ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА

Часть 4.2
Математическая статистика

**Краткий конспект лекций
для студентов специальности 1-70 02 01
«Промышленное и гражданское строительство»
заочной дистанционной формы обучения**

Могилёв 2013

Составитель Д. В. Роголев

Содержание

§ 1.1 Основные понятия математической статистики

Математическая статистика – это раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных явлений или процессов по результатам наблюдений.

Основными ***задачами*** математической статистики является:

- указание способов сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов;
- разработка методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследователя;
- построение научно-обоснованных выводов и рекомендаций.

Математическая статистика возникла в XVII в. и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX в. – начало XX в.) обязано, в первую очередь, П.Л. Чебышёву, А.А. Маркову, А.М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.

В XX в. наиболее существенный вклад в математическую статистику был сделан советскими математиками (В.И. Романовский, Е.Е. Слуцкий, А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фишер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учёными.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Выборочной совокупностью или просто ***выборкой*** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объёмом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объём генеральной совокупности $N = 1000$, а объём выборки $n = 100$.

В математической статистике принято правило: даже если генеральная совокупность конечна, все равно она считается бесконечной по объёму.

К выборке предъявляют основное требование – выборка должна быть **репрезентативна** – правильно представлять генеральную совокупность. Для репрезентативности выборки требуется, чтобы:

- отбор был случайным;
- все объекты генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попасть в выборку.

Для обеспечения этих требований разрабатывают способы отбора (сбора) информации.

Способы отбора информации могут быть:

1) без расчленения генеральной совокупности (когда объёмы генеральной совокупности и выборки малы):

- *простой случайный повторный отбор* – когда объекты выбирают из генеральной совокупности по одному, нумеруют, перемешивают, берут по одному, анализируют, затем возвращают в генеральную и процесс повторяют;
- *простой случайный бесповторный отбор* – все то же самое, но после анализа объекты в генеральную совокупность не возвращают.

2) с расчленением генеральной совокупности (при большой генеральной совокупности и малой выборке):

- *типический* – когда объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой её «типической» части (используются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности);
- *механический* – когда генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект (следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки);
- *серийный* – когда объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию (пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно);
- *комбинированный* – смешивают в разумных рамках приведенное выше.

§ 1.2 Обработка статистических данных

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка некоторого объема.

Значения x_i исследуемого признака X называются ***вариантами***.

Расположим варианты в порядке возрастания их значений. Полученный ряд называется ***дискретным вариационным рядом***.

Если выборка имеет большой объём (более 30 вариант) или исследуемый признак непрерывен, то строят ***интервальный вариационный ряд***.

Если некоторые или многие варианты повторяются, то тогда их группируют. Если несколько вариант равны значению x_i, то говорят, что варианта x_i имеет ***частоту*** n_i. Естественно, что $\sum n_i = n$ – объёму выборки.

Если частоту n_i разделить на объём выборки n, то получим ***относительную частоту*** $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$. Числа $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$ называют ***накопленными частотами***. Числа $\dfrac{N_i}{n}$ называют ***относительными накопленными частотами.***

Пусть выборка имеет большой объём или генеральная совокупность непрерывна. Тогда экспериментальные данные следует обрабатывать в следующем порядке:

- найти минимальную $x_{\min}$ и максимальную $x_{\max}$ варианты выборки;
- найти размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min}$;
- найти шаг интервального вариационного ряда $h = \dfrac{R}{1 + 3,2\ln n}$ (чаще просто разбивают интервал $\left[x_{\min}, x_{\max}\right]$ на 5-15 частей);
- договариваются об отнесении граничных точек интервалов (некоторые варианты могут совпадать с границами интервалов);
- подсчитывают частоты n_i – количество вариант, попадающих в выбранный интервал;
- приступают к формированию статистических распределений выборки.

§ 1.3 Статистические распределения выборки

Статистическим распределением выборки по частотам называется таблица, первую строку (столбец) которой занимает вариационный ряд (дискретный или интервальный), а вторую строку (столбец) занимают частоты.

Статистическим распределением выборки по относительным частотам называется таблица, где вторую строку (столбец) занимают относительные частоты.

Статистическим распределением выборки по накопленным частотам называется таблица, где вторую строку (столбец) занимают накопленные частоты.

Статистическим распределением выборки по относительным накопленным частотам называется таблица, где вторую строку (столбец) занимают относительные накопленные частоты.

Замечание. В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами (относительными частотами).

