ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения всех специальностей

Ряды

Могилев 2007

УДК 571.52
ББК 22.1
В 93

Рекомендовано к опубликованию
учебно-методическим управлением
ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «08» мая 2007 г., протокол № 7

Составители: ст. преподаватель Т. И. Червякова;
ассистент А. Н. Бондарев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. Л. В. Плетнёв

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения всех специальностей. В работе изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения задач, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы по теме «Ряды».

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	Л. В. Плетнёв
Технический редактор	А. А. Подошевко
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать 7.09.2007 . Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл.-печ. л. 1.86 . Уч.-изд. л. 1.7 . Тираж 165 экз. Заказ № 651.

Издатель и полиграфическое исполнение
Государственное учреждение высшего профессионального образования
«Белорусско-Российский университет»
ЛИ № 02330/375 от 29.06.2004 г.
212005, г. Могилёв, пр. Мира, 43

Содержание

1 Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов

1.1 Теоретическая часть

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (1.1)$$

где $u_n \in$ ☼ называется *числовым рядом*. Числа u_1, u_2, …, u_n, … называются членами ряда, число u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, … , $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ называются *частичными суммами*, а S_n – *n*-й частичной суммой ряда.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (1.1) называется *сходящимся*, а S – его суммой. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд (1.1) называется *расходящимся*.

Сумма $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$ называется *n-м остатком ряда*.

Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = 0$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

К достаточным признакам сходимости рядов относят следующие признаки.

Признак сравнения. Если $0 < u_n \le v_n$ (для всех *n* или начиная с некоторого номера *n*), то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Предельный признак сравнения. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A$ ($A = const$, $A > 0$), то два ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Д'Аламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Признак Коши. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ ряд расходится.

Два последних признака не дают ответа о сходимости ряда в тех случаях, когда $l = 1$.

Интегральный признак Коши. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ таковы, что $u_n = f(n)\ \ \forall n \in \mathrm{N}$, где $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на $[1; +\infty)$ функция, то ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

В качестве рядов для сравнения применяют следующие «эталонные» ряды:

1) геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \text{сходится при } |q| < 1; \\ \text{расходится при } |q| \ge 1; \end{cases}$$

2) обобщённый гармонический ряд или ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1; \\ \text{расходится при } \alpha \le 1. \end{cases}$$

1.2 Образцы решения примеров

1.2.1 *Пример*. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

Решение

Запишем n-ю частичную сумму ряда и преобразуем её:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то данный ряд сходится и его сумма $S = 1$.

1.2.2 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$.

Решение

Применим следствие из необходимого признака: если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$, то ряд расходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \ne 0.$$

Значит, ряд расходится.

1.2.3 *Пример*. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,3^n}$.

Решение

Сравним n-й член ряда $u_n = \frac{1}{n\,3^n}$ с n-м членом ряда $v_n = \frac{1}{3^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ является геометрическим рядом, у которого $q = \frac{1}{3} < 1$, а значит, он сходится. Так как $\frac{1}{n\,3^n} < \frac{1}{3^n}$ ($\forall n \geq 2$), то по признаку сравнения данный ряд сходится.

1.2.4 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Решение

Сравним n-й член ряда $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$ с n-м членом гармонического ряда (расходящегося) $v_n = \frac{1}{n}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} > \frac{1}{n}$ ($\forall n \geq 2$), то по признаку сравнения данный ряд расходится.

1.2.5 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$.

Решение

Применим признак Д’Аламбера.

$$u_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}; \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

1.2.6 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{6n-1} \right)^n$.

Решение

Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{6n-1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{6n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{6 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{6} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

1.2.7 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

Решение

Пусть функция $f(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Эта функция удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши.

Найдём несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^b=-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится, а значит, данный ряд также сходится.

1.3 Примеры для самостоятельной работы

1.3.1 Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{4}$.

1.3.2 Исследовать на сходимость ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n+2)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; и) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

1.4 Домашнее задание

1.4.1 Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$ и найти его сумму.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

1.4.2 Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2+4\right)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\ n!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^{2n}$.

