Ляпин Али Ибрагимович, доцент БРУ

**Тема:** Электростатическое поле в вакууме.

Основу электростатики составляют инвариантность электрического заряда к выбору системы отсчета, закон сохранения заряда, закон Кулона, принцип суперпозиции полей и теорема Остроградского-Гаусса.

1. Закон сохранения электрического заряда. $\sum Q_i = const$

Закон Кулона $\vec{F} = k \cdot \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$

2. Электрическое поле. Основные характеристики электрического поля.

2.1. Напряженность электрического поля. $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{Q_o}$, $\vec{E} = k \cdot \dfrac{Q}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$

2.2 Работа перемещения электрического заряда в электростатическом поле. $A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} Q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля $\oint_L \vec{E}_{эл.стат} \cdot d\vec{l} = 0$

2.3 Потенциал и разность потенциалов.

$$\varphi(r) = \frac{A_\infty}{Q_o} = \frac{U(r)}{Q_o}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

2.4 Напряженность как градиент потенциала. $\vec{E} = -\left( \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$

3. Принцип суперпозиции полей. Расчет электростатических полей с помощью принципа суперпозиции $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$; $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$

**1. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона.**

*Электрический заряд – это свойство тела, которое проявляется в электромагнитном взаимодействии.* Одновременно электрический заряд – это *физическая скалярная величина*, которая определяет интенсивность электромагнитного взаимодействия. Единицей измерения электрического заряда в СИ является 1Кл (Кулон).

Экспериментально было установлено, что электрический заряд любого тела кратен элементарному заряду, равному $1{,}6\cdot 10^{-19}$Кл. В природе существуют два рода электрических зарядов – положительные и отрицательные. В телах носителем элементарного отрицательного заряда является электрон, а положительного – протон.

Обычно частицы, несущие заряды разных знаков, присутствуют в теле в равных количествах и распределены в нем с одинаковой плотностью. Поэтому алгебраическая сумма зарядов в любом элементарном объеме *незаряженного* тела равна нулю – тело электрически нейтрально. Если некоторый отрицательный заряд перенести (например, трением) от одного электрически нейтрального тела к другому, то появившийся на первом теле положительный заряд в точности будет равен перенесенному отрицательному заряду. В этом проявляется закон сохранения электрического заряда:

*Алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.*

*Система зарядов называется электрически изолированной если не происходит переноса заряда через поверхность, ограничивающую эту системы.*

Закон сохранения электрического заряда связан с инвариантностью его значения относительно выбора системы отсчета. (Значение заряда не зависит от его скорости. Справедливость такого утверждения можно показать на примере переходов электрона между энергетическими уровнями в атоме. Такие переходы сопровождаются изменением скорости электрона, но при этом изменение заряда атома не наблюдается.)

Обычно тела являются электрически нейтральными. Чтобы зарядить тело ему сообщают избыточный заряд. В электричестве используется модель заряженного тела, которая называется – точечный заряд.

*Точечным зарядом* называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. (Размеры взаимодействующих тел пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними).

Закон Кулона.

В 1785г. французским ученым Ш. Кулоном, с помощью крутильных весов, был установлен закон взаимодействия неподвижных точечных зарядов в вакууме (закон Кулона):

*Сила взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов $Q_1$ и $Q_2$, расположенных в вакууме, прямо пропорциональна произведению значений зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль прямой, проходящей через центры зарядов.*

Математическая формула закона Кулона имеет следующий вид:

в векторной форме

$$\vec{F} = k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \quad (1)$$

в скалярной форме

$$F = k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2} \quad (2),$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор, соединяющий заряды ($|\vec{r}| = r$);

$k = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ м/Ф – коэффициент пропорциональности;

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$Ф/м - электрическая постоянная в системе СИ;

Сила Кулона является *центральной силой* и соответствует притяжению (F<0) в случае разноименных зарядов и отталкиванию (F>0) в случае одноименных зарядов.

## **2. Электрическое поле. Основные характеристики электрического поля**.

2.1 Напряженность электростатического поля

В соответствии с концепцией поля, любой электрический заряд $Q$ создает в окружающем его пространстве электростатическое поле. Если другой заряд $Q_0$ поместить в это поле, то на него будет действовать сила $F$. Если теперь величину силы $F$ разделить на величину заряда $Q_0$, то получится новая *физическая векторная величина* $E$, которая будет являться характеристикой поля. Полученная величина E называется напряженностью электростатического поля.

Математическая формула для напряженности поля $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{Q_o}$ (3).

Размерность напряженности – $\left[E\right] = \dfrac{H}{Кл}$, единица измерения – $\dfrac{1H}{1Кл} = 1\dfrac{B}{м}$ (вольт на метр).

$1\dfrac{B}{м}$ это напряженность такого поля, в котором на заряд в 1Кл действует сила 1Н.

(Здесь следует отметить, что чем меньше линейные размеры и величина заряда $Q_0$, тем меньше он будет искажать поле и тем точнее будет измеряемое значение напряженности).

Из формулы (3) следует физический смысл напряженности: *напряженность* $\vec{E}$ *электростатического поля в некоторой точке пространства* ***численно равна силе***, *действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку.*

Т.о. напряженность $\vec{E}$ является ***силовой*** *характеристикой* электростатического поля.

Если поле создано точечным зарядом $Q$, то формулу для напряженности этого поля можно получить из формул (1) и (2) закона Кулона приняв один из зарядов за $Q_o$ а другой – за $Q$.

Формула для напряженности $\vec{E}$ электростатического поля *точечного заряда*

в векторной форме

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (4)$$

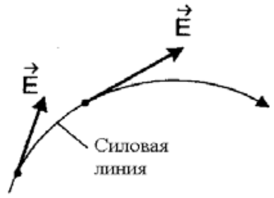
в скалярной форме

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (5)$$

В общем случае, если задана напряженность $\vec{E}$ электростатического поля в некоторой точке пространства, то сила, действующая на заряд $Q_0$ в этой точке, будет равна

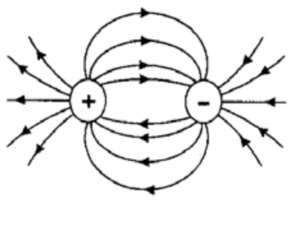
$$\vec{F} = Q_0 \cdot \vec{E} \quad (6).$$

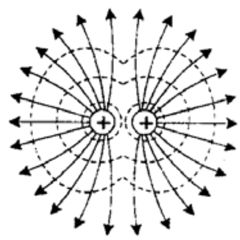
Графически электрическое поле изображается с помощью линий напряженности, называемых силовыми линиями. При этом касательные к силовым линиям в каждой точке поля совпадают с направлением вектора $\vec{E}$ в этой точке, а густота линий соответствует численному значению напряженности.




*Однородным* называется поле, напряженность которого не изменяется ни по величине, ни по направлению. В однородном поле силовые линии параллельны вектору $\vec{E}$ .

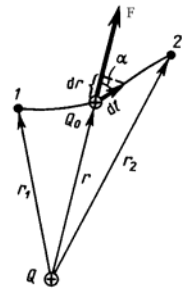
Из формул (4) и (5) следует, что силовые линии электрического поля положительного заряда направлены от заряда, а силовые линии поля отрицательного заряда направлены к заряду. В общем случае силовые линии электростатического поля могут начинаться и заканчиваться на электрических зарядах, или начинаться на заряде и уходить в бесконечность.



## 2.2 Работа перемещения электрического заряда в электростатическом поле. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

Пусть имеется поле с напряженностью *E*. Если в это поле поместить заряд $Q_0$, то на него со стороны поля будет действовать сила $F=Q_0 \cdot E$. Под действием этой силы заряд $Q_0$ будет перемещаться, т.е. сила *F* будет совершать работу по перемещению заряда. Найдем выражение для работы по перемещению заряда из точки 1 с радиус вектором $r_1$ в точку 2 с радиус вектором $r_2$.




В данном случае имеет место механическое движение. Поэтому можно использовать из механики общую формулу для работы силы *F* по перемещению тела из положения 1 в положение 2

$$A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ (7) \text{ или } A_{1-2} = \int_{1}^{2} F \cdot dl \cdot Cos\alpha \ , (8)$$

где $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ и $dA = F \cdot dl \cdot Cos\alpha$ – работа на элементарном перемещении *dr* и *dl*.
Подставив в формулу (7) вместо *F* силу $Q_0 \cdot E$, действующую на заряд в электрическом поле, получим формулу для расчета работы по перемещению заряда $Q_0$

$$A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} Q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} \ (9) \text{ или для единичного заряда } A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \ (10)$$

Если электрическое поле создано *точечным зарядом Q*, то в формулу (9) вместо *E* необходимо подставить напряженность поля точечного заряда, которая определяется формулами (4) или (5). Тогда получим формулу для *работы по перемещению заряда $Q_0$ в поле точечного заряда Q*

$$A_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} Q_0 \cdot \frac{k \cdot Q}{r^2} \cdot dr = Q_0 \cdot k \cdot Q \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = Q_0 \cdot k \cdot Q \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \ (11)$$

Из полученной формулы видно, что работа $A_{1-2}$ определяется только положением заряда $Q_0$.
При перемещении заряда $Q_0$ из положения 1 в положение 2 по любой траектории будет совершаться одна и та же работа, определяемая формулой (11). Т.е. *работа в электростатическом поле не зависит от вида траектории, а определяется начальным и конечным положениями заряда*.
В механике было показано, что таким свойством обладает *потенциальное поле*. Также было доказано, что в потенциальном поле работа равна нулю при перемещении тела по замкнутой траектории (по контуру). Следовательно, *электростатическое поле является потенциальным и в электростатическом поле работа равна нулю при перемещении заряда по замкнутой траектории (по контуру).* С учетом этого можно записать

$$A = \oint_L Q_0 \cdot E \cdot dl = 0 \ (12) \text{ или для единичного заряда } \oint_L \vec{E}_{эл.стат} \cdot d\vec{l} = 0 \ , (13)$$

где знак $\oint_L$ означает интегрирование по замкнутому контуру *L, dl* – элемент контура *L*.

Интеграл в формуле (13) называется *циркуляцией вектора напряженности по контуру L*. Таким образом, ***циркуляция*** *вектора напряженности* ***электростатического*** *поля по любому* ***замкнутому*** *контуру равна нулю*. Это является следствием того, что силовые линии электростатического поля не замкнуты и не пересекаются.
В случае одноименных зарядов величина работы по их сближению отрицательна, а при удалении – положительна. В случае разноименных зарядов, наоборот, величина работы при их сближении положительна, а по удалению – отрицательна.

**2.3 Потенциал и разность потенциалов.**

В механике было показано, что в потенциальном поле работа сил поля по перемещению тела равна убыли его потенциальной энергии. Исходя из этого формулу (11) можно записать в виде $A_{1-2} = Q_0 \cdot \dfrac{k \cdot Q}{r_1} - Q_0 \cdot \dfrac{k \cdot Q}{r_2} = U(r_1) - U(r_2)$ (14),

где $U(r_1) = Q_0 \cdot \dfrac{k \cdot Q}{r_1}$ (15) и $U(r_2) = Q_0 \cdot \dfrac{k \cdot Q}{r_2}$ (16) – потенциальные энергии заряда $Q_0$ на соответствующих расстояниях $r_1$ и $r_2$ от заряда $Q$.

Полагая в формуле (14), что заряд $Q_0$ перемещается из точки с радиус вектором $r_1$ в бесконечность ($r_2 \to \infty$ ,$U(r_2)$ =0), получим, что потенциальная энергия заряда $Q_0$ в данной точке равна работе $A_\infty$ по его перемещению из этой точки в бесконечность $A_\infty = U(r)$.