Пример.

Обработать экспериментальные данные – замеренные длины заготовок:

39, 41, 40, 40, 43, 41, 44, 42, 41, 41, 43, 42, 39, 40, 42,
43, 41, 42, 41, 39, 42, 42, 41, 42, 40, 41, 43, 41, 39, 40.

Решение.

Объём выборки равен: $n = 30$.

Находим размах варьирования: $x_{\min} = 39$, $x_{\max} = 43$, $R = 4$.

Генеральная совокупность дискретна и мала. Поэтому строим дискретный вариационный ряд: 39, 40, 41, 42, 43.

Подсчитываем частоты: варианта 39 в статистике встретилась 4 раза; варианта 40 – 5 раз; варианта 41 – 9 раз; варианта 42 – 6 раз; варианта 43 – 4 раза.

Статистическое распределение выборки по частотам:

x_i	39	40	41	42	43
n_i	4	5	9	6	4

Статистическое распределение выборки по относительным частотам:

x_i	39	40	41	42	43
ω_i	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

Аналогично строятся остальные распределения.

Построив статистические распределения, можно дать им геометрическую интерпретацию.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $\left(x_1, n_1\right)$, $\left(x_2, n_2\right)$, ... , $\left(x_k, n_k\right)$.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладываю варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $\left(x_i, n_i\right)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломаную отрезки которой соединяют точки $\left(x_1, \omega_1\right)$, $\left(x_2, \omega_2\right)$, ... , $\left(x_k, \omega_k\right)$

Для статистического распределения выборки по накопленным частотам подобная ломаная носит название ***кумулятивной кривой***.

Пример.
Построить полигоны для полученных выше распределений.

Если выборка представлена интервальным статистическим распределением, то для её геометрической интерпретации используют другое представление.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ – ***плотности частоты***.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии $\frac{n_i}{h}$.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ – сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки*.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$ – ***плотности относительной частоты***.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна ω_i – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, *площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице*.

Пусть известно статистическое распределение выборки. Введём обозначения: n_x – число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x. Относительная частота события $X < x$ будет равна $\frac{n_x}{n}$. Если x изменяется, то изменяется и относительная частота, т.е. относительная частота $\frac{n_x}{n}$ есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то её называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют ***теоретической функцией распределения.***

Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события.

Эмпирическая функция обладает следующими свойствами:

1. значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$;
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция;
3. если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример.

Построить эмпирическую функцию $F^*(x)$ для полученного выше распределения.

§ 1.4 Расчёт сводных характеристик выборки

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака *X*.

Генеральной средней $\overline{x}_Г$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности. Она определяет математическое ожидание признака *X*.

$$M(X) = \overline{x}_Г.$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику, называемую генеральной дисперсией.

Генеральной дисперсией $D_Г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_Г$.

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются ещё одной сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Генеральным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из генеральной дисперсии.

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г}.$$

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n. Требуется по данным выборки оценить неизвестные генеральную среднюю, генеральную дисперсию и генеральное среднее квадратическое отклонение.

В качестве оценки генеральной средней принимают выборочную среднюю.

Выборочной средней $\overline{x}_B$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки различны, то

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$\overline{x}_B = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}.$$

Для характеристики рассеяния наблюдаемых значений вокруг своего среднего значения $\overline{x}_B$, вводят выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений выборки от их среднего значения.

Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки различны, то

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_B)^2}{n}.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n}.$$

Также для характеристики рассеяния значений вокруг своего среднего значения пользуются средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Замечание. Для многоточечных или многозначных вариант расчёт по этим формулам может оказаться затруднительным. В таких случаях используют специальные методы расчета сводных характеристик выборки.

Особенно простым является ***метод условных вариант***, если вариационный ряд будет представлен равноотстоящими вариантами или интервальным распределением с постоянным шагом интервалов. В таком случае используют переход к условным вариантам по формуле:

$$u_i = \frac{x_i - C}{h},$$

где u_i – условная варианта, C – ложный нуль (варианта с наибольшей частотой или середина вариационного ряда), h – шаг вариационного ряда или расстояние между центрами соседних интервалов.

В результате такой замены любой вариационный ряд превращается в целочисленный вариационный ряд.

В качестве оценки генеральной дисперсии принимают характеристику, называемую ***исправленной выборочной дисперсией:***

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n-1}.$$

Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n-1}}.$$

Замечание. Сравнивая формулы для D_B и s^2, видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях объёма выборки выборочная и исправленная дисперсии различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

Пример. Найти сводные характеристики для рассмотренной ранее выборки.