2 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов

2.1 Теоретическая часть

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *знакопеременным*, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из абсолютных величин членов ряда, сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то он называется *условно сходящимся*.

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, но из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Ряд вида $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots$ называется *знакочередующимся*.

Признак Лейбница. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ таковы, что $u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд сходится, причём его сумма $0<S\le u_1$.

Следствие. Остаток $r_n=(-1)^n\left(u_{n+1}-u_{n+2}+\ldots\right)$ всегда удовлетворяет условию $|r_n|\le u_{n+1}$.

2.2 Образцы решения примеров

2.2.1 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение

Так как модули членов данного знакочередующегося ряда монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=0$, то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=2\neq 0\cdot$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ расходится, следовательно, исходный ряд сходится условно.

2.2.2 *Пример*. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$-3+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{3}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right)+\ldots\ .$$

Решение

Данный ряд не является знакочередующимся, следовательно, нельзя применить признак Лейбница. Рассмотрим ряд из модулей его членов:

$$3+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{5^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right|.$$

Сравним этот ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n^2}$ (ряд Дирихле, $\alpha=2>1$).

$$\frac{1}{n^2}\left|(-1)^n-2\sin\frac{\pi n}{2}\right|\leq\frac{3}{n^2}\qquad\forall n\in\mathrm{N}.$$

Следовательно, ряд из модулей сходится, а значит, исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

2.2.3 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{3}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots\ .$$

Решение

Составим ряд из модулей членов исходного ряда:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ .$$

Этот ряд сходится, как ряд Дирихле ($\alpha = 2 > 1$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

2.2.4 *Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^2}{3n^2+n}$.

Решение

Имеем знакочередующийся ряд. Второе условие признака Лейбница здесь не выполняется:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Так как необходимое условие сходимости ряда не выполняется, то данный ряд расходится.

2.2.4 *Пример*. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2\,2^n}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение

Данный ряд – знакочередующийся и сходящийся, поэтому величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит по модулю первого отброшенного члена (по следствию из признака Лейбница). Нужное число членов *n* найдём путём подбора из неравенства $\dfrac{1}{n^2\,2^n}<0{,}001$.

При $n = 6$ неравенство выполняется. Значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Сумма ряда при этом будет равна:

$$S\approx S_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{72}-\frac{1}{256}+\frac{1}{800}=0{,}449\,.$$

2.3 Примеры для самостоятельной работы

2.3.1 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\,2^{-n}$; в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2-9}$;

г) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n+5}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi n}{n^2+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

2.3.2 Сколько первых членов ряда достаточно взять, чтобы сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем 10^{-6}:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

Ответ: а) $n=10^3$; б) $n=10^6$.

2.4 Домашнее задание

2.4.1 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{3n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)\,3^n}$.

2.4.2 Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(0,7)^n}{(n-1)!}$, ограничившись его первыми тремя членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений.

Ответ: $S=0,38$; $\varepsilon=0,04$.

3 Функциональные и степенные ряды

3.1 Теоретическая часть

Пусть функции $u_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$ определены в области D_x. Выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

называется *функциональным рядом*.

Функциональный ряд называется *сходящимся в точке* $x = x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Множество значений *x*, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости функционального ряда*. Обозначим её D_s, причём $D_s \subset D_x$.

Если $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ – *n*-я частичная сумма, то его *n*-й остаток будет равен:

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots \, .$$

В области сходимости ряда $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, а $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Функциональный ряд называется мажорируемым в области *D*, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ $(\alpha_n > 0)$ такой, что $\forall x \in D$ справедливы неравенства $|u_k(x)| \le \alpha_k$ ($k = 1, 2, \ldots$).

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*, x_0 – фиксированное число. При $x_0 = 0$ имеем ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема Абеля.

1 Если степенной ряд сходится при некотором значении $x = x_1 \ne 0$, то он абсолютно сходится при всех *x*, удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$.

2 Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при всех *x*, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$.

Неотрицательное число R, такое, что при всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при всех $|x| > R$ – расходится, называется *радиусом сходимости ряда*.