Если теперь левую и правую части последнего равенства разделить на величину заряда $Q_0$, то получится новая *физическая скалярная величина* $\varphi$, которая является характеристикой поля (созданного другим зарядом). Полученная величина $\varphi$ называется потенциалом электростатического поля.

Математическая формула для потенциала поля $\varphi(r) = \dfrac{A_\infty}{Q_o} = \dfrac{U(r)}{Q_o}$ (17).

Размерность потенциала– $[\varphi] = \dfrac{Дж}{Кл}$, единица измерения – $\dfrac{1Дж}{1Кл} = 1В$

За единицу потенциала 1В принимается потенциал такой точки электростатического поля, для перемещения в которую заряда 1Кл нужно совершить работу в 1Дж.

Из формулы (17) следует физический смысл потенциала: *потенциал электростатического поля в некоторой точке численно равен работе* $A_\infty$ *по перемещению единичного положительного точечного заряда из этой точки в бесконечность.*

В то же время *потенциал электростатического поля* в данной точке равен *потенциальной энергии единичного положительного точечного заряда, помещенного в эту точку.*

Потенциал поля точечного заряда определяется формулой

$$\varphi = \frac{k \cdot Q}{r} \quad (18)$$

С учетом новой введенной величины $\varphi$ формулу (14) можно записать в следующем виде

$$A_{1-2} = Q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (19)$$

и работу $A_{1-2}$ определить как работу *по перемещению электрического заряда* $Q_0$ из точки электростатического поля с потенциалом $\varphi_1$ в точку с потенциалом $\varphi_2$. Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$ называется *разностью потенциалов* точек 1 и 2 поля.

Если работу $A_{1-2}$ в формуле (19) поделить на величину заряда, то получим, что *разность потенциалов* численно равна работе по *перемещению единичного точечного положительного заряда* из точки электростатического поля с потенциалом $\varphi_1$ в точку с потенциалом $\varphi_2$.

Так как работа по перемещению единичного положительного заряда определяется формулой (10), то для разности потенциалов можно записать

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (20).$$

Следует иметь в виду, что если работа по перемещению электрического заряда совершается кулоновской силой (со стороны поля), то потенциальная энергия заряда уменьшается. Т.е. изменение его потенциальной энергии отрицательно

$$A = -\Delta U \quad (21).$$

2.4 Напряженность как градиент потенциала.

Работу $dA$ на элементарном перемещении $dx = x_2 - x_1$ заряда $Q_0$ можно определить через напряженность поля по формуле $dA=Q_0 \cdot E_x \cdot dx$ и через разность потенциалов $d\varphi$ между точками $x_2$ и $x_1$ по формуле $dA=-Q_0 \cdot d\varphi$. Здесь $E_x$ – проекция вектора напряженности поля на ось $x$. Приравняв правые части последних формул, получим формулу, связывающую напряженность поля в некоторой точке с потенциалом

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \quad \text{или более точно,} \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (22),$$

где $\frac{\partial}{\partial x}$ означает частную производную по координате (или *градиент*).

В общем (трехмерном) случае напряженность и потенциал электростатического поля связаны следующим выражением

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\vec{k}\right) \quad (23)$$

или в символической форме $\vec{E} = -\overline{grad}\varphi$, где $\overline{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$ .

Таким образом, *напряженность в некоторой точке электростатического поля равна градиенту потенциала со знаком минус*.

3. Принцип суперпозиции полей. Расчет электростатических полей с помощью принципа суперпозиции.

Опыт показывает, что для электростатического поля справедлив *принцип суперпозиции*: *напряженность E в некоторой точке электростатического поля, созданного системой N электрических точечных зарядов, равна* ***векторной*** *сумме напряженностей полей $E_i$, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности*

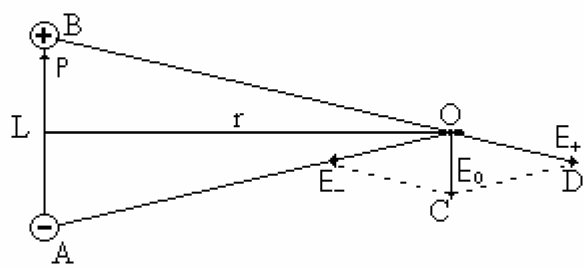
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \quad (24).$$

Соответственно для потенциала $\varphi$ поля, созданного системой электрических точечных зарядов: *потенциал $\varphi$ в некоторой точке электростатического поля, созданного системой N электрических точечных зарядов*, *равен* ***алгебраической*** *сумме потенциалов $\varphi_i$ полей*, *создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \quad (25).$$

В данном случае нужно учитывать поля, как свободных, так и связанных (индуцированных) зарядов, о которых речь пойдет позже.

В качестве примера применения принципа суперпозиции рассмотрим электрическое поле, созданное системой из двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов $+Q$ и $-Q$, расположенных друг от друга на расстоянии $L$.




Приведенная система зарядов называется *электрическим диполем*. Прямая, проходящая через центры зарядов, называется осью диполя, а вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному, и равный расстоянию между зарядами называется *плечом диполя*.

Найдем напряженность поля, создаваемого электрическим диполем в точке $O$ на некотором расстоянии $r$ на перпендикуляре к середине его плеча. По определению (точечные заряды), расстояние $r$ во много раз превосходит расстояние $L$. При этом точка $O$ равноотстоит от обоих зарядов, поэтому $\left|\vec{E}_-\right| = \left|\vec{E}_+\right| = \dfrac{k\cdot Q}{r^2 + L^2/4} \approx \dfrac{k\cdot Q}{r^2}$ (26)

Из подобия треугольников ОАВ и ОСD следует, что $\dfrac{E_O}{E_+} = \dfrac{L}{\sqrt{r^2 + \left(L/2\right)^2}} \approx \dfrac{L}{r}$, откуда получим $E_O = E_+ \cdot \dfrac{L}{r}$. С учетом формулы (26) получим окончательно выражение для *напряженности поля электрического диполя в точке O*

$$E_O = \frac{k\cdot Q\cdot L}{r^3} \quad (27).$$

Из формулы (27) видно, что напряженность поля электрического диполя определяется не величиной заряда, а произведением величины заряда $Q$ и плеча диполя $L$. Произведение величины заряда $Q$ и плеча диполя $\vec{L}$ называется *электрическим моментом диполя*

$$\vec{p}_e = |Q|\cdot\vec{L} \quad (28).$$

С учетом формулы (28) напряженность поля диполя можно выразить через электрический момент диполя

$$\vec{E}_O = -\frac{k\cdot\vec{p}_e}{r^3} \quad (29)$$

*Вектор $\vec{E}_O$ направлен противоположно вектору электрического момента диполя.*

Потенциал $\varphi_0$ поля электрического диполя в точке $O$ равен нулю т.к. заряды разноименные и равноотстоят от этой точки.

Можно показать, что в произвольной точке поля его напряженность $E$ и потенциал $\varphi$ определяются следующими формулами

$$E = \frac{k\cdot p_e}{r^3}\cdot\sqrt{1 + 3\cdot Cos^2\alpha} \quad (30) \qquad\qquad \varphi = \frac{k\cdot p_e\cdot Cos\alpha}{r^2} \quad (31),$$

где $\alpha$ – угол между плечом диполя и направлением на рассматриваемую точку.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Что такое электрический заряд?
2. Для каких электрических зарядов применим закон Кулона?
3. Что такое напряженность поля? В чем состоит физический смысл напряженности электрического поля? Какой характеристикой поля является его напряженность? Каковы размерность и единица измерения напряженности?
4. Какой формулой определяется сила, действующая на заряд в поле с напряженностью $E$?
5. Какой формулой определяется работа кулоновской силы по перемещению электрического заряда? От чего зависит величина работы?
6. Что такое потенциал поля? В чем состоит физический смысл потенциала электрического поля? Какой характеристикой поля является его потенциал? Каковы размерность и единица измерения потенциала?
7. Как связаны между собой напряженность и потенциал электростатического поля?

**Тема: Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в вакууме.**

1. Поток вектора напряженности.

$$\Phi_E = \int_0^S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

2. Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в вакууме.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} Q_i$$

3. Применение Теорема Остроградского-Гаусса для расчета полей.

3.1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

3.2. Поле между двумя бесконечными, параллельными, разноименно заряженными плоскостями.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

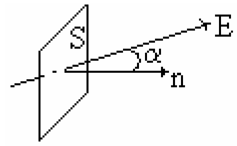
3.3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности.

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \text{( для } r \geq R \text{)}$$

Расчет электростатических полей с помощью принципа суперпозиции представляет собой довольно сложную задачу. Особенно если речь идет о большом числе зарядов, распределенных в некоторой среде. Поэтому для практических расчетов электрических полей разработан целый ряд вспомогательных методов и приемов. Ниже будет рассмотрен один из простых, но важных методов расчета электрических полей, основанный на применении теоремы Остроградского-Гаусса.

Прежде чем рассмотреть теорему Остроградского-Гаусса введем понятие *потока вектора напряженности*.

### 1. Поток вектора напряженности.




Рассмотрим *однородное* электростатическое поле с напряженностью $E$. Поместим в это поле плоскую площадку площадью $S$. Ориентацию площадки в пространстве зададим единичным вектором $\vec{n}$ (*нормалью*), перпендикулярным к плоскости площадки.

*Потоком вектора $\vec{E}$ однородного поля через плоскую площадку S называется скалярная физическая величина, равная произведению модуля вектора $\vec{E}$, площади S и Cosα*

$$\Phi_E = E \cdot S \cdot Cos\alpha \ (1) \qquad \text{или} \qquad \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S \ (2),$$

где $\alpha$– угол между вектором $\vec{E}$ напряженности поля и нормалью $\vec{n}$ к поверхности.

Поток вектора $\vec{E}$ через площадку $S$ численно равен числу силовых линий, пересекающих эту площадку.

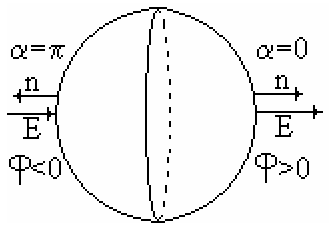
В случае *неоднородного* поля и поверхности *S любой формы* выбирают элемент $dS$ поверхности таких малых размеров, что его можно считать плоским, а поле в его окрестности – однородным. Тогда поток через этот элемент $dS$ (*элементарный поток*) равен

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \ (3),$$

а полный поток через поверхность $S$ вычисляется интегрированием выражения (3) по всей поверхности

$$\Phi_E = \int_0^S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \ (4)$$

Из формулы (1) видно, что значение потока может быть как *положительным* (при $\alpha$<90$^0$), так и *отрицательным* (при $\alpha$>90$^0$).

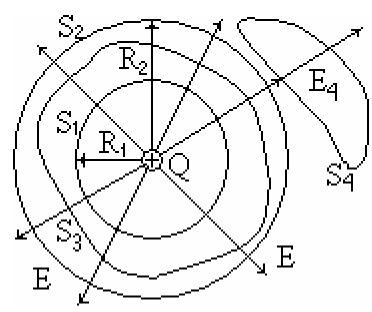



При вычислении потока через любую *замкнутую* поверхность за *положительное* направление нормали обычно принимается направление *наружу*. Тогда силовые линии, *выходящие* из объема, ограниченного этой поверхностью, создают *положительный* поток, а входящие в объем создают отрицательный поток.