§ 1.5 Основные распределения случайных величин[1]

В математической статистике чаще всего используются следующие распределения случайных величин:

- гамма-функция;
- распределение χ^2 («хи-квадрат»);
- распределение Стьюдента;
- распределение Фишера.

§ 1.6 Статистические оценки и требования к ним

Для описания количественного признака генеральной совокупности используют либо закон распределения, либо числовые характеристики. Последние иногда называют ***параметрами распределения***.

Если о признаке известно лишь, что он подчиняется некоторому распределению и имеется статистический материал для исследования, то встает задача об отыскании оценок параметров распределения.

<u>Определение.</u> ***Статистической оценкой*** неизвестного параметра распределения называют функцию от наблюдаемых значений СВ.

Для того чтобы статистические оценки давали необходимые приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

<u>Определение.</u> ***Несмещённой*** называют статистическую оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру в при любом объеме выборки.

<u>Определение.</u> ***Смещённой*** называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

<u>Определение.</u> ***Эффективной*** называют статистическую оценку, которая при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.

<u>Определение.</u> ***Состоятельной*** называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Например, выборочная средняя является несмещенной и состоятельной оценкой для генеральной средней, а несмещенной оценкой для генеральной дисперсии является исправленная выборочная дисперсия.

---

[1] См., например, в книге «Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика», глава 12, §13-15.

Все оценки разделяются на точечные и интервальные.

<u>Определение.</u> ***Точечной*** называют оценку, которая определяется одним числом.

Все оценки, рассмотренные выше, — точечные. При выборке малого объёма точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объёме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

<u>Определение.</u> ***Интервальной*** называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика Q^* служит оценкой неизвестного параметра Q. Ясно, что Q^* тем точнее определяет параметр Q, чем меньше абсолютная величина разности $|Q-Q^*|$. Другими словами, если $\delta>0$ и $|Q-Q^*|<\delta$, то чем меньше δ, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число δ характеризует ***точность оценки***.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Q^* удовлетворяет неравенству $|Q-Q^*|<\delta$, можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

<u>Определение.</u> ***Надёжностью (доверительной вероятностью)*** оценки Q по Q^* называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|Q-Q^*|<\delta$.

Обычно надёжность оценки задаётся наперёд, причём в качестве γ берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надёжность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.

<u>Определение.</u> ***Доверительным*** называют интервал $(Q^*-\delta, Q^*+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

§ 1.7 Точечные оценки параметров распределения

Для построения точечных оценок параметров распределения используют:

- метод моментов, предложенный Пирсоном;
- метод наибольшего правдоподобия, предложенный Фишером.

I. Метод моментов.

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов рассматриваемого распределения к соответствующим эмпирическим моментам того же порядка.

Пусть задан вид плотности распределения $f(x,Q)$, определяемой одним неизвестным параметром *Q*. Требуется найти точечную оценку параметра *Q*.

Для оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Приравняем, например, начальный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка:

$$\nu_1 = M_1.$$

Начальным теоретическим моментом первого порядка называют математическое ожидание. В качестве начального эмпирического момента в статистике фигурирует величина $\overline{x}_B$. Таким образом

$$M(X) = \overline{x}_B. \qquad \textbf{(*)}$$

Для неизвестного параметра *Q* математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,Q)\,dx = \varphi(Q),$$

т.е. является функцией от *Q*, поэтому **(*)** можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным *Q*. Решив это уравнение относительно параметра *Q*, тем самым найдем его точечную оценку *Q**, которая является функцией от выборочной средней, следовательно, и от вариант выборки:

$$Q^* = \psi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

<u>Пример.</u> Найти методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения, плотность распределения которого $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ (x \ge 0)$.

Решение.

Приравняем начальный теоретический момент первого порядка к начальному эмпирическому моменту первого порядка:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \overline{x}_B.$$

Отсюда $\lambda = \dfrac{1}{\overline{x}_B}$.

Итак, искомая точечная оценка параметра λ показательного распределения равна величине, обратной выборочной средней, $\lambda^* = \dfrac{1}{\overline{x}_B}$.

