Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется распределенной по ***нормальному*** закону, если ее плотность вероятности задается функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ – параметры распределения, причем $M(X)=a$, $\sigma(X)=\sigma$.

Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ или $\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, таблицы значений которой приведены в [1-6].

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\ \left(\varepsilon>0\right).$$

$P\left(\left|x-a\right|<3\sigma\right)=\Phi\left(3\right)=0{,}9973\approx 1$ – правило «трех сигм».

Примеры решения задач

Пример 1 – Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины *X* соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12;14).

Решение

Для нормально распределенной случайной величины

$$P\left(\alpha\le X\le\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Подставляя $\alpha=12$, $\beta=14$, $a=10$, $\sigma=2$, получим

$$P\left(12<X<14\right)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi\left(2\right)-\Phi\left(1\right).$$

По таблице значений функции $\Phi\left(x\right)$ находим $\Phi\left(2\right)=0{,}9772$, $\Phi\left(1\right)=0{,}8413$.

Искомая вероятность равна $P\left(12<X<14\right)=0{,}9772-0{,}8413=0{,}1359$.

Задачи для самостоятельного решения

1 Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины *X* соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (15;25).

2 Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma=20$ г. Найти вероятность того, что:

а) взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г;

б) из трех независимых взвешиваний ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 г.

3 Случайная величина *X* распределена нормально с математическим ожиданием $m=10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина *X* в результате испытания.

4 Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с $a = 10$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с диаметром 10,7 мм, и все, проходящие через круглое отверстие с диаметром 9,3 мм. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

5 Автомат штампует детали. Контролируется длина детали *X*, которая распределена нормально с проектной длиной (математическим ожиданием), равной 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали:

а) больше 55 мм;

б) меньше 40мм.

Указание – из равенства $P(32 < X < 68) = 1$ предварительно определить σ.

6 Упаковки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти дисперсию, если 5 % коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

7 В нормально распределенной совокупности 11 % значений *X* меньше 0,5 и 8 % *X* больше 5,8. Найти параметры a и σ данного распределения.

8 В нормально распределенной совокупности 25 % значений *X* меньше 5,38 и 10 % значений *X* больше 4,44. Найти параметры данного распределения.

9 Масса арбуза некоторого сорта – нормально распределенная случайная величина с $a = 5$ кг и $\sigma = 0{,}5$ кг. Какова вероятность того, что в партии весом в 10 т находится не менее 1900 и не более 2100 арбузов?

Домашнее задание

1 Чему равны математическое ожидание и дисперсия нормальной случайной величины?

2 Чему равна вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в заданный интервал $(\alpha;\beta)$?

3 Как вычислить вероятность отклонения нормальной величины от ее математического ожидания *M*(*X*)?

4 В чем суть правила «трех сигм»?

5 По виду плотности вероятности нормально распределенной случайной величины определить параметры распределения и написать функцию распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

6 Случайная величина *X* распределена нормально. Найти

$P(35 \le X \le 40)$, если $M(X) = 25$ и $P(10 \le X \le 15) = 0,2$.

7 Случайная величина X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Найти $P(10 \le X \le 50)$.

8 Диаметр детали, изготовленной на станке, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 4,5$ и $\alpha = 0,05$ мм. Найти вероятность того, что размер диаметра случайно взятой детали отличается от номинала не более чем на 1 мм.

10 Системы двух случайных величин. Способы задания системы двух случайных величин

Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x,y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют ***систему двух случайных величин***.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, то есть пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m)$. Обычно закон распределения задают в виде таблицы 10.1, называемой ***матрицей распределения***.

Таблица 10.1

X	Y						
	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	Σ
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_j)$	…	$p(x_1,y_m)$	p_1
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_2,y_j)$	…	$p(x_2,y_m)$	p_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	…	$p(x_i,y_j)$	…	$p(x_i,y_m)$	p_i
…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	…	$p(x_n,y_j)$	…	$p(x_n,y_m)$	p_n
Σ	q_1	q_2	…	q_j	…	q_m	1

Сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единице. Суммируя вероятности по столбцам, получаем закон распределения составляющей X. Суммируя вероятности по строкам, получаем закон распределения составляющей Y.

Двумерную случайную величину (безразлично, дискретную или непрерывную) можно задать с помощью ***функции распределения*** $F(x,y)$, которая определяется по формуле

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x, y) \le 1$;

2) $F(-\infty; y) = F(-\infty; \infty) = F(x; -\infty) = 0$; $F(+\infty; +\infty) = 1$.