Поток через замкнутую поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \ (5)$$

### 2. Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в вакууме.




Вычислим по формуле (5) поток вектора $\vec{E}$ электрического поля точечного заряда $Q$ через сферическую поверхность $S_1$ радиуса $R_1$, охватывающую этот заряд. Для простоты расчетов заряд поместим в центр сферы. Тогда в любой точке поверхности $S_1$ напряженность $\vec{E}$ поля будет совпадать по направлению с нормалью ($\vec{E} \cdot \vec{n}$=$E$) и иметь одинаковое значение, определяемое формулой $E = k \cdot \frac{Q}{R_1^2}$ (6), где $k = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0}$, $\varepsilon_o$– электрическая постоянная. Вынесем *E*, как постоянную величину, за знак интеграла и формулу (5) запишем в виде

$$\varPhi_E = E \cdot \oint\limits_{S_1} dS \text{ (7).}$$

Интеграл $\oint\limits_{S_1} dS$ дает площадь поверхности сферы $\oint\limits_{S_1} dS = S_1 = 4\pi \cdot R_1^2$ (8). Подставив формулы (6) и (8) в формулу (7) получим для потока вектора напряженности через поверхность $S_1$

$$\varPhi_E(S_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ (9).}$$

Из формулы (9) видно, что *значение потока не зависит от расстояния*. Это означает, что поток через сферическую поверхность $S_2$ большего радиуса $R_2$ также определится формулой (9). Если выбрать замкнутую поверхность $S_3$ произвольной формы (но охватывающую заряд Q), то вследствие непрерывности силовых линий получим тот же результат.
Таким образом, поток вектора *E* через некоторую замкнутую поверхность, охватывающую заряд, не зависит ни от формы, ни от размеров этой поверхности.
Если выбрать замкнутую поверхность $S_4$, не охватывающую заряд *Q*, то каждая силовая линия (например, $E_4$) будет входить в объем, ограниченный поверхностью, и выходить из него. Поток вектора *E* через такую поверхность будет равен нулю.
Если рассматриваемая поверхность охватывает несколько зарядов, то с учетом принципа суперпозиции правая часть формулы (9) будет представлять алгебраическую сумму этих зарядов. В случае *N* числа зарядов формула (9) запишется в виде

$$\oint\limits_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} Q_i \text{ (10)}$$

Если электрические заряды распределены в некотором объеме *V*, то формула (10) записывается в виде

$$\oint\limits_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_0^V \rho \cdot dV \text{, (11)}$$

где $\rho$– объемная плотность заряда, $dV$– элемент объема.
Формула (10) и формула (11) представляют собой математические формулы теоремы Остроградского-Гаусса для электрического поля в вакууме.

*Поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на электрическую постоянную.*
Если поверхность *не охватывает заряд*, то *значение потока* через такую поверхность *равно нулю*.

Прежде чем приступить к рассмотрению примеров расчета электростатических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса введем понятия объемной, поверхностной и линейной плотности заряда.

Если заряд рассредоточен по объему тела, то его распределение характеризуется *объемной плотностью* $\rho$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \text{ (12) } [\rho] = \frac{Кл}{м^3},$$

где $dQ$– величина заряда, распределившегося в элементе $dV$ объема *V*.
В случае равномерного распределения заряда по объему $\rho = \frac{Q}{V}$ (13).

Если заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое заряженного тела, то его распределение характеризуется *поверхностной плотностью* $\sigma$

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \ (14) \ \left[\sigma\right] = \frac{Кл}{м^2},$$

где $dQ$– величина заряда, распределившегося на элементе $dS$ поверхности $S$.

В случае равномерного распределения заряда по поверхности $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ (15).

Если заряд расположен на линии, то его распределение характеризуется *линейной плотностью* $\tau$

$$\tau = \frac{dQ}{dl} \ (16) \ \left[\tau\right] = \frac{Кл}{м},$$

где $dQ$– величина заряда, распределившегося на элементе $dl$ линии $L$.

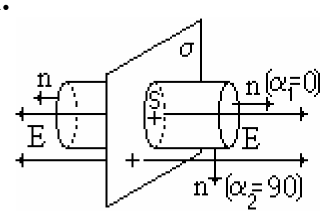
В случае равномерного распределения заряда по линии $\tau = \dfrac{Q}{L}$ (17).

3. Применение Теорема Остроградского-Гаусса для расчета полей.

Выше было получено, что значение потока вектора $E$ через замкнутую поверхность не зависит ни от размеров, ни от формы поверхности. Поэтому при расчетах следует выбирать поверхность такой формы, которая позволяет наиболее просто вычислить поток.

**3.1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.**

В случае заряженной плоскости в качестве замкнутой поверхности (гауссовой поверхности) удобнее выбрать прямой цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости и основаниями $S_{осн}$, параллельными ей. Поток через цилиндрическую поверхность можно выразить как сумму потока через боковую поверхность $S_{бок}$ и потока через основания $S_{осн}$




$$\Phi_E = E \cdot S_{бок} \cdot Cos\alpha_2 + E \cdot 2 \cdot S_{осн} \cdot Cos\alpha_1 \ (18).$$

Так как $\alpha_2$=90°, а $\alpha_1$=0, то поток через боковую поверхность равен нулю и полный поток через цилиндрическую поверхность равен

$$\Phi_E = E \cdot 2 \cdot S_{осн} \ (19).$$

По теореме Остроградского-Гаусса поток вектора $E$ равен заряду $Q=\sigma \cdot S$, охватываемому выбранной замкнутой поверхностью, деленному на электрическую постоянную

$$\Phi_E = E \cdot 2 \cdot S_{осн} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что цилиндр прямой ($S_{осн}=S$), получим формулу для напряженности поля по обе стороны бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma$

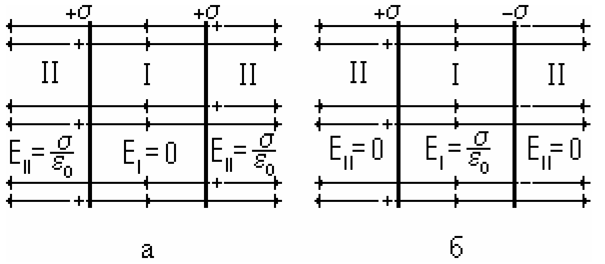
$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \ (20)$$

Из формулы (20) видно, что напряженность электрического поля бесконечной плоскости не зависят от расстояния. Следовательно, *электрическое поле бесконечной плоскости является однородным.*

В случае заряженной плоскости конечных размеров $L$ формула (20) будет справедлива только для тех точек поля, которые находятся на расстояниях $r \ll L$ от поверхности и достаточно удалены от ее краев.

**3.2. Поле двух бесконечных, параллельных, равномерно заряженных плоскостей.**

Рассмотрим две бесконечные, параллельные плоскости, заряженные равномерно с поверхностной плотностью $\sigma$. Каждая из плоскостей создает по обе стороны от себя поле с напряженностью $E$, которая определяется формулой (20). Результат наложения этих полей в области *I*, ограниченной плоскостями и в области *II*, вне плоскостей, зависит от знаков и величин зарядов на плоскостях. На рисунке показаны параллельные плоскости, заряженные с одинаковой поверхностной плотностью $\sigma$ одноименных зарядов (а) и разноименных зарядов (б).

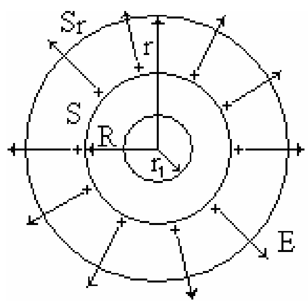



Силовые линии поля положительно заряженных плоскостей направлены в обе стороны от каждой плоскости. Силовые же линии отрицательно заряженной плоскости направлены к плоскости. Поэтому в случае одноименно заряженных плоскостей (рис. а) электростатическое поле между ними отсутствует. В случае же разноименно заряженных плоскостей (рис. б) поле сосредоточено между ними. Таким образом, напряженность поля между двумя бесконечными, параллельными плоскостями, заряженными разноименными зарядами с одинаковой поверхностной плотностью $\sigma$ определяется формулой

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (21).$$

**3.3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности.**

Рассмотрим сферическую поверхность *S* радиуса *R*, несущую заряд *Q* равномерно распределенный на ней с поверхностной плотностью $\sigma$. Так как заряд распределен по поверхности равномерно и силовые линии поля перпендикулярны ей, то они (силовые линии) будут направлены по радиальным прямым.




В рассматриваемом случае в качестве замкнутой поверхности (гауссовой поверхности) удобнее выбрать сферическую поверхность, имеющую общий центр с заряженной сферой.

Если выбрать любую поверхность с радиусом *r*, меньшим *R* (например, $r_1<R$), то такая поверхность не будет охватывать заряд. Следовательно, поток через нее будет равен нулю. Поэтому и напряженность электростатического поля внутри заряженной сферы равен нулю.

Любая поверхность $S_r$ с радиусом $r$ большим, чем *R*, будет охватывать заряд *Q*, распределенный на поверхности рассматриваемой сферы. По теореме Остроградского-Гаусса поток $4\pi \cdot r^2 \cdot E$ через поверхность $S_r$ будет равен заряду *Q*, деленному на $\varepsilon_o$

$$4\pi \cdot r^2 \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (22).$$

Из последней формулы получим *формулу для напряженности поля заряженной сферы*

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (23) \text{ (для } r \geq R\text{)}.$$

Сравнивая полученную формулу (23) с формулой (6) для напряженности поля точечного заряда, можно заключить, что напряженность поля заряженной сферы (при $r \geq R$) уменьшается по такому же закону, как у точечного заряда.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Что называется потоком вектора? Каков физический смысл потока вектора? Какой формулой вычисляется в общем случае поток вектора *E*?
2. Как формулируется теорема Остроградского-Гаусса? Какой вид имеет математическая формула теоремы?
3. Исходя из каких соображений выбирается «гауссова поверхность» при расчетах электрических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса?

**Тема: Диэлектрики в электростатическом поле.**

1. Свободные и связанные заряды. Полярные и неполярные молекулы. Поляризуемость молекулы.

$$\beta = 4\pi \cdot r^3$$

2. Типы диэлектриков. Деформационная и ориентационная поляризации диэлектриков. Поляризационные заряды. Поляризованность.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

3. Диэлектрическая восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры.

$$\chi_{н.пол} = n \cdot \beta\ ,\ \chi_{пол} = \frac{n \cdot p_e^2}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot k \cdot T}$$

## 1. Свободные и связанные заряды. Полярные и неполярные молекулы. Поляризуемость молекулы.

В веществе, находящемся в любом агрегатном состоянии, различают два вида электрических зарядов: свободные и связанные заряды.

*Свободными называются электрические заряды, не входящие в состав молекул.*

*Связанными называются электрические заряды, входящие в состав молекул.*

Под действием силы внешнего электрического поля *свободные заряды* могут перемещаться *по всему объему вещества*, а *связанные заряды* могут перемещаться лишь *в пределах молекулы*.

Свободные и связанные заряды создают свое электрическое поле. Поэтому если вещество внести во внешнее поле, то *электрическое поле в веществе* будет представлять собой *результат суперпозиции* внешнего поля и поля указанных зарядов.

Вещества в зависимости от числа свободных зарядов, делятся на проводники и диэлектрики. Проводниками называются вещества с большим ($\sim 10^{28}\,м^{-3}$) числом свободных зарядов. *Диэлектриками называются вещества с пренебрежимо малым числом свободных зарядов.* Так как в диэлектриках нет свободных зарядов, то их электрические свойства определяются связанными зарядами.

В зависимости от строения молекул их делят на неполярные и полярные.

*Неполярными называются молекулы, в которых «центры тяжести» разноименных зарядов совпадают в отсутствие внешнего электрического поля* ($H_2$, $N_2$, $O_2$ и др.)

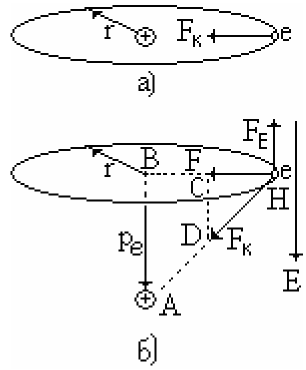
Неполярная молекула не обладает собственным электрическим дипольным моментом в отсутствие внешнего электрического поля

$$p_e = Q \cdot l = 0\,,$$

где $l$=0 – расстояние между центрами тяжести разноименных зарядов (плечо диполя).