По аналогичной схеме строят оценки для двух неизвестных параметров плотности вероятности $f\left(x, Q_1, Q_2\right)$. Для отыскания параметров необходимо решить систему двух уравнений относительно этих параметров:

$$\begin{cases} M\left(X\right) = \overline{x}_B, \\ D\left(X\right) = D_B. \end{cases}$$

Например, точечными оценками методом моментов по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ неизвестных параметров *a* и *σ* нормального распределения

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

являются выборочная средняя и выборочная дисперсия:

$$\begin{cases} a^* = \overline{x}_B, \\ \sigma^* = D_B. \end{cases}$$

II. Метод наибольшего правдоподобия.

Пусть X – дискретная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неизвестен параметр Q, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку.

Обозначим вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, через $p\left(x_i; Q\right)$.

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называют функцию аргумента Q:

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n; Q\right) = p\left(x_1; Q\right) p\left(x_2; Q\right) ... p\left(x_n; Q\right),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – фиксированные числа.

В качестве точечной оценки параметра Q принимают такое его значение $Q^* = Q^*\left(x_1, x_2, ..., x_n;\right)$ при котором функция правдоподобия достигает максимума. Оценку Q^* называют ***оценкой наибольшего правдоподобия***.

Функции L и $\ln L$ достигают максимума при одном и том же значении Q, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут максимум функции $\ln L$.

Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию $\ln L$. Точку максимума функции $\ln L$ аргумента Q можно искать, например, так:

1) найти производную $\dfrac{d \ln L}{dQ}$;

2) приравнять производную нулю и найти критическую точку – корень полученного уравнения (его называют ***уравнением правдоподобия***);
3) найти вторую производную $\dfrac{d^2 \ln L}{dQ^2}$; если вторая производная при $Q = Q^*$ отрицательна, то Q^* – точка максимума.

Найденную точку максимума Q^* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра Q.

Пусть X – непрерывная случайная величина, которая в результате n испытаний приняла значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Допустим, что вид плотности распределения $f(x)$ задан, но не известен параметр Q , которым определяется эта функция.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины X называют функцию аргумента Q:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; Q) = f(x_1; Q) f(x_2; Q) ... f(x_n; Q),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – фиксированные числа.

Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного параметра распределения непрерывной случайной величины ищут так же, как в случае дискретной величины.

Метод наибольшего правдоподобия имеет ряд достоинств: оценки наибольшего правдоподобия состоятельны, распределены асимптотически нормально и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками. Если для оцениваемого параметра Q существует эффективная оценка Q^*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение Q^*. Этот метод наиболее полно использует данные выборки об оцениваемом параметре, поэтому он особенно полезен в случае малых выборок.

Недостаток метода состоит в том, что он часто требует сложных вычислений.

Замечание. Оценка наибольшего правдоподобия не всегда совпадает с оценкой, найденной методом моментов.

Пример. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ распределения Пуассона

$$P_m(X = x_i)\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где m – число испытаний, x_i – число появлений события в i-м $\left(i = \overline{1, n}\right)$ опыте.

Решение.

Составим функцию правдоподобия, учитывая, что $Q = \lambda$:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda) = p(x_1; \lambda)\, p(x_2; \lambda) ... p(x_n; \lambda) =$$

$$= \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1 !} \cdot \frac{\lambda^{x_2} e^{-\lambda}}{x_2 !} \cdot ... \cdot \frac{\lambda^{x_n} e^{-\lambda}}{x_n !} = \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-\lambda n}}{x_1 ! x_2 ! ... x_n !}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \ln \lambda \sum x_i - \lambda n - \ln\left(x_1 ! x_2 ! ... x_n !\right).$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum x_i - n.$$

Напишем уравнение правдоподобия:

$$\frac{1}{\lambda} \sum x_i - n = 0.$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x}_B.$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum x_i.$$

Легко видеть, что при $\lambda = \overline{x}_B$ вторая производная отрицательна; следовательно, $\lambda = \overline{x}_B$ – точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра λ распределения Пуассона надо принять выборочную среднюю $\lambda^* = \overline{x}_B$.

§ 1.8 Интервальные оценки параметров распределения

Метод доверительных интервалов (интервальных оценок) разработал американский статистик Нейман, исходя из идей английского статистика Фишера. Рассмотрим некоторые типовые доверительные интервалы.

I. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\overline{x}$,т.е. найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочную среднюю $\bar{x}$ как случайную величину $\bar{X}$ и выборочные значения признака $x_1, x_2, ..., x_n$ – как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$. Другими словами, математическое ожидание каждой из этих величин равно a и среднее квадратическое отклонение – σ.

Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы:

$$M\left(\bar{X}\right) = a, \quad \sigma\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \delta\right) = \gamma,$$

где γ – заданная надежность.

Пользуясь формулой

$$P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

заменив X на $\bar{X}$ и σ на $\sigma\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t),$$

где $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Найдя из последнего равенства $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, можем написать

$$P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Приняв во внимание, что вероятность P задана и равна γ, окончательно имеем:

$$P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Отметим, что число t определяется из равенства $2\Phi(t) = \gamma$; по таблице функции Лапласа находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Замечание. Данную оценку |называют классической. При возрастании объёма выборки n число δ убывает и, следовательно, точность оценки увеличивается. Увеличение надежности оценки $\gamma = 2\Phi(t)$ приводит к увеличению t и, следовательно, к возрастанию δ; т.е. к уменьшению точности.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним, если объём выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0,95$.

Решение.

Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t) = 0,95$ получим $\Phi(t) = 0,475$. По таблице находим $t = 1,96$.

Найдем точность оценки:

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98.$$

Доверительный интервал таков: $(\overline{x} - 0,98, \overline{x} + 0,98)$. Например, если $\overline{x} = 4,1$ то доверительный интервал имеет вид: $3,12 < a < 5,08$.

II. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов.

Доверительным интервалом, покрывающим неизвестный параметр a с заданной надежностью γ, является интервал

$$\left(\overline{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $\overline{x}$ – выборочная средняя, s – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, n – объём выборки. Значение t_γ находится по таблице значений распределения Стьюдента по заданным n, γ и не зависит от неизвестных параметров a и σ, что является его большим достоинством.

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объёма $n = 16$ найдены выборочная средняя $\overline{x} = 20,2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

Решение.

Найдем t_γ. Пользуясь таблицей значений распределения Стьюдента, по $\gamma = 0,95$ и $n = 16$ находим $t_\gamma = 2,13$.

Найдем доверительные границы:

$$\overline{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 20,2 - \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 19,774; \quad \overline{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 20,2 - \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} = 20,626.$$

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр a заключен в доверительном интервале:

$$19,774 < a < 20,626.$$

III. Оценка истинного значения измеряемой величины.

Пусть производится n независимых равноточных измерений некоторой физической величины, истинное значение a которой неизвестно. Будем рассматривать результаты отдельных измерений как случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$. Эти величины независимы, имеют одно и то же математическое ожидание a (истинное значение измеряемой величины), одинаковые дисперсии σ^2 (измерения равноточные) и распределены нормально (такое допущение подтверждается опытом). Таким образом, все предположения, которые были сделаны в двух предыдущих пунктах, выполняются, и, следовательно, мы вправе использовать полученные в них формулы. Поскольку обычно a неизвестно, следует пользоваться формулами, приведенными во втором пункте.

Пример. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\overline{x} = 42,319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 5$. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью 0,95.

Решение.

Истинное значение измеряемой величины равно её математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания при неизвестном σ при помощи доверительного интервала

$$\overline{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},$$

покрывающего a с заданной надежностью $\gamma = 0,95$.

Пользуясь таблицей значений распределения Стьюдента, по $\gamma = 0,95$ и $n = 9$ находим $t_\gamma = 2,31$.

Найдем точность оценки:

$$\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{2,31 \cdot 5}{\sqrt{9}} = 3,85.$$

Таким образом, истинное значение измеряемой величины заключено в доверительном интервале:

$$38,469 < a < 46,169.$$

IV. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое отклонение σ по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s.

Доверительным интервалом, покрывающим неизвестный параметр σ с заданной надежностью γ, является интервал:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q).$$

Здесь $q < 1$ и для его отыскания используются таблица значений $q(\gamma, n)$.

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объёма $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0,8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,999.

Решение.

По таблице по данным $\gamma = 0,999$ и $n = 25$ находим $q = 0,73$.

Искомый доверительный интервал таков:

$$0,216 < a < 1,384.$$

Замечание. Если $q > 1$, то доверительный интервал примет вид:

$$0 < \sigma < s(1+q).$$

Для отыскания значений q в этом случае также используются таблица значений $q(\gamma, n)$.

V. Оценка точности измерений.

В теории ошибок принято точность измерений характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений. Для оценки σ используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение *s*. Поскольку обычно результаты измерений взаимно независимы, имеют одно и то же математическое ожидание и одинаковую дисперсию, то теория, изложенная в предыдущем пункте, применима для оценки точности измерений.