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости ряда*.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

если указанные пределы существуют.

3.2 Образцы решения примеров

3.2.1 *Пример*. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение

Данный ряд является суммой геометрической прогрессии с $q = \ln x$. Такой ряд сходится, если $|q| = |\ln x| < 1$, т. е. при $-1 < \ln x < 1$. Поэтому областью сходимости исследуемого ряда является интервал $D_s : \frac{1}{e} < x < e$. Так как $D_x : x > 0$, то $D_s \subset D_x$.

3.2.2 *Пример*. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n \sqrt{n}}$.

Решение

$$a_n = \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}}; \qquad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n+1}}.$$

Найдём радиус сходимости.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 3^{n+1} \sqrt{n+1}}{2^{n+1} 3^n \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Степенной ряд сходится в интервале $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

При $x = -\frac{3}{2}$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. По признаку Лейбница он сходится.

При $x = \frac{3}{2}$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Данный ряд расходится, как ряд Дирихле ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Таким образом, областью сходимости является промежуток $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

3.2.3 *Пример*. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение

Найдём радиус сходимости.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty .$$

Таким образом, ряд сходится на всей числовой прямой.

3.3 Примеры для самостоятельной работы

3.3.1 Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n\sqrt{(n+1)^3}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$; е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}}$.

Ответ: а) $-2\le x<2$; б) $-2<x<2$; в) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$; г) $-\frac{3}{4}\le x\le\frac{3}{4}$; д) $-6\le x<2$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.4 Домашнее задание

3.4.1 Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{7^{n-1}x^n}{5^n\sqrt{n^2-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{5^n\sqrt{n^3-0,5}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^{n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\,4^n}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,24^{n+1}}$.

Ответ: а) $-\frac{5}{7}\le x<\frac{5}{7}$; б) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{11}{2}$; в) $-\frac{1}{10}<x<\frac{1}{10}$; г) $-7<x<-3$; д) $1\le x<5$.

4 Разложение функций в степенные ряды

4.1 Теоретическая часть

Если функция $y = f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ с областью сходимости D_s, т. е. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $\forall x \in D_s$, то этот ряд является её *рядом Тейлора* в точке x_0:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$ называется *рядом Маклорена* и имеет вид:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Если функция $f(x)$ имеет в некоторой δ-окрестности точки x_0 производные всех порядков, причём $\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$ $(M = const)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in (x_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$, то функция $f(x)$ в этой окрестности разложима в ряд Тейлора.

При разложении многих функций в степенные ряды часто применяются основные (табличные) разложения:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty;\, +\infty); \qquad (4.1)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty;\, +\infty); \qquad (4.2)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty;\, +\infty); \qquad (4.3)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \forall x \in (-1;\, 1); \qquad (4.4)$$

$$(1+x)^m = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n =$$

$$= 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...\ \forall x\in(-1;1); \qquad (4.5)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...\ \forall x\in(-1;1]; \qquad (4.6)$$

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...\ \forall x\in[-1;1]. \qquad (4.7)$$

4.2 Образцы решения примеров

4.2.1 *Пример*. Разложить по степеням разности $(x-1)$ функцию $y=x^4-3x^2+2x+2$.

Решение

Воспользуемся формулой Тейлора при $x_0=1$. Вначале найдём следующие значения:

$$y(1)=2;$$

$$y'(1)=\left.(4x^3-6x+2)\right|_{x=1}=0;$$

$$y''(1)=\left.(12x^2-6)\right|_{x=1}=6;$$

$$y'''(1)=\left.24x\right|_{x=1}=24;$$

$$y^{\mathrm{IV}}(1)=24;$$

$$y^{\mathrm{V}}(1)=0.$$

Таким образом, получаем:

$$x^4-3x^2+2x+2=2+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4=$$

$$=2+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4.$$

4.2.2 *Пример*. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\cos x$ по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

$f(x)=\cos x;$ $\qquad$ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right);$ $\qquad$ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$f''(x)=-\cos x=\cos\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right);$ $\qquad$ $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right);$ $\qquad$ $f'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$f^{\mathrm{IV}}(x)=\cos x=\cos\left(x+4\cdot\dfrac{\pi}{2}\right);$ $\qquad$ $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

.... $\qquad$ ....