В то же время если неполярную молекулу поместить во внешнее электрическое поле, то под действием возникающей силы разноименные заряды сместятся друг относительно друга. В результате этого их центры тяжести сместятся, и у неполярной молекулы возникнет электрический дипольный момент, который называется *индуцированным*.

Рассмотрим возникновение индуцированного дипольного момента на примере атома водорода. Пусть электрон в атоме движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса $r$. В отсутствие внешнего электрического поля (рис. *а*) центры «тяжести» ядра и электрона совпадают, на электрон действует только сила кулоновского притяжения со стороны ядра $F_K = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r^2}$ (1), где $e$ и $r$ – заряд электрона и радиус его орбиты. Если включить внешнее электрическое поле, центры «тяжести» ядра и электрона сместятся.




Для простоты направим вектор $\vec{E}$ внешнего поля перпендикулярно плоскости орбиты электрона и будем считать, что деформация электронной орбиты заключается в ее смещении относительно ядра (рис. *б*). Величина смещения *AB* будет численно равна плечу $l$ возникшего диполя. Величину *AB* найдем из следующих соображений.

В рассматриваемом случае электрон будет двигаться под действием силы $F$, являющейся результирующей сил $F_E$ и $F_k$. Из подобия треугольников ABH и DCH следует, что $\dfrac{AB}{r} = \dfrac{F_E}{F}$.

Из последней формулы выразим *AB*

$$l = AB = \frac{F_E}{F} \cdot r\,. \quad (2)$$

Расчеты показывают, что даже при очень больших значениях напряженности поля (Е=$10^8$В/м) значение $l$ составляем порядка $10^{-13}$м, т.е. $l<<r$. Поэтому можно принять силу F, равной кулоновской силе, определяемой формулой (1). Подставив в формулу (2) величины $F_E = e \cdot E$ и $F = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$, получим для плеча $l$ диполя $l = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3}{e} \cdot E$. Умножив величину плеча на заряд электрона, получим формулу для индуцированного дипольного момента

$$p_e = 4\pi \cdot r^3 \cdot \varepsilon_0 \cdot E \quad (3)$$

Величина $\beta = 4\pi \cdot r^3$ (4) называется *поляризуемостью молекулы*.

Так как направление вектора индуцированного дипольного момента совпадает с направлением вектора $E$, то формулу (3) с учетом формулы (4) можно записать в виде

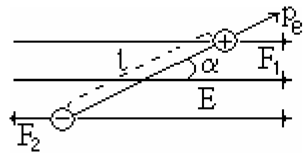
$$\vec{p}_e = \beta \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (5)$$

Таким образом, *во внешнем электрическом поле в неполярной молекуле возникает, обусловленный деформацией электронной орбиты, индуцированный дипольный момент, пропорциональный напряженности внешнего поля и совпадающий с ним по направлению*.

*Полярными называются молекулы, в которых «центры тяжести» разноименных зарядов не совпадают в отсутствие внешнего электрического поля* ($H_2O$, CO и др).

*Полярная молекула обладает собственным электрическим дипольным моментом в отсутствие внешнего электрического поля.*

Во внешнем электрическом поле полярная молекула, так же как и неполярная, деформируется. Однако возникающий индуцированный дипольный момент пренебрежимо мал по сравнению с собственным моментом.




Если полярную молекулу поместить во внешнее электрическое поле, вектор напряженности которого составляет некоторый угол $\alpha$ с направлением дипольного момента молекулы, то на диполь будет действовать пара сил, стремящаяся ориентировать его вдоль поля. Момент этой пары сил равен $M = Q \cdot E \cdot l \cdot Sin\alpha = p \cdot E \cdot Sin\alpha$. (6)

## 2. Типы диэлектриков. Деформационная и ориентационная поляризации диэлектриков. Поляризационные заряды. Поляризованность.

Диэлектрики, состоящие из *неполярных молекул*, называются *неполярными диэлектриками*.

Диэлектрики, состоящие из *полярных молекул*, называются *полярными диэлектриками*.

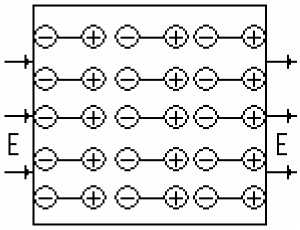
В отсутствие внешнего магнитного поля дипольные моменты молекул *неполярного* диэлектрика равны нулю. Дипольные моменты молекул полярного диэлектрика ориентированы хаотически вследствие их теплового движения. Так, что суммарный дипольный момент сколь угодно малого объема полярного диэлектрика равен нулю.

При внесении диэлектриков обоих типов во внешнее электрическое поле происходит их *поляризация*. *Поляризацией называется явление возникновения в диэлектрике электрического дипольного момента*.

При внесении *неполярного* диэлектрика во внешнее электрическое поле в диэлектрике возникает индуцированный дипольный момент, обусловленный деформацией электронных орбит. Такая поляризация называется *деформационной*.

При внесении *полярного* диэлектрика во внешнее электрическое поле в результате совместного действия двух «противодействующих» факторов (внешнего поля, ориентирующего диполи вдоль силовых линий и теплового движения, препятствующего этому) в диэлектрике возникает *преимущественная ориентация* дипольных моментов молекул. Такая поляризация называется *ориентационной*. При этом суммарный дипольный момент диэлектрика будет тем больше, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура.

Когда диэлектрик не поляризован, объемная и поверхностная плотности *связанных* зарядов равна нулю. В результате поляризации диэлектрика в его тонком поверхностном слое образуется избыток зарядов одного знака, называемых *поляризационными*. У той поверхности, в которую входят силовые линии внешнего поля, возникает избыток отрицательного заряда («отрицательных концов» диполей). У противоположной поверхности возникает избыток положительных зарядов.




Таким образом, при внесении диэлектриков во внешнее электрическое поле в *неполярном* диэлектрике возникает *деформационная поляризация*, а в *полярном* – *ориентационная поляризация.* В результате поляризации возникают *поляризационные (связанные) заряды*.

Количественной мерой поляризации диэлектрика является векторная величина *P*, называемая *поляризованностью*. *Поляризованность выражает электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика и определяется формулой*

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \, , (7)$$

где $p_i$ – электрический дипольный момент $i$-й молекулы, $N$ – число молекул в объеме $\Delta V$. Предполагается, что величина $\Delta V$ достаточно мала и при этом $N >> 1$.

Получим формулу, связывающую поляризованность $P$ с поверхностной плотностью $\sigma$ поляризационных зарядов. Для этого плоскопараллельную пластину из однородного диэлектрика толщиной $d$ и площадью $S$ поместим в однородное электрическое поле. Для простоты положим, что силовые линии поля перпендикулярны плоскости пластины.
В результате поляризации диэлектрика на его противоположных поверхностях возникнут равные по величине, но противоположные по знаку поляризационные заряды +Q и –Q. Умножив поверхностный заряд Q на толщину $d$ пластины, получим электрический дипольный момент всего диэлектрика (пластины)

$$P_{пл} = Q \cdot d \text{ или } P_{пл} = \sigma \cdot S \cdot d \, . (8)$$

С другой стороны, электрический дипольный момент всего диэлектрика (пластины) можно определить как произведение поляризованности $P$ (дипольного момента единицы объема) и объема пластины

$$P_{пл} = P \cdot S \cdot d \, . (9)$$

Сравнивая формулы (8) и (9) получим формулу, связывающую поляризованность $P$ с поверхностной плотностью $\sigma$ поляризационных зарядов

$$P = \sigma \, . (10)$$

### 3. Диэлектрическая восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры.

В случае однородного диэлектрика величина электрического дипольного момента $p_i$ у всех молекул одинакова и формулу (7) можно записать в виде $\vec{P} = n \cdot \vec{p}_i$, где $n$ – число молекул в единице объема (концентрация). Для неполярного диэлектрика электрический дипольный момент молекулы определяется формулой (5), поэтому $\vec{p}_i = \vec{p}_e = \beta \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$. Умножив на величину $n$, получим формулу для *поляризованности неполярного* диэлектрика

$$\vec{P} = n \cdot \beta \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \; (11).$$

Концентрация $n$ молекул и их поляризуемость $\beta$ определяются природой диэлектрика. Произведение концентрации $n$ молекул и поляризуемости $\beta$ молекулы дает новую безразмерную физическую величину $\chi$, называемую *диэлектрической восприимчивостью неполярного диэлектрика*

$$\chi = n \cdot \beta \ (12)$$

С учетом новой величины $\chi$ формула (11) для *поляризованности неполярного* диэлектрика примет следующий вид

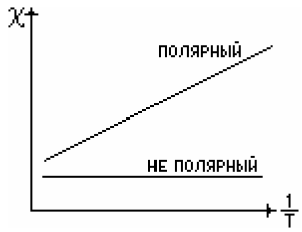
$$\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \ (13).$$

В слабых электрических полях ($E \ll \dfrac{k \cdot T}{p_t}$) формула (13) справедлива как для неполярных, так и полярных диэлектриков. При поляризации *полярных* диэлектриков в таких полях их диэлектрическая восприимчивость определяется формулой

$$\chi = \frac{n \cdot p_e^2}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot k \cdot T}, \ (14)$$

где $p_e$ –среднее значение проекции векторов дипольных моментов молекул на направление вектора $\vec{E}$ напряженности внешнего электрического поля.
Формула (14) получена на основе закона Больцмана для распределения полярных молекул по их потенциальным энергиям в электрическом поле и называется формулой Дебая-Ланжевена.

Из формул (4) и (12) видно, что диэлектрическая восприимчивость *неполярного* диэлектрика *не зависит* от температуры. Тогда как диэлектрическая восприимчивость *полярного* диэлектрика (смотри формулу (14)) убывает обратно пропорционально с ростом температуры. На рисунке приведена качественная зависимость диэлектрической восприимчивости вещества от температуры.




**Вопросы для самопроверки:**

1. В чем состоит отличие между свободными и связанными зарядами? К каким из названных зарядов относятся заряды в вакууме?
2. Чем отличается полярная молекула от неполярной молекулы? Как названные молекулы ведут себя во внешнем электрическом поле?
3. Какие типы диэлектриков существуют?
4. Что понимают под поляризацией диэлектрика? Какие виды поляризации существуют? Что понимают под поляризационными зарядами? К каким из названных выше зарядов относятся поляризационные заряды?
5. В чем состоит физический смысл поляризованности диэлектрика?
6. Какова зависимость диэлектрической восприимчивости вещества от температуры?