3) $F(x,+\infty)=F_1(x)$, где $F_1(x)$ - функция распределения составляющей X;

$F(+\infty;y)=F_2(y)$, где $F_2(y)$ - функция распределения составляющей Y;

$$P(x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2)=\left(F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)\right)-\left(F(x_2,y_2)-F(x_1,y_1)\right).$$

Непрерывную двумерную случайную величину можно также задать, пользуясь ***двумерной плотностью вероятности***. Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x,y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения: $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Свойства плотности вероятности:

1) $f(x,y)\ge 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.

Плотности распределения составляющих:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;\ f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется по формуле $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Примеры решения задач

Пример 1 – Два стрелка, независимо друг от друга, делают по одному выстрелу каждый. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка; Y – число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания при выстреле для первого стрелка 0,7, для второго стрелка 0,4. Построить матрицу распределения системы случайных величин (X,Y) и законы распределения составляющих X и Y. Найти функцию распределения $F(x,y)$.

Решение

Занесем возможные значения случайных величин X и Y в таблицу, считая попадание «1», а промах «0» (таблица 10.2).

Таблица 10.2

X	Y	
	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

$p_{11} = P\left(X = 0; Y = 0\right) = \left(1 - 0{,}7\right) \cdot \left(1 - 0{,}4\right) = 0{,}18$;
$p_{21} = P\left(X = 1; Y = 0\right) = 0{,}7 \cdot \left(1 - 0{,}4\right) = 0{,}42$;
$p_{12} = P\left(X = 0; Y = 1\right) = \left(1 - 0{,}7\right) \cdot 0{,}4 = 0{,}12$;
$p_{22} = P\left(X = 1; Y = 1\right) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$.

Получаем матрицу распределения (таблица 10.3)

Таблица 10.2

X	*Y*	
	0	1
0	0,18	0,12
1	0,42	0,28

Законы распределения составляющих запишем суммированием вероятностей по строкам и столбцам (таблицы 10.4 и 10.5):

Таблица 10.4

X	0	1
p	0,18+0,12=0,3	0,42+0,28=0,7

Таблица 10.5

Y	0	1
p	0,18+0,42=0,6	0,12+0,28=0,4

Двумерную функцию распределения $F(x,y)$ находим на основании матрицы распределения (таблица 10.6)

Таблица 10.6

X	*Y*		
	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,18	0,18+0,12
$x > 1$	0	0,18+0,42	0,18+0,12+0,42+0,28

Окончательно получаем (таблица 10.7)

Таблица 10.7

X	*Y*		
	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 0$	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,18	0,3
$x > 1$	0	0,6	1

Пример 2 – Задана двумерная плотность вероятности $f\left(x,y\right) = \dfrac{C}{\left(9 + x^2\right)\left(16 + y^2\right)}$ системы $\left(X,Y\right)$ двух случайных величин. Найти постоянную C и плотности распределения составляющих системы.

Решение

Воспользуемся свойством двумерной плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)}dxdy = C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{16+y^2} =$$

$$= C\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2}\frac{dx}{9+x^2}\cdot\lim_{\substack{B_1\to-\infty\\ B_2\to+\infty}}\int_{B_1}^{B_2}\frac{dx}{16+y^2} =$$

$$= C\cdot\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Bigg|_{A_1}^{A_2}\cdot\lim_{\substack{B_1\to-\infty\\ B_2\to+\infty}}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\Bigg|_{B_1}^{B_2} =$$

$$= C\left(\lim_{A_2\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{A_2}{3} - \lim_{A_1\to-\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{A_1}{3}\right)\cdot\left(\lim_{B_2\to+\infty}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{B_2}{4} - \lim_{B_1\to-\infty}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{B_1}{4}\right) =$$

$$= \frac{C}{12}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{C\pi^2}{12}.$$

Тогда $\dfrac{C\pi^2}{12} = 1$, $C = \dfrac{12}{\pi^2}$.