$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right);$ $\qquad$ $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2},$

$n=0,1,\ldots$.

Таким образом, получаем:

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n+\ldots\right).$$

Найдем область сходимости полученного ряда.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n=1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Значит, ряд сходится $\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

4.2.3 *Пример*. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Решение

Разложим функцию на сумму простейших дробей.

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(|x|<1),$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2^n\,x^n\quad(|2x|<1),$$

то
$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2^n\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\,2^{n+1}\right)x^n .$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ сходится при $|x|<1$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2^n\,x^n$ – при $|x|<\dfrac{1}{2}$, то полученный ряд сходится к данной функции при $|x|<\dfrac{1}{2}$.

4.2.4 *Пример*. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin\dfrac{2x^4}{3}$.

Решение

Применим разложение (4.2), заменив x на $\dfrac{2x^4}{3}$. Получим:

$$\sin\frac{2x^4}{3}=\frac{2x^4}{3}-\frac{2^3\,x^{12}}{3^3\cdot 3!}+\frac{2^5\,x^{20}}{3^5\cdot 5!}-...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2^{2n-1}\,x^{8n-4}}{3^{2n-1}\,(2n-1)!}.$$

4.3 Примеры для самостоятельной работы

4.3.1 Разложить многочлен $f(x)=x^5-4x^4+2x^3+2x+1$ в ряд по степеням $(x+1)$.

4.3.2 Разложить в ряд по степеням x функцию $y=\dfrac{1}{x+1}$, используя ряд Маклорена.

4.3.3 Разложить в ряд по степеням x функцию и найти область сходимости полученного ряда:

а) e^{-x^2}; б) $x\cos 2x$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; г) $\cos^2 x$;

д) $\ln(1-3x)$; е) $x\sin 2x$; ж) $x^3\operatorname{arctg}x^2$; з) $\sin^2 3x$.

4.3.4 Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$:

а) e^{3x}; б) $\ln(5x+3)$.

4.4 Домашнее задание

4.4.1 Разложить функцию в ряд Тейлора:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ по степеням $(x-3)$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ по степеням $(x-2)$.

4.4.1 Разложить функцию в ряд Маклорена:

а) $\cos 5x$; б) $x^3 \operatorname{arctg} x$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$.

5 Степенные ряды в приближённых вычислениях

5.1 Теоретическая часть

5.1.1 *Приближённое вычисление логарифмов.*

Для приближённого вычисления логарифмов удобна формула

$$\ln(N+1) = \ln N + \frac{2}{2N+1} + \frac{2}{3(2N+1)^3} + \frac{2}{5(2N+1)^5} + \ldots, \tag{5.1}$$

где N – натуральное число.

5.1.2 *Приближённое вычисление корней.*

Вычисление корней производится с помощью биномиального ряда:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (|x|<1). \tag{5.2}$$

5.1.3 *Вычисление интегралов.*

Так как степенные ряды сходятся равномерно на любом отрезке, лежащем внутри их интервалов сходимости, то с помощью разложений функций в степенные ряды можно находить неопределённые интегралы в виде степенных рядов и приближённо вычислять соответствующие определённые интегралы.

5.1.4 *Приближённое решение дифференциальных уравнений.*

В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение не удаётся, его решение удобно искать в виде степенного ряда. При решении задачи Коши вида

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0 \tag{5.3}$$

используется ряд Тейлора $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а остальные производные находят путём последовательного дифференцирования уравнения (5.3) и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

5.2 Образцы решения примеров

5.2.1 *Пример*. Найти приближённое значение $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

Решение

Полагая в формуле (5.1) $N=1$, имеем:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\dots\right).$$

За приближённое значение $\ln 2$ принимаем сумму первых пяти членов разложения. Погрешность вычисления будет равна величине отброшенного остаточного члена:

$$r_n = 2\left(\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\dots\right) < \frac{2}{11\cdot 3^{11}}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\dots\right) =$$

$$= \frac{2}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{44\cdot 3^9} < 0,000002\,.$$

Таким образом, имеем:

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}\right) \approx$$

$$\approx 0,666667+0,024691+0,001646+0,000131+0,000011 = 0,693146\,;$$

$$\ln 2 = 0,69315 \pm 0,00001.$$

5.2.2 *Пример*. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $\varepsilon = 0,0001$.