**<u>Тема: Расчет электрического поля в диэлектрике</u>**

**1. Поле в диэлектрике. Теорема Остроградского-Гаусса для электрического поля в веществе.** $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS = \sum_{i=1}^{N} Q_{i_{своб}}$

**2. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость вещества.** $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$; $\varepsilon = 1 + \chi$

**3. Условия для *E* и *D* на границе двух диэлектрических сред**. $E_{t_1} = E_{t_2}$;

$$\frac{D_{t_1}}{D_{t_2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$D_{n_1} = D_{n_2};\ \frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

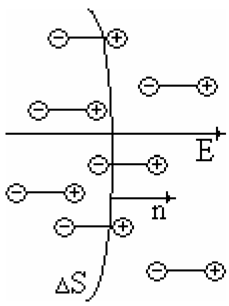
**4. Сегнетоэлектрики.**

**1. Поле в диэлектрике. Теорема Остроградского-Гаусса для электрического поля в веществе.**

Если в электрическое поле, созданное свободными зарядами, поместить диэлектрик, то он поляризуется, и на его поверхностях появятся поляризационные (связанные) заряды, которые создадут свое поле. Таким образом, электрическое поле в диэлектрике будет являться результатом суперпозиции поля связанных зарядов и поля свободных зарядов. Поэтому, для расчетов электрического поля в веществе с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, в ранее полученной теореме необходимо учесть наличие связанных зарядов

$$\oint\limits_S \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} Q_{i_{своб}} + \sum_{i=1}^{N} Q_{i_{связ}}\right). \ (1)$$

Найдем сумму связанных зарядов. Для этого внутри однородного неполярного диэлектрика проведем некоторую замкнутую поверхность *S*. В отсутствие внешнего электрического поля молекулы не поляризованы и сумма зарядов, охватываемых этой поверхностью равна нулю. При включении электрического поля молекулы поляризуются, превращаясь в электрические диполи. При этом те диполи, которые располагаются ближе к поверхности, будут «разрезаться» ею. Так, что суммарный связанный заряд, охватываемый поверхностью, уже не будет равен нулю. На рисунке показан элемент $\Delta S$ замкнутой поверхности *S*.




Для количественных расчетов разобьем поверхность *S* на малые элементы *dS* так, чтобы их можно было считать плоскими, а поле в их окрестности – однородным. Обозначим через $dQ_{связ}$ поляризационный (связанный) заряд, «охватываемый» элементом *dS* поверхности. В предыдущей лекции была получена формула, связывающая поляризационный заряд с поляризованностью *P*

$$P = \sigma_{связ} \ \text{или} \ P = \frac{dQ_{связ}}{dS} \ (2).$$

Учитывая, что поляризованность является вектором, для величины заряда $dQ_{связ}$, охватываемого элементом *dS* можем записать

$$dQ_{связ} = -\vec{P}\cdot\vec{n}\cdot dS. \ (3)$$

Здесь знак минус поставлен потому, что охватываемый заряд отрицательный.

Чтобы определить суммарный связанный заряд, охватываемый замкнутой поверхностью *S*, нужно проинтегрировать выражение (3)

$$\sum_{i=1}^{N} Q_{i_{связ}} = -\oint\limits_S \vec{P}\cdot\vec{n}\cdot dS \ (4)$$

Из полученной формулы видно, что сумма поляризационных зарядов, охватываемых поверхностью *S*, равна потоку вектора поляризованности через эту поверхность.

Подставив формулу (4) в формулу (1), после простых преобразований получим

$$\oint\limits_S \left(\varepsilon_0\cdot\vec{E} + \vec{P}\right)\cdot\vec{n}\cdot dS = \sum_{i=1}^{N} Q_{i_{своб}}. \ (5)$$

Формула (5) является математической формулой теоремы Остроградского-Гаусса для электростатического поля в веществе.

Для удобства вычислений величина, стоящая в скобках формулы (5) обозначается буквой $\vec{D}$ и называется вектором *электрического смещения* или *электрической индукции*

$$\vec{D} = \varepsilon_0\cdot\vec{E} + \vec{P}. \ (6)$$

Подставив формулу (6) в формулу (5) получим более компактную формулу для теоремы Остроградского-Гаусса

$$\oiint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\cdot dS = \sum_{i=1}^{N} Q_{i_{своб}} \quad (7).$$

Определение теоремы Остроградского-Гаусса для электростатического *поля в веществе*: *поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме* ***свободных*** *зарядов, охватываемых этой поверхностью*.

**2. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость вещества.**

Поле вектора *D* электрического смещения графически изображается с помощью линий смещения, также как и поле вектора напряженности *E*. Отличие между линиями *E* и *D* заключается в следующем:

– силовые линии напряженности *E* могут начинаться и заканчиваться как на свободных, так и на связанных зарядах;

– линии электрического смещения *D* могут начинаться и заканчиваться только на свободных зарядах.

Таким образом, электрическое смещение характеризует поле свободных зарядов.

В предыдущей лекции была получена формула для поляризованности

$$\vec{P} = \varepsilon_0\cdot\chi\cdot\vec{E}\,.$$

Подставив последнюю формулу в формулу (6) получим связь между векторами *E* и *D*

$$\vec{D} = \varepsilon_0\cdot(1+\chi)\cdot\vec{E} \quad (8).$$

Безразмерная величина $(1+\chi)$ обозначается символом $\varepsilon$ и называется относительной *диэлектрической проницаемостью среды*

$$\varepsilon=(1+\chi)\ .(9)$$

С учетом новой величины формула (8) примет следующий вид

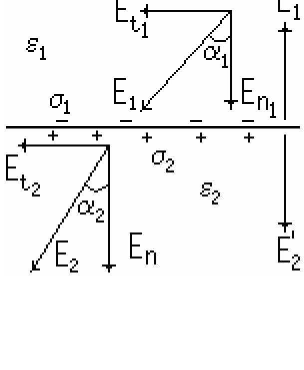
$$\vec{D} = \varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot\vec{E}\,.\ (10)$$

Для вакуума $\chi=0$ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$=1, поэтому $\vec{D} = \varepsilon_0\cdot\vec{E}$ .

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ определяется диэлектрической восприимчивостью $\chi$ вещества, которая количественно характеризует свойство вещества поляризоваться в электрическом поле. Поляризация приводит к возникновению поляризационных зарядов, которые ослабляют электрическое поле в веществе. Поэтому можно дать такой физический смысл диэлектрической проницаемости: *диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз поле ослабляется за счет поляризации диэлектрика*.

**3. Условия для *E* и *D* на границе двух диэлектрических сред.**

Рассмотрим, что происходит с линиями *D* и Е на границе двух однородных, изотропных диэлектриков.




Пусть имеется два диэлектрика с различными проницаемостями $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. При наличии внешнего поля, в каждом из диэлектриков, вблизи поверхности раздела, появятся поляризационные заряды разного знака и с различными поверхностными плотностями $\sigma_1$ и $\sigma_2$. Граница раздела окажется заряженной с поверхностной плотностью ($\sigma_1$-$\sigma_2$). Рассматривая поверхность раздела как бесконечную плоскость, для напряженности создаваемого ею поля можно записать $E' = \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2\cdot\varepsilon_0}$.

Силовые линии *E'* поля поляризационных зарядов перпендикулярны поверхности раздела и по обе стороны от нее имеют противоположные направления. Поэтому поле поляризационных зарядов не будет влиять на тангенциальные $E_t$ составляющие внешнего поля

$$E_{t_1} = E_{t_2} \;.(11)$$

Из формулы (10) следует, что $E_t = \dfrac{D_t}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$. Подставив последнюю формулу в формулу (11), получим условие для тангенциальных составляющих электрического смещения

$$\frac{D_{t_1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t_2}}{\varepsilon_2} \text{ или } \frac{D_{t_2}}{D_{t_1}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \;(12)$$

Условия для нормальных составляющих $E_n$ и $D_n$ получим из следующих соображений.
Электрическое смещение *D* характеризует поле свободных зарядов. Поскольку на границе раздела свободные заряды отсутствуют, то нормальная составляющая электрического смещения не будет испытывать изменений, т.е.

$$D_{n_1} = D_{n_2}. \;(13)$$

Используя формулу (10), получим связь между нормальными составляющими напряженности поля

$$\varepsilon_1 \cdot E_{n_1} = \varepsilon_2 \cdot E_{n_2} \text{ или } \frac{E_{n_2}}{E_{n_1}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.(14)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая вектора $E_t$ и нормальная составляющая вектора $D_n$ не изменяются при переходе границы раздела двух диэлектриков, а нормальная составляющая вектора $E_n$ и тангенциальная составляющая вектора $D_t$ претерпевают изменение. Из рисунка видно, что

$$\frac{E_{t_1}}{E_{n_1}} = tg\alpha_1 \text{ и } \frac{E_{t_2}}{E_{n_2}} = tg\alpha_2.$$

Поделив почленно второе уравнение на первое, с учетом формулы (14) получим закон преломления линий

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \;(15).$$

Из формулы (15) видно, что при переходе линий *E* и *D* электрического поля в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью угол их преломления увеличивается.
Следует отметить, что полученный закон преломления линий напряженности справедлив при условии отсутствия свободных зарядов на границе раздела диэлектриков.

## 4. Сегнетоэлектрики.

Особую группу диэлектриков составляют *сегнетоэлектрики* – диэлектрики, обладающие *спонтанной* (самопроизвольной) *поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля*.
Это свойство впервые было обнаружено советскими учеными И.В.Курчатовым и П.П.Кобеко у сегнетовой соли. Поэтому вещества с подобными свойствами называют сегнетоэлектриками. Характерными свойствами сегнетоэлектриков, отличающими их от других диэлектриков, являются следующие:

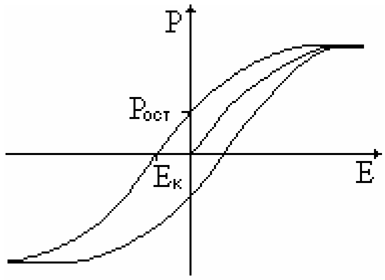
– очень большое значение диэлектрической восприимчивости $\chi$ и проницаемости $\varepsilon$ (например, у сегнетовой соли $\varepsilon_{max} \approx 10^4$);

– нелинейная зависимость поляризованности *P* от напряженности *E* электрического поля, что указывает на зависимость диэлектрической проницаемости $\varepsilon$ от напряженности поля;

– зависимость поляризованности $P$ от напряженности $E$ в переменном электрическом поле имеет вид замкнутой кривой, называемой петлей гистерезиса;

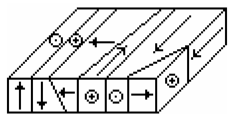
– наличие остаточной поляризованности;

– наличие точки Кюри (температуры $T_c$, при которой исчезает спонтанная поляризованность).




Наличие спонтанной поляризованности и другие свойства сегнетоэлектриков объясняются особенностью их кристаллической структуры. Взаимодействие частиц в кристалле приводит к спонтанной ориентации их дипольных моментов в одном направлении. В кристалле возникают микроскопические области спонтанной поляризованности, называемые *доменами*.

В отсутствие внешнего электрического поля дипольные моменты доменов ориентированы различным образом, так, что в целом дипольный момент диэлектрика равен нулю.



Поляризация сегнетоэлектрика во внешнем электрическом поле состоит, во первых, в росте размеров тех доменов, у которых направления дипольных моментов близки с направлением напряженности $E$, и, во вторых, в повороте дипольных моментов доменов по полю. При достаточно большом значении напряженности $E$ сегнетоэлектрик оказывается поляризованным до насыщения. Возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать установившуюся ориентацию их дипольных моментов.

Одним из факторов, который может привести к нарушению установившейся ориентации дипольных моментов доменов является тепловые колебания атомов. Когда сегнетоэлектрик нагревается до температуры Кюри $T_c$ (точки Кюри), энергия тепловых колебаний атомов становится настолько большой, что происходит разориентация дипольных моментов частиц в пределах доменов, спонтанная поляризованность исчезает и сегнетоэлектрик начинает вести себя как обычный полярный диэлектрик. Например, у титаната бария $T_c$=406К, а сегнетова соль обладает сегнетоэлектрическими свойствами в интервале температур от $T_c$=255К до $T_c$=297К, т.е. у сегнетовой соли имеются две точки Кюри.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Записать математическую формулу теоремы Остроградского-Гаусса для электростатического поля в веществе и дать ее определение.
2. В чем состоит отличие между линиями напряженности и электрического смещения? В чем состоит физический смысл диэлектрической проницаемости вещества?
3. Какие изменения претерпевают линии $E$ и $D$ на границе двух диэлектрических сред?
4. Указать характерные свойства сегнетоэлектриков, отличающие их от других диэлектриков.