Найдем плотность распределения $f_1(x)$ составляющей *X*:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)} = \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{9+x^2}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2}\frac{dy}{16+y^2} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2\left(9+x^2\right)}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\Bigg|_{A_1}^{A_2} = \frac{3}{\pi^2\left(9+x^2\right)}\left(\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A_2}{4}-\operatorname{arctg}\frac{A_1}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2\left(9+x^2\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{\pi^2\left(9+x^2\right)} = \frac{3}{\pi\left(9+x^2\right)}.$$

Аналогичным образом можно получить плотность распределения $f_2(y)$ составляющей *Y*:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)} = \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{1}{16+y^2}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\int_{A_1}^{A_2}\frac{dx}{9+x^2} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2\left(16+y^2\right)}\cdot\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Bigg|_{A_1}^{A_2} = \frac{4}{\pi^2\left(16+y^2\right)}\lim_{\substack{A_1\to-\infty\\ A_2\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A_2}{3}-\operatorname{arctg}\frac{A_1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2\left(16+y^2\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4\pi}{\pi^2\left(16+y^2\right)} = \frac{4}{\pi\left(16+y^2\right)}.$$

Пример 3 - Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{3}$, если известна функция распределения $F\left(x,y\right)=\sin x\cdot\sin y$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение

Воспользуемся формулой для вычисления вероятности попадания случайной точки в прямоугольник:

$$P\left(\frac{\pi}{6}\le X\le\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\le Y\le\frac{\pi}{3}\right)=\left(F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(F\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}\approx 0,08\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Два игрока, независимо друг от друга, по два раза выбрасывают игральный кубик. Случайная величина X – число выпадений «шестерки» у первого игрока; Y – число выпадений «шестерки» у второго игрока. Построить матрицу распределения системы двух случайных величин (X,Y) и законы распределения составляющих. Найти функцию распределения.

2 Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<\frac{1}{2}$, если известна функция распределения системы $F\left(x,y\right)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}3y+\frac{1}{2}\right)$.

3 Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, если известна функция распределения

$$F\left(x,y\right)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, \text{ при } x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, \text{ при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}.$$

4 Найти плотность распределения системы двух случайных величин по известной функции распределения

$$F\left(x,y\right)=\left(1-e^{-2x}\right)\cdot\left(1-e^{-3y}\right),\ x\ge 0,\ y\ge 0\,.$$

5 Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, плотность распределения системы двух случайных величин

$f(x,y) = C\sin(x+y)$, вне прямоугольника $f(x,y) = 0$. Найти: величину C; функцию распределения системы $F(x,y)$.

6 Задана двумерная плотность вероятности $f(x,y) = \dfrac{C}{\left(x^2 + y^2 + 1\right)^3}$ системы случайных величин (X,Y). Найти постоянную C.

Указание – при интегрировании перейти к полярным координатам.

7 В первом квадранте задана функция распределения системы двух случайных величин $F(x,y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$. Найти:

а) двумерную плотность распределения системы;

б) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в треугольник с вершинами $A(1;3)$, $B(3;3)$, $C(2;8)$.

Домашнее задание

1 Что такое двумерная случайная величина?

2 Каким образом задается дискретная двумерная случайная величина?

3 Каким образом задается непрерывная двумерная случайная величина?

4 Можно ли, зная законы распределения составляющих X и Y двумерной случайной величины, восстановить двумерную случайную величину (X,Y)?

5 Дискретная двумерная случайная величина задана матрицей распределения (таблица 10.8).

Таблица 10.8

X	Y		
	0	2	3
1	0,1	0,15	p_{13}
4	0,2	0,3	0,1

Найти неизвестное значение вероятности p_{13}, законы распределения составляющих X и Y, найти функцию распределения $F(x,y)$.

6 Непрерывная двумерная случайная величина задана двумерной плотностью распределения $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, \text{ при } x^2 + y^2 \le 1; \\ 0, \text{ при } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

Найти законы распределения составляющих X и Y и вероятность попадания случайной точки (X,Y) в круг $X^2 + Y^2 < \dfrac{1}{9}$.

7 Найти дифференциальную функцию $f(x,y)$ системы случайных величин $\left(X,Y\right)$ по известной интегральной функции

$$F\left(x,y\right)=\sin x\cdot\sin y \qquad \left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

11 Числовые характеристики системы двух случайных величин

Пусть система двух дискретных случайных величин задана матрицей распределения (таблица 11.1).

Таблица 11.1

X	Y						
	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	Σ
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	…	$p(x_1,y_j)$	…	$p(x_1,y_m)$	p_1
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_2,y_j)$	…	$p(x_2,y_m)$	p_2
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	…	$p(x_i,y_j)$	…	$p(x_i,y_m)$	p_i
…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	$p(x_n,y_1)$	$p(x_n,y_2)$	…	$p(x_n,y_j)$	…	$p(x_n,y_m)$	p_n
Σ	q_1	q_2	…	q_j	…	q_m	1

Тогда ***математические ожидания*** и ***дисперсии*** составляющих случайных величин