Решение

$$\sqrt[3]{130} = \left(5^3+5\right)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1+\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!\cdot 5^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!\cdot 5^5}+\dots =$$

$$= 5+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{3^2\cdot 5^3}+\frac{1}{3^4\cdot 5^4}-\dots\,.$$

Начиная с четвёртого члена, отбрасываем все остальные члены, так как $\dfrac{1}{3^4\cdot 5^4} < 0,0001$. Поэтому

$$\sqrt[3]{130} = 5+0,0667-0,0009 = 5,0658\,.$$

5.2.3 *Пример*. Вычислить $\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение

Применим формулу (4.2), заменив в ней x на x^2:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots .$$

Данный ряд сходится на всей числовой прямой, поэтому его можно почленно интегрировать. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \sin x^2\, dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \ldots \approx$$

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} \approx 0{,}3333 - 0{,}0381 = 0{,}295.$$

Все члены разложения, начиная с третьего, отброшены, так как они меньше $\varepsilon = 10^{-3}$.

5.2.4 *Пример*. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 1$.

Решение

Из условия следует, что $y'(1) = 1 + 1 = 2$.

Дифференцируем исходное уравнение.

$y'' = 2x + 2y\,y'$; $\qquad y''(1) = 6$;

$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2y\,y''$; $\qquad y'''(1) = 22$;

$y^{\mathrm{IV}} = 4y'\,y'' + 2y'\,y'' + 2y\,y'''$; $\qquad y^{\mathrm{IV}}(1) = 116$ и т. д.

Таким образом, получаем:

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6(x-1)^2}{2} + \frac{22(x-1)^3}{6} + \frac{116(x-1)^4}{24} + \ldots =$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots .$$

5.3 Примеры для самостоятельной работы

5.3.1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon = 0,001$:

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\sqrt[3]{10}$; в) $\cos 10°$; г) $\sqrt[10]{1027}$; д) $\ln\frac{3}{2}$.

Ответ: а) $1,396$; б) $2,154$; в) $0,985$; г) $2,001$; д) $0,406$.

5.3.2 Вычислить определённые интегралы с точностью $\varepsilon = 0,001$:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$; в) $\int\limits_1^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$.

Ответ: а) $0,508$; б) $0,764$; в) $4,855$; г) $0,245$.

5.3.3 Записать первые пять ненулевых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения:

а) $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$; б) $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$;

в) $y'' = x^2 y - y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.4 Домашнее задание

5.4.1 С помощью степенных рядов вычислить с точностью $\varepsilon = 0,001$:

а) $\sqrt[3]{70}$; б) $\ln 5$; в) $\sqrt[6]{738}$; г) $\cos 2°$.

Ответ: а) $4,121$; б) $1,609$; в) $3,006$; г) $0,999$.

5.4.2 Вычислить $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x}dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Ответ: $0,946$.

5.4.3 Найти первых три ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 - y^3$, если $y(1) = 1$.

6 Ряды Фурье

6.1 Теоретическая часть

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$, называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ с периодом $T=2\pi$.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T=2\pi$, кусочно-монотонная и ограниченная на $\left[-\pi;\pi\right]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности. В точках разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа от точки разрыва.

Если $f(x)$ чётная функция, то разложение принимает вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\,dx$;

$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$;

$b_n=0$.