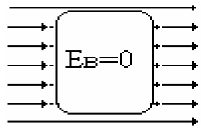
5. Как объясняется наличие у сегнетоэлектриков их специфических свойств?

**<u>Тема: Проводники в электростатическом поле.</u>**

**1. Условия равновесия электрических зарядов. Поле внутри проводника и у его поверхности**

$E_{вн}=0$

**2. Проводник в электростатическом поле. Электрическое поле в полости. Электростатическая защита.**




**3. Напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника.**

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$$

**4. Электроемкость.**

**4.1 Электроемкость уединенного проводника.**

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

**4.2 Электроемкость системы проводников. Конденсаторы.**

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}$$

**4.3 Соединение конденсаторов**

$$C = \sum_1^N C_i\ ,\ \frac{1}{C} = \sum_1^N \frac{1}{C_i}$$

**1. Условия равновесия электрических зарядов. Поле внутри проводника и у его поверхности.**

В проводниках присутствует очень большое количество (порядка $10^{28}м^{-3}$) свободных электрических зарядов (свободных электронов), способных перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Поэтому свойства проводников в электрическом поле определяются свободными зарядами.

Мы рассматриваем электростатическое поле – поле зарядов, находящихся в равновесии. В проводнике, помещенном в электрическое поле, электрические заряды будут находиться в равновесии при определенных условиях.

*1. Напряженность поля в любой точке внутри проводника должна быть равна нулю*

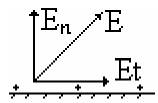
$$E_{вн}=0 \quad (1).$$

Если бы в какой-либо точке напряженность Е не равнялась нулю, то на заряды действовала бы сила $F=Q\cdot E$, и они пришли бы в движение, нарушая равновесие.

Из этого условия (1) следует, что если электрически нейтральному проводнику сообщить электрический заряд извне, то этот избыточный заряд должен распределиться *по поверхности* проводника. Избыточный заряд, расположенный внутри проводника создавал бы свое поле, приводя к нарушению равновесия.

2. *Силовые линии напряженности поля избыточных зарядов должны быть перпендикулярны поверхности проводника*.

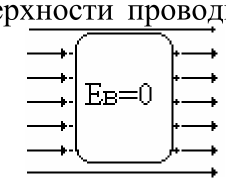
Если бы это было не так, то заряды пришли бы в движение под действием тангенциальной составляющей $E_\tau$ напряженности поля.




**2. Проводник в электростатическом поле. Электрическое поле в полости. Электростатическая защита.**

Рассмотрим, что произойдет, если электрически нейтральный проводник поместить в электростатическое поле.

В отсутствие внешнего электрического поля в любом элементе проводника сумма зарядов (свободных электронов и положительных ионов) равна нулю. При включении внешнего поля свободные электроны придут в движение, скапливаясь на одной поверхности проводника. Таким образом, на одной поверхности проводника появится *индуцированный* отрицательный заряд, а на противоположной поверхности – положительный заряд. Перераспределение зарядов в проводнике будет происходить до тех пор, пока внешнее поле не будет скомпенсировано полем индуцированных зарядов. Т.е. пока не будет достигнуто условие равновесия (1).



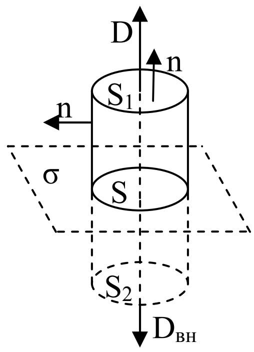

Таким образом, *нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает силовые линии*.

Так как индуцированные заряды располагаются на поверхности проводника, то цельный проводник можно заменить полым и в полости напряженность поля будет равна нулю. На этом основана электростатическая защита. *Для защиты приборов от действия внешнего электростатического поля их окружают металлическим экраном (например, металлической сеткой)*.

**3. Напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника.**

Если электрически нейтральному проводнику сообщить избыточный заряд, то этот заряд распределится по поверхности проводника (условие равновесия 1). При этом распределение зависит от формы проводника. Одноименные заряды, взаимно отталкиваясь, будут стремиться расположиться на наиболее удаленных точках. Если имеются ***заострения***, то заряды будут скапливаться на этих заострениях. У острия напряженность поля может оказаться достаточной для ионизации молекул окружающего воздуха. Это приведет к развитию электрического (коронного) разряда, который проявляется в виде светящейся короны (огни святого Эльма). Электрический разряд является основным фактором, ограничивающим величину заряда, который можно сообщить проводнику.

Получим формулу для вычисления электрической индукции $D$ электростатического поля вблизи поверхности заряженного проводника, находящегося в вакууме (или воздухе). Для этого применим теорему Остроградского-Гаусса.




Рассмотрим проводник, заряженный с некоторой поверхностной плотностью заряда σ. Выделим на поверхности проводника некую малую площадку с площадью $S$ и построим на ней прямой цилиндр с образующей, перпендикулярной к этой площадке. Поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую цилиндрическую поверхность можно представить, как сумму потоков через отдельные элементы поверхности

$$\Phi=D_n\cdot S_1+ D_n\cdot S_2+ D_n\cdot S_{бок} \ (3)$$

где $D_n$ – проекция вектора $\vec{D}$ на направление внешней нормали к поверхности $S$, а $S_1$, $S_2$ и $S_{бок}$ – площади оснований и боковой поверхности цилиндра соответственно.

По условию равновесия 1 поле внутри проводника отсутствует. Поэтому поток вектора $\vec{D}_{вн}$ через площадку $S_2$ (второе слагаемое) равен нулю. Кроме того, по условию равновесия 2 вектор $\vec{D}$ перпендикулярен поверхности проводника (площадке $S$). Поэтому поток вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность (третье слагаемое) также равен нулю. Таким образом, поток вектора $\vec{D}$ через замкнутую поверхность построенного цилиндра равен

$$\Phi= D_n\cdot S_1 \ (3).$$

По теореме Остроградского-Гаусса этот поток равен заряду $Q$, охватываемому замкнутой поверхностью,

$$D_n\cdot S_2=Q \ (4).$$

В рассматриваемом случае это заряд $Q$, расположенный на площадке $S$, и который равен

$$Q= \sigma\cdot S \ (5).$$

Подставим $Q$ в формулу (4) и, учитывая, что $S=S_1$, получим

$$D_n = \sigma \ (6) \quad \text{или для напряженности} \quad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ (7).$$

Если проводник находится в некоторой среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$, то напряженность определяется формулой

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \ (8)$$

## 4. Электроемкость.

### 4.1 Электроемкость уединенного проводника.

Если проводнику сообщить некоторый избыточный заряд $Q$, то этот заряд распределится по поверхности проводника *единственным* образом, соответствующим его *форме* (см. п.2). Каждая новая порция сообщаемого заряда будет распределяться подобным образом. Поверхностная плотность заряда проводника (на каждом участке поверхности) и, следовательно, его потенциал будут увеличиваться пропорционально величине сообщаемого заряда. *Отношение величины заряда ΔQ, сообщенного проводнику, и изменения его потенциала Δφ является физической величиной, которая называется электроемкостью*

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta \varphi} \ (9)$$

Из формулы (9) следует *физический смысл* электроемкости: *электроемкость – это скалярная физическая величина, численно равная величине электрического заряда, который нужно сообщить проводнику (системе проводников), чтобы его потенциал увеличить на 1 вольт.*

Электроемкость имеет размерность $[C] = \frac{Кл}{В}$ (кулон на вольт) и единицу измерения $\frac{1Кл}{1В} = 1Ф$ (фарад). За единицу электроемкости *1Ф* принимается электроемкость такого проводника, при сообщении которому заряда *1Кл* его потенциал увеличивается на *1В*.
Избыточный заряд распределяется по поверхности проводника. Следовательно, *электроемкость не зависит от природы материала, из которого изготовлен проводник*.

Получим формулу для электроемкости уединенного проводника в форме шара.
Так как заряд $Q$, сообщаемый шару (проводнику) распределяется по его поверхности, то потенциал заряженного шара радиусом $R$ определим по известной формуле

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\varepsilon \cdot R} \quad (10).$$

Разделив $Q$ на $\varphi$, получим формулу для электроемкости уединенного шара радиусом $R$ находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$

$$C = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R \,(11)$$

4.2 Электроемкость системы проводников. Конденсаторы.

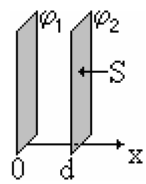
Уединенные проводники обладают небольшой электроемкостью. Например, емкость уединенного шара с радиусом, равным радиусу Земли, составляет примерно 700мкФ. В то же время, если к заряженному проводнику $A$ поднести другие проводники, то на их поверхностях возникнут индуцированные заряды, которые будут ослаблять поле проводника $A$, уменьшая его потенциал. В этом случае для увеличения потенциала проводника $A$ (точнее системы проводников) на один вольт ему нужно сообщить больший по величине заряд. Таким образом, система из двух и более проводников способна накапливать больший заряд, т.е. электроемкость системы проводников больше электроемкости уединенного проводника.
Опыт показывает, что если проводники находятся вдали от других тел, то разность потенциалов между проводниками изменяется пропорционально величине сообщаемого заряда. В этом случае электрическая емкость такой системы проводников определяется формулой

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}, \,(12)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов проводников.
Наибольший практический интерес представляет система из двух близко расположенных проводников, заряды которых равны по величине и противоположны по знаку. Такая система проводников называется конденсатором. В зависимости от формы проводников различают плоский, сферический и цилиндрический конденсаторы.

Получим формулы для электрической емкости некоторых конденсаторов.

*Плоский конденсатор* – система из двух плоских близко расположенных проводников. В данном случае проводники называются пластинами или обкладками конденсатора. Если пространство между обкладками не заполнено диэлектрическим веществом, то конденсатор называется воздушным.




Для получения искомой формулы используем формулу, связывающую напряженность $E$ поля с потенциалом $\varphi$

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}\ (13),$$

где $d\varphi$ – изменение потенциала на расстоянии $dx$.

Из формулы (13) выразим $d\varphi$, $d\varphi = -E \cdot dx$ и проинтегрируем полученное выражение в пределах $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $0 \le x \le d$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_0^d E \cdot dx\ (14).$$

Учитывая, что поле плоского конденсатора однородное и его напряженность определяется формулой $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}$, для разности потенциалов $\varphi_1$- $\varphi_2$ из формулы (14) получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}\ (15).$$

Используя формулу (11) окончательно получим формулу для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d}\ (16).$$

Сферический конденсатор.

*Сферическим конденсатором* называется система, состоящая из двух проводников в виде концентрических сфер с радиусами $R_1$ и $R_2$ ($R_2$>$R_1$).

Для получения искомой формулы используем формулу, связывающую напряженность $E$ поля с потенциалом $\varphi$

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}\ (17),$$

где $d\varphi$ – изменение потенциала на расстоянии $dr$.

Из формулы (17) выразим $d\varphi$, $d\varphi = -E \cdot dr$ и проинтегрируем полученное выражение в пределах $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $r_1 \le r \le r_2$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr\ (18).$$

Подставим в формулу (18) формулу для напряженности поля заряженной сферы, определяемой формулой $E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\varepsilon \cdot r^2}$, и вынесем постоянные за знак интеграла

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}\ (19).$$

Интегрированием из формулы (18) для разности потенциалов $\varphi_1$- $\varphi_2$ получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) (20).$$

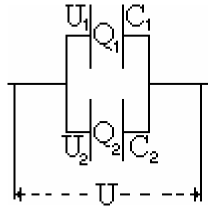
Используя формулу (12) окончательно получим формулу для емкости сферического конденсатора

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} (21).$$

Из формулы (21) следует, что при $R_2 \to \infty$, $C \to 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R_1$, т.е. получим формулу для емкости уединенного шара. Причем его емкость меньше емкости сферического конденсатора.