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right);$$

$$D\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-M\left(X\right)\right)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(x_i-M\left(X\right)\right)^2\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2.$$

$$M\left(Y\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\left(y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right);$$

$$D\left(Y\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_j-M\left(Y\right)\right)^2 p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\left(\left(y_j-M\left(Y\right)\right)^2\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(y_j^2\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)-\left(M\left(Y\right)\right)^2.$$

Если система двух непрерывных случайных величин задана плотностью вероятностей $f(x,y)$, то

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x,y\right)dxdy,\ M\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf\left(x,y\right)dxdy;$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy-\left(M(X)\right)^2;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-M(Y)\right)^2 f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)dxdy-\left(M(Y)\right)^2.$$

Корреляционным моментом μ_{XY} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин:

$$\mu_{XY}=M\left(\left(X-M(X)\right)\left(Y-M(Y)\right)\right)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y).$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}-M(X)\cdot M(Y),$$

а для непрерывных величин – формулу

$$\mu_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)\left(y-M(Y)\right)f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy-M(X)M(Y).$$

Коэффициентом корреляции r_{XY} величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y};\ \left|r_{XY}\right|\le 1.$$

Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Для независимых случайных величин выполняются следующие свойства:

1) $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$;

2) $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Корреляционный момент μ_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY} служат для характеристики связи между величинами X и Y. Если X и Y независимы, то корреляционный момент равен нулю. Обратное верно не всегда: если $\mu_{XY}=0$, то не всегда X и Y независимы.

Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y. Если между случайными величинами существует строгая функциональная линейная зависимость $Y=aX+b$, то $r_{XY}=1$ при $a>0$ и $r_{XY}=-1$ при $a<0$, причем чем ближе абсолютная величина r_{XY} к единице, тем линейная связь сильнее. Если $r_{XY}=0$, это означает только отсутствие линейной связи между случайными величинами. Любой другой вид связи при этом может присутствовать.

Примеры решения задач

Пример 1 – Матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y) задана таблицей 11.2.

Таблица 11.2

X	Y		
	0	2	5
1	0,1	0,1	0,2
2	0,2	0,3	0,1

Найти числовые характеристики системы (X,Y).

Решение

$$M(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{2}\left(x_i\sum_{j=1}^{3}p_{ij}\right)=x_1\left(p_{11}+p_{12}+p_{13}\right)+$$

$$+x_2\left(p_{21}+p_{22}+p_{23}\right)=1\cdot\left(0{,}1+0{,}1+0{,}2\right)+2\cdot\left(0{,}2+0{,}3+0{,}1\right)=1{,}6.$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{3}y_j\sum_{i=1}^{2}p_{ij}=$$

$$=y_1\left(p_{11}+p_{21}\right)+y_2\left(p_{12}+p_{22}\right)+y_3\left(p_{13}+p_{23}\right)=$$

$$=0\cdot\left(0{,}1+0{,}2\right)+2\cdot\left(0{,}1+0{,}3\right)+5\cdot\left(0{,}2+0{,}1\right)=2{,}3.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i^2 p_{ij}-\left(M(X)\right)^2=x_1^2\left(p_{11}+p_{12}+p_{13}\right)+$$

$$+x_2^2\left(p_{21}+p_{22}+p_{23}\right)-\left(M(X)\right)^2=$$

$$=1^2\cdot\left(0{,}1+0{,}1+0{,}2\right)+2^2\cdot\left(0{,}2+0{,}3+0{,}1\right)-\left(1{,}6\right)^2=0{,}24.$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}y_j^2 p_{ij}-\left(M(Y)\right)^2=y_j^2\left(p_{11}+p_{21}\right)+$$

$$+y_2^2\left(p_{12}+p_{22}\right)+y_3^2\left(p_{13}+p_{23}\right)-\left(M(Y)\right)^2=$$

$$=0^2\cdot\left(0{,}1+0{,}2\right)+2^2\cdot\left(0{,}1+0{,}3\right)+5^2\cdot\left(0{,}2+0{,}1\right)-\left(2{,}3\right)^2=3{,}81.$$

$$\mu_{XY}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}-M(X)\cdot M(Y)=x_1y_1p_{11}+x_1y_2p_{12}+x_1y_3p_{13}+$$

$$+x_2y_1p_{21}+x_2y_2p_{22}+x_2y_3p_{23}-M(X)\cdot M(Y)=$$

$$=1\cdot0\cdot0{,}1+1\cdot2\cdot0{,}1+1\cdot5\cdot0{,}2+2\cdot0\cdot0{,}2+2\cdot2\cdot0{,}3+2\cdot5\cdot0{,}1-1{,}6\cdot2{,}3=$$

$$=3{,}4-3{,}68=-0{,}28.$$

Пример 2 – Пусть область D возможных значений двумерной случайной величины – треугольник с границами $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Плотность распределения имеет вид $f(x,y)=4\left(x+y^2\right)$. Найдем числовые характеристики системы.