Если $f(x)$ нечётная функция, то разложение принимает вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где $a_0=0$;

$a_n=0$;

$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

Для функции с любым периодом $T=2l$ разложение в ряд Фурье и формулы для коэффициентов Фурье будут следующими:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx;\qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx;\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

Если $f(x)$ чётная функция, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,dx;\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx;\qquad b_n=0.$$

Если $f(x)$ нечётная функция, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l};$$

$$a_0=0;\qquad a_n=0;\qquad b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

6.2 Образцы решения примеров

6.2.1 *Пример*. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π :

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } -\pi\le x<0;\\ x, & \text{при }\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

Решение

Так как функция является кусочно-монотонной и ограниченной, то она разлагается в ряд Фурье. Найдём коэффициенты ряда.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\left[\begin{gathered}u=x,\ du=dx;\\ dv=\cos nx\,dx,\ v=\frac{1}{n}\sin nx.\end{gathered}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi+\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x,\ du = dx; \\ dv = \sin nx\,dx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx. \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, получаем:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\right).$$

Этот ряд сходится к заданной функции с $T = 2\pi$ при всех $x \neq (2n-1)\pi$. В точках $x = (2n-1)\pi$ сумма ряда равна $\frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2}$. График функции изображён на рисунке 1.

6.2.2 *Пример*. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, где $-\pi < x \leq \pi$.

Решение

Период $T = 2\pi$, функция чётная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

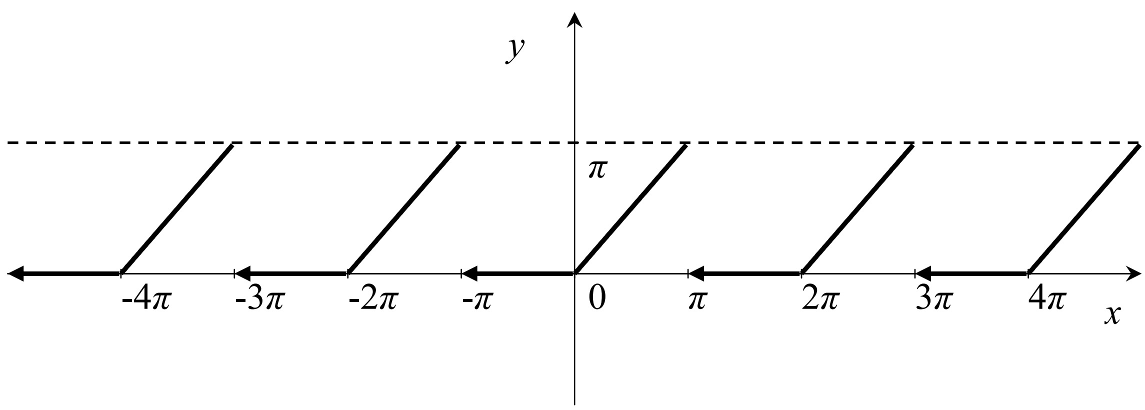

Рисунок 1

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{bmatrix} u = x,\ du = dx; \\ dv = \cos nx\,dx,\ v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin nx\,dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четном;} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases}$$

$$b_n = 0.$$

Таким образом, получаем:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \ldots \right).$$

6.2.3 *Пример*. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{при } -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{при } x = \pi. \end{cases}$$

Решение

Функция нечётная, разрывная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

$$a_0 = a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin nx\,dx = \begin{bmatrix} u = \dfrac{x}{2},\ du = \dfrac{1}{2}\,dx; \\ dv = \sin nx\,dx,\ v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2n}\cos nx\,dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi + \frac{1}{2n^2}\sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Таким образом, получаем:

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx + \ldots\ .$$

6.2.4 *Пример*. Найти разложение в ряд Фурье функции:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{при } -2<x<0;\\ 2, & \text{при } \ 0\le x\le 2.\end{cases}$$

Решение

Функция имеет период $T=4$, разрывная и удовлетворяет условиям теоремы о разложимости, следовательно, её можно разложить в ряд Фурье.