### 4.3 Соединение конденсаторов

Если имеющиеся в наличии конденсаторы не обладают требуемой емкостью, то для получения необходимой емкости их соединяют параллельно или последовательно.




При параллельном соединении $N$ числа конденсаторов, величина электрического заряда $Q$ батареи равна сумме величин зарядов $Q_i$ каждого конденсатора с емкостью $C_i$

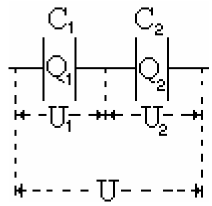
$$Q = \sum_{1}^{N} Q_i \ , (22)$$

а разность потенциалов $U$ батареи равна разности потенциалов $U_i$ на обкладках каждого из конденсаторов

$$U=U_i=const. \ (23)$$

Из формулы (12) следует, что $Q = C \cdot U$ и $Q_i = C_i \cdot U_i$. Подставив последние формулы в формулу (22), с учетом формулы (23) получим формулу для емкости $C$ батареи параллельно включенных конденсаторов

$$C = \sum_{1}^{N} C_i \ . (24)$$




При последовательном соединении $N$ числа конденсаторов, величина разности потенциалов $U$ батареи равна сумме разностей потенциалов $U_i$ на обкладках каждого конденсатора с емкостью $C_i$

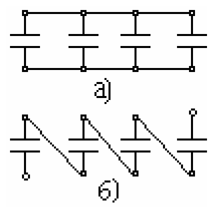
$$U = \sum_{1}^{N} U_i \ , (25)$$

а величина электрического заряда $Q$ батареи равна величине заряда $Q_i$ каждого конденсатора

$$Q=Q_i=const. \ (26)$$

Из формулы (12) следует, что $U = \dfrac{Q}{C}$ и $U_i = \dfrac{Q_i}{C_i}$. Подставив последние формулы в формулу (24), с учетом формулы (26) получим формулу для емкости $C$ батареи последовательно включенных конденсаторов

$$C = \sum_{1}^{N} C_i \ , \ \frac{1}{C} = \sum_{1}^{N} \frac{1}{C_i} \ . (27)$$




Если $N$ одинаковых конденсаторов с емкостью $C$ соединить параллельно и зарядить до разности потенциалов $U_{пар}$ (рисунок *а*), а затем в заряженном состоянии соединить последовательно (рисунок *б*), то разность потенциалов на зажимах батареи увеличится в $N$ раз $U_{посл}=U_{пар} \cdot N$.

На этом принципе основана работа высоковольтного импульсного генератора, позволяющего получать напряжения в несколько кВ и даже МВ.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Перечислить условия равновесия электрических зарядов в проводнике.
2. В чем заключается электростатическая защита?
3. В чем состоит физический смысл электроемкости? Привести размерность и единицу измерения электроемкости. От чего зависит электроемкость?
4. Чем ограничивается максимальная величина заряда, сообщаемого проводнику?
5. Указать способ получения высокого напряжения с помощью батареи конденсаторов.

**Тема: Энергия электрического поля**

**1. Энергия уединенного заряженного проводника**

$$W_{пр} = \frac{1}{2} \cdot C\varphi^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \varphi$$

**и системы заряженных проводников**

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \varphi_i$$

**2. Энергия заряженного конденсатора**

$$W_к = \frac{1}{2} \cdot CU^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U$$

**3. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии.**

$$\frac{W}{V} = w = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2}$$

**4. Пондеромоторные силы. Применение закона сохранения энергии к расчету пондеромоторных сил.**

## 1. Энергия уединенного заряженного проводника и системы проводников

При сообщении проводнику некоторого заряда вокруг него возникает электрическое поле. Чтобы сообщить проводнику следующую порцию заряда необходимо совершить работу против сил этого поля. Так как электростатическое поле потенциально, то совершаемая работа идет на увеличение потенциальной энергии проводника.

Рассмотрим уединенный проводник с емкостью $C$ и потенциалом $\varphi$. При перенесении заряда $dQ$ из бесконечности на поверхность проводника необходимо совершить работу $dA$ против сил поля

$$dA = \varphi \cdot dQ\ . \ (1)$$

Обе величины в правой части формулы (1) являются переменными. Используя связь между величинами $C$, $\varphi$ и $Q$ приведем праву часть к одной переменной. Для этого выразим $dQ$ через $\varphi$ и подставим в формулу (1)

$$Q = C \cdot \varphi \Rightarrow dQ = C \cdot d\varphi \Rightarrow dA = C \cdot \varphi \cdot d\varphi\ . \ (2)$$

Чтобы найти работу по зарядке проводника от нулевого потенциала до некоторого потенциала $\varphi$ проинтегрируем выражение (2)

$$A = \int_0^{\varphi} C \cdot \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot C\varphi^2\ .(3)$$

По определению эта работа равна изменению потенциальной энергии. Поэтому *энергия уединенного проводника*, заряженного до потенциала $\varphi$ определяется формулой

$$W_{пр} = \frac{1}{2} \cdot C\varphi^2\ . \ (4)$$

Используя связь между величинами $C$, $\varphi$ и $Q$ формула (4) может быть представлена в нескольких видах

$$W_{пр} = \frac{1}{2} \cdot C\varphi^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \varphi\ . \ (5)$$

Применяя принцип суперпозиции электрических полей можно получить следующую формулу для энергии системы из $n$ неподвижных заряженных проводников

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \varphi_i\ , \ (6)$$

где $\varphi_i$ – потенциал суммарного поля в той точке, где находится проводник с зарядом $Q_i$.

## 2. Энергия заряженного конденсатора

Процесс зарядки конденсатора можно представить как последовательное перемещение малых порций $dQ$ заряда с одной пластины (обкладки) на другую. Если первоначально пластины нейтральны, то перенос, например, положительного заряда с первой пластины на вторую приведет к возникновению отрицательного заряда на первой пластине. Следовательно, в результате таких переносов первая пластина будет заряжаться отрицательно, а вторая – положительно. Между пластинами возникнет постепенно возрастающая разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$. Вывод формулы для энергии заряженного конденсатора аналогичен приведенному выше выводу формулы (4). Отличие состоит в замене потенциала $\varphi$ на разность потенциалов $U$

$$A = \int_0^U C \cdot U \cdot dU = \frac{1}{2} \cdot CU^2 . \ (7)$$

Таким образом, формула для *энергии заряженного конденсатора* имеет следующий вид

$$W_к = \frac{1}{2} \cdot CU^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U . \ (8)$$

**3. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии.**

При изучении поля неподвижных зарядов мы не можем рассматривать отдельно электрический заряд и созданное им электрическое поле. Поэтому, оставаясь в рамках электростатики, нельзя однозначно указать, является ли носителем электрической энергии электрический заряд либо электрическое поле. Изучение переменных электромагнитных полей показало, что они могут существовать отдельно от породивших их электрических зарядов и распространяться в пространстве в виде электромагнитных волн. Факт существования электромагнитных волн и переноса ими энергии позволяет утверждать, что энергия заряженных проводников сосредоточена в электрическом поле. Учитывая это, преобразуем формулу (7) для энергии заряженного конденсатора таким образом, чтобы в него входила характеристика поля – его напряженность. Для этого в (7) вместо емкости $C$ подставим выражение для емкости плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d}$, а напряжение $U$ заменим выражением $U = E \cdot d$. Тогда для энергии заряженного конденсатора получим

$$W = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S \cdot d \ . \ (9)$$

Произведение $S \cdot d$ в формуле (9) равно объему $V$, занимаемому электрическим полем. Поделив левую и правую части формулы (9) на объем $V$ получим формулу для *объемной плотности энергии* $w$ (энергии, приходящейся на единицу объема)

$$w = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \ \text{или} \ \ w = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \ . \ (10)$$

Учитывая связь электрического смещения $D$ с поляризованностью $P$ диэлектрика $D = \varepsilon_0 \cdot E + P$, можно получить другую формулу для объемной плотности энергии электрического поля

$$w = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot E \cdot P . \ (11)$$

В формуле (11) первое слагаемое выражает плотность энергии электрического поля в вакууме, а второе слагаемое выражает энергию, затрачиваемую на поляризацию единицы объема диэлектрика.

В общем случае неоднородного электрического поля его энергию в некотором объеме $V$ можно вычислить по формуле

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_0^V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV \,. \, (12)$$

**4. Пондеромоторные силы. Применение закона сохранения энергии к расчету пондеромоторных сил.**

На всякое заряженное тело, помещенное в электрическое поле, действуют механическая сила. *Пондеромоторными называются силы, действующие со стороны электрического поля на макроскопические заряженные тела*.

Определим силу взаимного притяжения между разноименно заряженными пластинами плоского конденсатора (пондеромоторную силу) двумя способами.

С одной стороны эту силу можно определить как силу $F_2$ , действующую на вторую пластину со стороны первой

$$F_2 = Q_2 \cdot E_1 , \, (14)$$

где $Q_2$ – величина заряда на второй пластине, $E_1$– напряженность поля первой пластины.
Величина заряда $Q_2$ второй пластины определяется формулой

$$Q_2 = \sigma_2 \cdot S \, , \, (15)$$

где $\sigma_2$ – поверхностная плотность заряда на второй пластине, а напряженность $E_1$ поля, создаваемого первой пластиной вычисляется формулой

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} , \, (16)$$

где $\sigma_1$ – поверхностная плотность заряда на первой пластине.
Подставим формулы (16) и (15) в формулу (14)

$$F_2 = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot S \text{ или } F_2 = \frac{\sigma^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot S \text{ (17) т.к. } \sigma_1 = \sigma_2 .$$

Учитывая, что $\sigma = D = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E$ , получим формулу для силы, действующей на одну пластину со стороны другой

$$F_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S \,.$$

Для силы, действующей на единицу площади пластины, формула будет иметь следующий вид

$$\frac{F}{S} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} . \, (18)$$

Теперь получим формулу для пондеромоторной силы, используя закон сохранения энергии. Если тело перемещается в электрическом поле, то пондеромоторными силами поля будет совершаться работа $A$. По закону сохранения энергии эта работа будет совершаться за счет энергии поля, то есть

$$A + \Delta W = 0 \text{ или } A = \Delta W . \ (19)$$

Работа по изменению расстояния между пластинами заряженного конденсатора на величину $dx$ определяется формулой

$$A = F \cdot dx , \ (20)$$

где $F$ – сила взаимодействия между обкладками (пондеромоторная сила).
Энергия заряженного конденсатора определяется формулой (9). При смещении одной из обкладок на расстояние $dx$ энергии конденсатора изменится на величину $\Delta W$

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S \cdot dx \ (21).$$

Приравняв формулы (20) и (21), получим формулу для силы, действующей на единицу площади пластины

$$\frac{F}{S} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \ (22).$$

Как видим, формулы (18) и (22) одинаковые. Вместе с тем использование закона сохранения энергии для расчета пондеромоторных сил намного упрощает расчеты.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Вывести формулу для энергии уединенного заряженного проводника и системы проводников.
2. Что является носителем электрической энергии? Что понимают под объемной плотностью энергии? Вывести формулу для объемной плотности энергии электрического поля.
3. Что понимают под пондеромоторными силами? Как можно рассчитать силу взаимодействия обкладок заряженного конденсатора?

**Тема: Закон Ома в дифференциальной форме**

**1. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования.**

$$I = \frac{dQ}{dt};\ j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

**2. Классическая электронная теория электропроводности (КЭТ) металлов и ее опытное обоснование. Плотность тока по КЭТ.**

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot < \vec{\upsilon}_E >$$

**3. Вывод закона Ома в дифференциальной форме из электронных представлений.**

$$j = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle \lambda \rangle}{m_e \cdot \langle \upsilon_T \rangle} \cdot E$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

**4. Вывод закона Джоуля-Ленца**

$$w = \gamma \cdot E^2$$

**5. Затруднения классической теории электропроводности металлов.**

**1. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования.**

В электростатике речь шла о неподвижных электрических зарядах. На практике чаще приходится сталкиваться с движущимися зарядами. Явления (процессы) связанные с движением электрических зарядов изучаются в *электродинамике*.