Решение

$$M(X)=\iint_D x\cdot f(x,y)dxdy=4\int_0^1 x\cdot dx\int_0^{1-x}\left(x+y^2\right)dy=$$

$$=4\int_0^1 x\cdot dx\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}=4\int_0^1 x\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\frac{4}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}.$$

$$M(Y)=\iint_D y\cdot f(x,y)dxdy=4\int_0^1 ydy\int_0^{1-y}\left(x+y^2\right)dx=$$

$$=4\int_0^1 ydy\left(\frac{x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_0^{1-y}=2\int_0^1\left(y-2y^2+3y^3-2y^4\right)dy=$$

$$=2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}+\frac{3y^4}{4}-\frac{2y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{30}.$$

$$D(X)=\iint_D x^2 f(x,y)dxdy-\left(M(X)\right)^2=$$

$$=4\int_0^1 y^2dy\int_0^{1-y}\left(x+y^2\right)dx-\left(\frac{11}{30}\right)^2=\frac{59}{900}.$$

$$\mu_{XY}=\iint_D xyf(x,y)dxdy-M(X)\cdot M(Y)=$$

$$=\iint_D xy\left(x+y^2\right)dxdy-\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{30}=\int_0^1 x\left(2x\left(1-x^2\right)+\left(1-x\right)^4\right)dx-\frac{22}{150}=$$

$$=\int_0^1\left(x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x\right)dx-\frac{22}{150}=-\frac{7}{150}.$$

$$r_{XY}=-\frac{7}{150}:\sqrt{\frac{14}{225}\cdot\frac{59}{900}}\approx-0,73.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Закон распределения двумерной случайной величины задан таблицей 11.3:

Таблица 11.3

X	Y	
	0	2
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15
2	0,05	0,2

Требуется:

а) определить закон распределения случайной компоненты X. Найти $M(X)$, $D(X)$;

б) проделать то же самое для компоненты Y;

в) найти коэффициент корреляции.

2 Бросаются две неразличимые игральные кости. Пусть X – сумма выпавших очков, а Y – разность между большим и меньших числом очков на костях.

Требуется:

а) построить двумерный ряд распределения;

б) определить математическое ожидание и дисперсию компонент;

в) найти коэффициент корреляции системы (X,Y).

3 Решить предыдущую задачу в предположении, что кости помеченные, а СВ Y – разность очков на костях.

4 Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям.

Найти:

а) двумерную плотность вероятности системы;

б) плотности распределения составляющих;

в) показать, что СВ X и Y – независимы и $r_{XY} = 0$.

5 Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, \text{ внутри эллипса } \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ 0, \text{ вне этого эллипса.} \end{cases}$$

Требуется:

а) найти плотности распределения составляющих и показать, что X и Y – зависимые;

б) найти корреляционный момент μ_{XY}.

Указание – воспользоваться свойством определенного интеграла: если подынтегральная функция нечетна и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, то определенный интеграл равен нулю.

6 Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y): $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\sin(x+y)$ – в квадрате

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x,y) = 0$. Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

7 Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f(x,y) = \begin{cases} k(x+y), \text{ при } (x,y) \in D; \\ 0, \text{ при } (x,y) \notin D, \end{cases}$

где D – треугольная область плоскости, координаты точек которой положительны, но лежат ниже прямой $x + y = 1$.

Определить:

а) нормировочный множитель k;

б) математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y;

в) коэффициент корреляции между X и Y;

г) вероятность события $X + Y < \frac{1}{2}$;

д) плотность распределения СВ X.

8 Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f(x,y) = \begin{cases} k \cdot x \cdot y, \text{ при } (x,y) \in D; \\ 0, \text{ при } (x,y) \notin D, \end{cases}$

где $D = \{(x,y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$.

Определить:

а) нормировочный множитель k;

б) математические ожидания и дисперсии X и Y;

в) коэффициент корреляции между X и Y;

г) вероятность $P\left(X < \frac{a}{2}\right)$;

д) функцию распределения случайной величины Y.

Домашнее задание

1 Какие числовые характеристики можно найти, зная закон распределения двумерной случайной величины?

2 Что такое корреляционный момент случайных величин X и Y?