§ 1.9 Статистические гипотезы

После обработки выборки и построения её различных оценок об исследуемом признаке генеральной совокупности можно высказывать различные предположения или ***статистические гипотезы***.

Статистические гипотезы принято классифицировать на:

параметрические – когда делают предположения о параметрах закона распределения, которому подчиняется исследуемый признак;

непараметрические – когда делают предположения о самом признаке.

Наряду с выдвинутой гипотезой также рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза.

Определение. ***Нулевой (основной)*** называют выдвинутую гипотезу H_0.

Определение. ***Конкурирующей (альтернативной)*** называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание a нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза в частности, может состоять в предположении, что $a \neq 10$. Коротко это записывают так: $H_0 : a = 10$, $H_1 : a \neq 10$.

Также принято различать гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

Определение. ***Простой*** называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Определение. ***Сложной*** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т.е. могут быть допущены ошибки двух родов:

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными.

§ 1.10 Статистический критерий проверки нулевой гипотезы

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно.

Определение. ***Статистическим критерием*** называют случайную величину K, которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное значение критерия.

Определение. ***Наблюдаемым значением*** $K_{\text{набл}}$ называют значение критерия, вычисленное по выборкам.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое – при которых она принимается.

<u>Определение.</u> ***Критической областью*** называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

<u>Определение.</u> ***Областью принятия гипотезы*** называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

Так как критерий одномерная случайная величина, то все её возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область принятия гипотезы также являются интервалами и, следовательно, существуют точки, которые их разделяют.

<u>Определение.</u> ***Критическими точками*** $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

<u>Определение.</u> ***Правосторонней*** называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ – положительное число. (Рисунок)

<u>Определение.</u> ***Левосторонней*** называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ – отрицательное число. (Рисунок)

Правостороннюю или левостороннюю критическую область также называют ***односторонней***.

<u>Определение.</u> ***Двусторонней*** называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

Найдём правостороннюю критическую область, которая определяется неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$. Для отыскания правосторонней критической области достаточно найти критическую точку. Для её нахождения задаются достаточной малой вероятностью – уровнем значимости α. Затем ищут критическую точку $k_{кр}$, исходя из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P\left(K > k_{кр}\right) = \alpha.$$

<u>Замечание 1.</u> Когда критическая точка уже найдена, вычисляют по данным выборок наблюденное значение критерия и, если окажется, что $K_{\text{набл}} > k_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают; если же $K_{\text{набл}} < k_{\text{кр}}$ то нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу.

Замечание 2. Даже если нулевая гипотеза принята, то ошибочно думать, что тем самым она доказана. Известно, что один пример, подтверждающий справедливость некоторого общего утверждения, еще не доказывает его. Поэтому более правильно говорить «данные наблюдений согласуются с нулевой гипотезой и, следовательно, не дают оснований ее отвергнуть».

Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей также сводится к нахождению соответствующих критических точек.

Левосторонняя критическая область определяется неравенством $K < k_{\text{кр}}$, где $k_{\text{кр}} < 0$. Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий примет значение, меньшее $k_{\text{кр}}$, была равна принятому уровню значимости:

$$P\left(K < k_{\text{кр}}\right) = \alpha.$$

Двусторонняя критическая область определяется неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$ Критические точки находят исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение, меньшее k_1 или большее k_2 была равна принятому уровню значимости:

$$P\left(K < k_1\right) + P\left(K > k_2\right) = \alpha.$$

Ясно, что критические точки могут быть выбраны бесчисленным множеством способов. Для каждого критерия имеются соответствующие таблицы, по которым и находят критическую точку, удовлетворяющую заданным требованиям.

Все рассмотренные выше критические области были построены исходя из требования, чтобы вероятность попадания в неё критерия была равна a при условии, что нулевая гипотеза справедлива. Однако целесообразнее ввести в рассмотрение вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что нулевая гипотеза неверна и, следовательно, справедлива конкурирующая.

Определение. ***Мощностью критерия*** называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза.

Если уровень значимости выбран, то критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Выполнение этого требования должно обеспечить минимальную ошибку второго рода.

Замечание 3. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода состоит в увеличении объёма выборок.

§ 1.11 Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Пусть закон распределения генеральной совокупности неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид, например A. В этом случае необходимо проверить нулевую гипотезу вида: генеральная совокупность распределена по закону A.