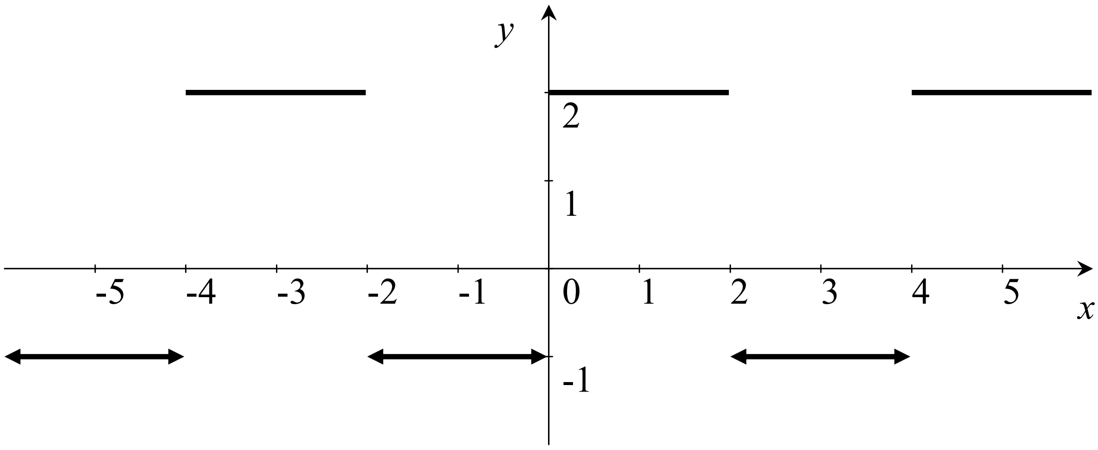

Рисунок 2

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}2\,dx=-\frac{1}{2}x\Big|_{-2}^{0}+x\Big|_{0}^{2}=-\frac{1}{2}(0+2)+2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}2\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{-2}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{2}=\frac{2}{\pi n}(\sin\pi n-\sin 0)=0\,;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}2\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=-\frac{3}{\pi n}\left((-1)^n-1\right);$$

Таким образом, получаем:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

6.3 Примеры для самостоятельной работы

6.3.1 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } -\pi<x<0;\\ x+1, & \text{при } \ 0\le x<\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=2x-3$ на $[-\pi;\pi]$;

в) $f(x)=\begin{cases}5-x, & \text{при } -\pi\le x\le 0;\\ 0, & \text{при } \ 0<x\le\pi.\end{cases}$

6.3.2 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π:

а) $f(x)=x^3$ на $[-\pi;\pi]$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ на $(-\pi;\pi]$.

6.3.3 Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l$:

а) $f(x)=|x|-5$ на $(-2;2)$; б) $f(x)=5x-1$ на $(-5;5)$;

в) $f(x)=x^2-x$ на $[-1;1)$; г) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{при } -3\le x<0;\\ 0, & \text{при } \ 0\le x<3.\end{cases}$

6.4 Домашнее задание

6.4.1 Разложить функцию в ряд Фурье:

а) $f(x)=5x+2$ на $[-\pi;\pi]$; б) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } -\pi\le x<0;\\ 4-2x, & \text{при } \ 0\le x\le\pi;\end{cases}$;

в) $f(x)=2x$ на $(-1;1)$; г) $f(x)=2x-3$ на $(-3;3)$;

д) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{при } -1\le x<0;\\ x, & \text{при } \ 0\le x\le 1.\end{cases}$

Список литературы

1 Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие : в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – 6-е изд. – М. : ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003.

2 Высшая математика. Общий курс : учебник / А. И. Яблонский [и др.] ; под общ. ред. С. А. Самаля. – 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 2000.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика : учебник / А. А. Гусак. – 4-е изд., стер. – Минск : ТетраСистемс, 2003.

4 Индивидуальные задания по высшей математике. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учеб. пособие / Под ред. А. П. Рябушко. – 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 2004.

5 Ряды и интегралы. Векторный и комплексный анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Операционное исчисление : сб. задач по высшей математике / Под ред. С. Н. Федина – М. : Айрис-пресс, 2004.

6 Сборник задач по курсу высшей математики : учеб. пособие для вузов / Под ред. Г. И. Кручковича. – 3-е изд. перераб. – М. : Высш. шк., 1973.

7 Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов. Ч. 2 : Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986.

8 **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Шипачев. – 7-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2005.