3 Что называется коэффициентом корреляции случайных величин X и Y?

4 Какие случайные величины называются независимыми?

5 Дискретная двумерная случайная величина задана матрицей распределения (таблица 11.4).

Найти неизвестное значение вероятности p_{13}, числовые характеристики составляющих X и Y, корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Таблица 11.4

X	Y		
	0	2	3
1	0,1	0,15	p_{13}
4	0,2	0,3	0,1

6 Непрерывная двумерная случайная величина задана двумерной плотностью распределения $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, \text{ при } x^2+y^2\le 1;\\ 0, \text{ при } x^2+y^2>1.\end{cases}$

Найти числовые характеристики составляющих X и Y, корреляционный момент и коэффициент корреляции.

12 Условные законы распределения вероятностей и условные числовые характеристики составляющих двумерной случайной величины. Регрессия

Пусть составляющие X и Y дискретные и их возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$.

Условным распределением составляющей X при $Y = y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1 \mid y_j)$, $p(x_2 \mid y_j)$, …, $p(x_n \mid y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Условные вероятности вычисляются по формулам

$$p(x_i \mid y_j)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)};\ p(y_j \mid x_i)=\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)}.$$

Пусть (X,Y) – непрерывная двумерная случайная величина с плотностью распределения $f(x,y)$.

Условной плотностью $\varphi(x,y)$ распределения составляющей X при заданном значении $Y = y$ называют

$$\varphi(x \mid y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}.$$

Аналогично определяется условная плотность вероятности составляющей Y при заданном значении $X = x$:

$$\psi\left(y \mid x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_1\left(x\right)}=\frac{f\left(x,y\right)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy}.$$

Если X и Y ***независимые*** случайные величины, то $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\cdot f_2\left(y\right)$, то есть для независимых случайных величин условные плотности распределения вероятностей равны их безусловным плотностям $f_1\left(x\right)=\varphi\left(x \mid y\right)$, $f_2\left(y\right)=\psi\left(y \mid x\right)$.

Условным математическим ожиданием одной из случайных величин, входящих в систему (X,Y), называется ее математическое ожидание, вычисленное в предположении, что другая случайная величина приняла определенное значение, то есть найденное на основе условного закона распределения.

Для дискретных случайных величин

$$M\left(Y \mid X=x_i\right)=\sum_{j=1}^{m} y_j\cdot p\left(y_j \mid x_i\right);$$

$$M\left(X \mid Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot p\left(x_i \mid y_j\right).$$

Для непрерывных величин

$$M\left(Y \mid X=x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\psi\left(y \mid x\right)dy;$$

$$M\left(X \mid Y=y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi\left(x \mid y\right)dx.$$

Условное математическое ожидание $M\left(Y \mid X=x\right)$ есть функция от x: $M\left(Y \mid X=x\right)=f\left(x\right)$, которую называют ***функцией регрессии*** Y на X. Аналогично функция регрессии Y на X – это функция $M\left(X \mid Y=y\right)=\varphi\left(y\right)$. Графики этих функций называются линиями регрессии или «кривыми регрессии».

Примеры решения задач

Пример 1 – Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y) (таблица 12.1).

Таблица 12.1

X	Y		
	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти:

а) условный закон распределения составляющей X при условии $Y = 0{,}4$;

б) условный закон распределения Y при условии $X = 5$.

Решение

Найдем условные вероятности

а) $P\left(X=2\,|\,Y=4\right)=\dfrac{0{,}15}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\dfrac{3}{16}$;

$$P\left(X=5\,|\,Y=0{,}4\right)=\frac{0{,}3}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\frac{3}{8};$$

$$P\left(X=8\,|\,Y=0{,}4\right)=\frac{0{,}35}{0{,}15+0{,}3+0{,}35}=\frac{7}{16}.$$

Искомый условный закон распределения X (таблица 12.2).

Таблица 12.2

$X\|Y$=0,4	2	5	8
$P(X\|Y$=0,4)	3/16	3/6	7/16

б) $P\left(Y=0{,}4\,|\,X=5\right)=\dfrac{0{,}3}{0{,}3+0{,}12}=\dfrac{5}{7}$;

$$P\left(Y=0{,}8\,|\,X=5\right)=\frac{0{,}12}{0{,}3+0{,}12}=\frac{2}{7}.$$

Условный закон распределения составляющей Y приведен в таблице 12.3.

Таблица 12.3

$Y\|X$=5	0,4	0,8
$P(Y\|X$=5)	5/7	2/7

Пример 2 – Двумерная дискретная случайная величина задана табличным законом распределения (таблица 12.4).