Проверка гипотезы о законе распределения производится при помощи специально подобранной случайной величины – критерия согласия.

Определение. ***Критерием согласия*** называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

Имеется несколько критериев согласия: χ^2–Пирсона, λ–Колмогорова и др. Рассмотрим применение критерия Пирсона к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. С этой целью будем сравнивать эмпирические (наблюдаемые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты.

Пусть по выборке объёма n получено эмпирическое распределение:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_s
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_s

Допустим, что в предположении нормального распределения вычислены теоретические частоты n_i'. При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}. \qquad (*)$$

Доказано, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины (*)независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Поэтому случайная величина (*) обозначена через χ^2, а сам критерий называют критерием согласия «хи квадрат».

Число степеней свободы находят по равенству $k = s - r - 1$, где s – число групп (частичных интервалов выборки), r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому

$$k = s - 2 - 1 = s - 3.$$

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $\chi^2_{\text{набл}}$ и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.

Правило. Для того чтобы при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально, надо сначала вычислить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости и числу степеней свободы найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Замечание. Объём выборки должен быть достаточно велик (не менее 50). Каждая группа должна содержать не менее 5 вариант; малочисленные группы следует объединять в одну, суммируя частоты.

Для нахождения теоретических частот можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Весь интервал наблюдаемых значений разбить на s частичных интервалов одинаковой длины. Найти середины частичных интервалов. В качестве частоты интервала принять число вариант, которые попали в этот интервал.

2. Вычислить выборочную среднюю $\overline{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B.

3. Пронормировать концы интервалов наблюдаемых значений по формуле $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma_B}$, причем наименьшее значение полагают равным $-\infty$, а наибольшее полагают равным $+\infty$.

4. Вычислить теоретические вероятности p_i попадания в интервалы (x_i, x_{i+1}) по формуле $p_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$, где $\Phi(u)$ – функция Лапласа.

5. Найти искомые теоретические частоты $n_i' = np_i$.

Все вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения, обычно сводят в таблицу.

§ 1.12 Проверка гипотезы о дисперсии случайной величины, имеющей нормальное распределение

Пусть генеральная совокупность распределена нормально, причем генеральная дисперсия неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому значению σ_0^2.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия s^2 с $k = n-1$ степенями свободы. Требуется по исправленной дисперсии при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральная дисперсия рассматриваемой совокупности равна гипотетическому значению σ_0^2.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимается величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

<u>Правило 1.</u> Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n-1$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

<u>Правило 2.</u> Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ и по таблице найти левую критическую точку $\chi^2_{\text{лев.кр}}\left(1-\frac{\alpha}{2}, k\right)$ и правую критическую точку $\chi^2_{\text{прав.кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k\right)$.

Если $\chi^2_{\text{лев.кр}} < \chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{прав.кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{лев.кр}}$ или $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{прав.кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

Правило 3. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ и по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n-1$ найти критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(1-\alpha, k)$.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

§ 1.13 Проверка гипотезы о математическом ожидании случайной величины, имеющей нормальное распределение

Пусть генеральная совокупность распределена нормально, причем генеральная средняя a неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому значению a_0. Предположим, что дисперсия генеральной совокупности σ_B известна.

Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0$ о равенстве генеральной средней нормальной совокупности с известной дисперсией гипотетическому значению a_0 при конкурирующей гипотезе $H_1 : a \neq a_0$, надо вычислить наблюдаемое значение U-критерия:

$$U_{\text{набл}} = \frac{(\overline{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma_B}$$

и по таблице функции Лапласа найти критическую точку двусторонней критической области по равенству

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Если $\left|U_{\text{набл}}\right| < U_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу принимают. Если $\left|U_{\text{набл}}\right| > U_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную.

<u>**Правило 2.**</u> При конкурирующей гипотезе $H_1 : a > a_0$ критическую точку правосторонней критической области находят по равенству

$$\Phi\left(U_{\text{кр}}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}.$$

Если $U_{\text{набл}} < U_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу принимают. Если $U_{\text{набл}} > U_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную.

<u>**Правило 3.**</u> При конкурирующей гипотезе $H_1 : a < a_0$ сначала находят критическую точку $U_{\text{кр}}$ по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области $U'_{\text{кр}} = -U_{\text{кр}}$.

Если $U_{\text{набл}} > -U_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу принимают. Если $U_{\text{набл}} < -U_{\text{кр}}$, то нулевую гипотезу отвергают и принимают альтернативную.