Таблица 12.4

X	Y		
	0	3	5
1	0	0,05	0,1
5	0,1	0,1	0,15
12	0,1	0,15	0,25

Построить линии регрессии Y на X.

Решение

Найдем условные законы Y при $X = 1$, $X = 5$ и $X = 12$.

$$P\left(Y=0\,|\,X=1\right)=\frac{0}{0+0,05+0,1}=0;$$

$$P\left(Y=3\,|\,X=1\right)=\frac{0,05}{0,15}=\frac{1}{3};\; P\left(Y=5\,|\,X=1\right)=\frac{0,1}{0,15}=\frac{2}{3}.$$

Условный закон распределения составляющей Y при $X = 1$ имеет вид (таблица 12.5).

Таблица 12.5

Y	0	3	5
$P(Y\|X=1)$	0	1/3	2/3

$$M\left(Y\,|\,X=1\right)=3\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{2}{3}=\frac{13}{3}.$$

$$P\left(Y=0\,|\,X=5\right)=\frac{0,1}{0,1+0,1+0,15}=\frac{2}{7};$$

$$P\left(Y=3\,|\,X=5\right)=\frac{0,1}{0,35}=\frac{2}{7};\; P\left(Y=5\,|\,X=5\right)=\frac{0,15}{0,35}=\frac{3}{7}.$$

Условный закон распределения составляющей Y при $X = 5$ имеет вид (таблица 12.6).

Таблица 12.6

Y	0	3	5
$P(Y\|X=5)$	2/7	2/7	3/7

$$M\left(Y\,|\,X=5\right)=3\cdot\frac{2}{7}+5\cdot\frac{3}{7}=3.$$

$$P\left(Y=0\,|\,X=12\right)=\frac{0,1}{0,1+0,15+0,12}=\frac{2}{9};$$

$$P\left(Y=3\,|\,X=12\right)=\frac{0,15}{0,45}=\frac{1}{3};\; P\left(Y=5\,|\,X=12\right)=\frac{0,2}{0,45}=\frac{4}{9}.$$

Условный закон распределения составляющей Y при X =12 имеет вид (таблица 12.7).

Таблица 12.7

Y	0	3	5
$P(Y\|X=12)$	2/9	1/3	2/9

$$M(Y\,|\,X=12)=3\cdot\frac{1}{3}+5\cdot\frac{4}{9}=\frac{29}{9}.$$

Линия регрессии имеет вид (рисунок 12.1):

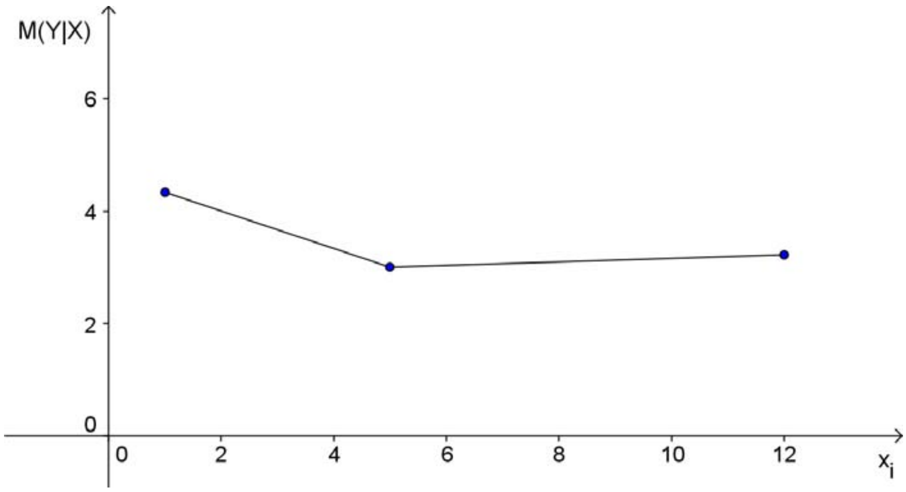

Рисунок 12.1

Пример 3 – Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}$.

Найти:

а) плотности распределения составляющих;

б) условные плотности распределения составляющих.

Решение

Найдем плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}dy=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{2xy+5y^2}{2}}dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{10}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{2}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2}d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-0,4x^2}.$$

Аналогично найдем плотность распределения составляющей Y:

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}.$$

Найдем условные плотности распределения составляющих.

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}e^{-2y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2+2xy+y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+y)^2}{2}};$$

$$\psi(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2+2xy+5y^2}{2}}\cdot\frac{\sqrt{5\pi}}{\sqrt{2}e^{-0,5x^2}}=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}e^{-0,1(x+5y)^2}.$$

Пример 4 – Задана плотность распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, \text{ при } (x,y)\in D;\\ 0, \text{ при } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

где $D=\{(x,y): x\geq y, y\geq 0, x\leq 2\}$.

Найти линию регрессии СВ X на СВ Y.

Решение

Найдем условную плотность распределения X на Y.

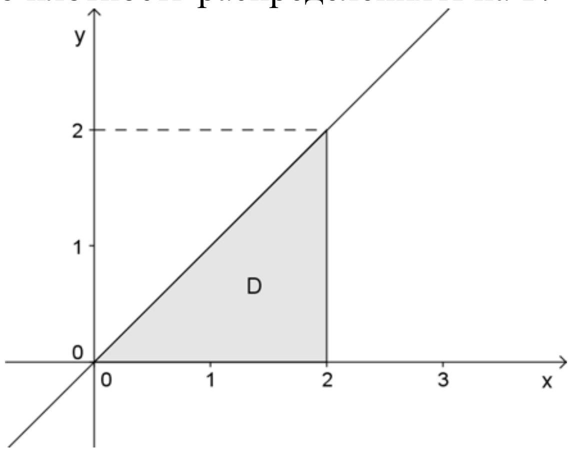

Рисунок 12.2

Из рисунка области D (рисунок 12.2) видно, что $0\leq y\leq 2$.

$$\varphi(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{2}:\left(\int_y^2\frac{1}{2}dx\right)=\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_y^2=\frac{1}{2-y}.$$

$$M(X\,|\,Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\varphi(x\,|\,y)dx=\int_y^2\frac{xdx}{2-y}=\frac{1}{2-y}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^2=\frac{4-y^2}{2(2-y)}=\frac{2+y}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y) (таблица 12.8).

Таблица 12.8

X	Y	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Требуется:

а) найти условный закон распределения Y при условии, что X = 6;

б) построить линию регрессии X на Y.

2 Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) равномерно распределена внутри прямоугольного треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(0,8)$, $B(8,0)$.

Найти:

а) двумерную плотность вероятности системы;

б) плотности и условные плотности распределения составляющих.

3 Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) $f\left(x,y\right)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}$.

Найти:

а) постоянный множитель C;

б) плотность распределения составляющих;

в) условные плотности распределения составляющих.

4 Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, \text{ при } x^2+y^2\le r^2;\\ 0, \text{ при } x^2+y^2>r^2.\end{cases}$

Найти условные законы распределения вероятностей составляющих.

5 Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $f\left(x,y\right)=\cos x\cdot\cos y$ - в квадрате $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$; вне квадрата $f\left(x,y\right)=0$. Доказать, что X и Y – независимые случайные величины. Найти линию регрессии Y на X.

6 Плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины $f\left(x,y\right)=\begin{cases}3\left(x+y\right), \text{ при } \left(x,y\right)\in D;\\ 0, \text{ при } \left(x,y\right)\notin D,\end{cases}$

где $D=\left\{\left(x,y\right):x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\right\}$.

Найти функцию регрессии X на Y.

Домашнее задание

1 Что называется условным распределением составляющей двумерной случайной величины?

2 Как вычисляются условные вероятности?

3 Что такое условная плотность распределения составляющей непрерывной двумерной случайной величины?

4 Что такое условное математическое ожидание и как оно связано с функцией регрессии между составляющими двумерной случайной величины?

5 Дискретная двумерная случайная величина задана матрицей распределения (таблица 12.9).

Таблица 12.9

X	Y		
	0	2	3
1	0,1	0,15	p_{13}
4	0,2	0,3	0,1

Найти неизвестное значение вероятности p_{13}, условные законы распределения составляющих, линию регрессии Y на X.

6 Непрерывная двумерная случайная величина задана двумерной плотностью распределения $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, \text{ при } x^2+y^2\le 1;\\ 0, \text{ при } x^2+y^2>1.\end{cases}$

Найти условные плотности вероятности составляющих X и Y, уравнение линии регрессии X на Y.

Список литературы

1 **Боровков, А. А**. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М. : Наука, 1976. – 352 с.

2 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1975. – 364 с.

3 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2001. – 400 с.

4 **Гурский, Е. И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1984 . – 223 с.

5 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 1999. – 366 с.

6 **Гурский, Е. И.** Теория вероятностей с элементами математической статистики /Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1984. – 223 с.