*Всякое упорядоченное движение электрических зарядов называется электрическим током*.

Различают ток проводимости, ток в вакууме, конвекционный ток и ток смещения.

Для появления и существования электрического тока необходимы следующие условия:

1. Наличие в данной среде электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение зарядов;
2. Наличие в среде носителей электрического заряда, способных перемещаться в ней;
3. Электрическая цепь должна быть замкнутой.

Количественной характеристикой электрического тока служит сила тока. *Силой тока называется скалярная физическая величина, численно равная количеству электрического заряда, переносимого через рассматриваемую поверхность за одну секунду*.

$$I = \frac{dQ}{dt}. \ (1)$$

Сила тока имеет размерность $\left[I\right] = \frac{Кл}{c}$ и единицу измерения $\frac{1Кл}{1c} = 1A$ (Ампер).

(Следует отметить, что применение термина «сила» к величине, определяемой формулой (1) не является корректным. Более точное определение *силе тока 1А* будет дано позже.)

Электрический ток также характеризуется направлением. За *направление тока* принимается направление движения *положительных зарядов*.

Другой характеристикой электрического тока является *плотность тока*. *Плотностью тока называется векторная физическая величина, совпадающая по направлению с направлением движения положительных зарядов и численно равная силе тока через единицу площади поперечного сечения проводника.*

$$I = \frac{dQ}{dt}; \ j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \ (2)$$

где *dI* – сила тока через элемент *dS* поперечного сечения проводника.

При известном значении плотности тока, силу тока в проводнике можно определить следующей формулой

$$I = \int_0^S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS, \ (3)$$

где $n$ – нормаль элемента *dS*.

*Постоянным электрическим током называется ток, у которого не изменяются ни величина, ни направление*. Опыты показывают, что плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению проводника. Поэтому для постоянного тока справедливы формулы

$$j = \frac{I}{S_{\perp}} \ (4) \ \text{ и } \ I = j \cdot S_{\perp} (5)$$

2. Классическая электронная теория электропроводности металлов (КЭТ) и ее опытное обоснование. Плотность тока по КЭТ.

Для выяснения природы носителей тока в металлах к началу XX века был проведен ряд опытов. Один из наиболее простых опытов был проведен немецким ученым Рикке К. (1901г.). В этом опыте через последовательно соединенные разнородные металлические (Cu-Al-Cu) проводники пропускался электрический ток в течение года. Количество электрического заряда, прошедшего через проводники за это время, составило $Q=3{,}5\cdot10^6$ Кл. Исследование торцов проводников по окончанию опыта показало, что электрический ток не сопровождается переносом атомов. На основании такого простого опыта был сделан важный вывод о том, что *перенос электрического заряда в металлах не связан с переносом вещества и носители электрического тока во всех металлах одинаковы*.

В опытах российских ученых Мандельштама Л.И. и Папалекси Н.Д. и американских ученых Толмена Р. и Стюарта Б. был измерен удельный заряд $\left(\dfrac{Q}{m}\right)$ носителей тока. Оказалось, что полученное значение удельного заряда очень близко к значению удельного заряда электрона, которое было измерено ранее. Таким образом, было экспериментально доказано, что *носителями электрического тока проводимости в металлах являются свободные электроны*.

Немецким ученым Друде П., на основе представлений о свободных электронах, в начале XX века была создана *классическая электронная теория электропроводности металлов*.

*В классической электронной теории электропроводности (КЭТ) металлов электроны проводимости (свободные электроны) рассматриваются как электронный газ, подчиняющийся законам идеального одноатомного газа.*

Электроны проводимости, также как атомы газа, описываются законом Максвелла для их распределения по скоростям и энергиям теплового движения. При своем движении электроны сталкиваются с ионами (узлами кристаллической решетки). Поэтому им приписывается *средняя длина свободного пробега*.

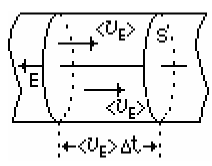
Используя закон равнораспределения энергии по степеням свободы можно оценить среднюю скорость теплового движения электронов

$$\frac{m_e\cdot\upsilon_{кв}^2}{2}=\frac{3\cdot k\cdot T}{2}\quad(6)\ \text{или}\ \left\langle\upsilon_{кв}\right\rangle=\sqrt{\frac{3\cdot k\cdot T}{m_e}}\approx10^5\ \frac{м}{с}$$

Как видим, значение средней скорости достаточно велико. Однако, *тепловое движение электронов, вследствие своей хаотичности, не может привести к возникновению электрического тока* (упорядоченного движения).

Если к концам проводника приложить разность потенциалов, то свободные электроны приобретут дополнительную скорость $\upsilon_E$ вдоль поля, которая, накладываясь на тепловую скорость, приведет к упорядоченному движению. Т.е. в проводнике возникнет электрический ток.

Получим выражение для плотности тока исходя из представлений об электронном газе. Для этого выделим отрезок проводника с поперечным сечением $S$ и направим вектор напряженности $E$ электрического поля вдоль проводника. Свободные электроны приобретут некоторую среднюю скорость упорядоченного движения $<\upsilon_E>$. За время $dt$ площадку $S$ пересекут все электроны, заключенные в объеме цилиндра с образующей $<\upsilon_E>\cdot dt$.




Если число электронов в единице объема обозначить через $n$, а заряд электрона $e$, то за время $dt$ через площадку $S$ пройдет заряд

$$dQ=n\cdot e\cdot<\upsilon_E>\cdot S\cdot dt\ .\ (7)$$

Тогда для плотности тока получим следующую формулу

$$j=\frac{dQ}{dt\cdot S}=n\cdot e\cdot<\upsilon_E>.\ (8)$$

Учитывая, что направление вектора плотности тока совпадает с направлением скорости, запишем формулу (8) в векторной форме

$$\vec{j}=n\cdot e\cdot<\vec{\upsilon}_E>.\ (9)$$

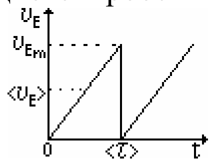
Оценка значения средней скорости упорядоченного движения электронов проводимости в меди, при предельно допустимом значении $10^7 А\cdot м^2$ плотности тока, дает величину $<\upsilon_E>\approx 10^{-3}$ $м\cdot с^{-1}$. Сравнивая полученное значение со значением средней скорости теплового движения электронов (формула 6) получим, что $<\upsilon_T>\approx 10^8\cdot<\upsilon_E>$. Т.е. значение средней скорости теплового движения электронов на восемь! порядков превышает значение средней скорости их упорядоченного движения.

### 3. Вывод закона Ома в дифференциальной форме из электронных представлений.

Выведем формулу для плотности $j$ тока, возникающего в металле по действием однородного электрического поля с напряженностью $E$.
В электрическом поле на электроны будет действовать сила, определяемая формулой $F=e\cdot E$. Т.е. движение электронов будет равноускоренным, с ускорением

$$a = \frac{e\cdot E}{m_e} \quad (10).$$

Для упрощения расчетов положим, что все электроны имеют одно и то же значение средней скорости теплового движения $<\upsilon_T>$ и средней длины свободного пробега $<\lambda>$. Положим также, что при каждом столкновении электрона с ионом кристаллической решетки он полностью теряет энергию, приобретенную в электрическом поле, и, после столкновения, начинает движение без начальной скорости. В этом случае график зависимости скорости упорядоченного движения $\upsilon_E$ электрона от времени будет иметь вид, показанный на рисунке.




Тогда к концу свободного пробега скорость упорядоченного движения электрона в среднем будет достигать значения

$$\upsilon_{E\,m} = \frac{e\cdot E}{m_e}\cdot <\tau>, \quad (11)$$

где $<\tau>$ – среднее время свободного пробега.
Среднее значение времени $<\tau>$ свободного пробега связано со средними значениями длины свободного пробега $<\lambda>$ и результирующей скорости $\left\langle\left|\vec{\upsilon}_{рез}\right|\right\rangle$ очевидным соотношением

$$\left\langle\tau\right\rangle = \frac{\left\langle\lambda\right\rangle}{\left\langle\left|\vec{\upsilon}_{рез}\right|\right\rangle}, \quad (12)$$

где $\upsilon_{рез}$ складывается из скоростей теплового и упорядоченного движения $\vec{\upsilon}_{рез} = \vec{\upsilon}_T + \vec{\upsilon}_E$.

В предыдущем вопросе было показано, что $\upsilon_T >> \upsilon_E$, т.е. $\left\langle\left|\vec{\upsilon}_{рез}\right|\right\rangle \approx \left\langle\upsilon_T\right\rangle$. Подставив последнее в формулу (12), а затем в формулу (11) получим для максимальной скорости

$$\upsilon_{Em} = \frac{e\cdot E\cdot\left\langle\lambda\right\rangle}{m_e\cdot\left\langle\upsilon_T\right\rangle}. \quad (13)$$

Так как движение равноускоренное, то средняя скорость равна половине максимальной

$$<\upsilon_E> = \frac{1}{2}\cdot\frac{e\cdot E\cdot\left\langle\lambda\right\rangle}{m_e\cdot\left\langle\upsilon_T\right\rangle}, \quad (14)$$

или $<\upsilon_E>=b\cdot E$, где $b = \frac{1}{2}\cdot\frac{e\cdot\left\langle\lambda\right\rangle}{m_e\cdot\left\langle\upsilon_T\right\rangle}$ (15) называется *подвижностью носителей*.

Подставив формулу (15) в формулу (8) получим *формулу для плотности тока*

$$j = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle \lambda \rangle}{m_e \cdot \langle \upsilon_T \rangle} \cdot E, \ (16)$$

или *закона Ома в дифференциальной форме*.

В последней формуле произведение величин, стоящих перед величиной $E$ обозначается символом $\gamma$ и называется *удельной электропроводностью*

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle \lambda \rangle}{m_e \cdot \langle \upsilon_T \rangle}. \ (17)$$

Удельное сопротивление $\rho$ обратно пропорционально удельной электропроводности $\rho=1/\gamma$. В формулу (17) входит средняя длина свободного пробега электронов, определяемая их столкновениями с ионами решетки. Следовательно, в классической теории электропроводности наличие *электрического сопротивления* в металлах объясняется *столкновениями свободных электронов с ионами решетки*. С ростом температуры увеличивается скорость теплового движения электронов и интенсивность колебаний ионов решетки. Это приводит к уменьшению $<\lambda>$ и увеличению электрического сопротивления. Таким образом, формула (17) дает качественно правильную зависимость электрического сопротивления металлов от температуры.

Учитывая формулу (17) и сонаправленность векторов $j$ и $E$ можно записать более компактно формулу (16) *закона Ома в дифференциальной форме*

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} \ \text{или} \ \vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E}. \ (18)$$

Формула (18) позволяет вычислять плотность тока в точках, в которых известна напряженность электрического поля.

### 4. Вывод закона Джоуля-Ленца.

В конце свободного пробега каждый электрон передает иону решетки свою энергию, приобретенную в электрическом поле. Это приводит к нагреванию проводника. Среднее значение энергии, передаваемой каждым электроном иону, определяется формулой

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \upsilon_{E_m}^2$$

или, с учетом формулы (13), $< W >= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 \cdot \langle \lambda \rangle^2}{m_e \cdot \langle \upsilon_T \rangle^2} \cdot E^2$. (19)

Умножив энергию, отдаваемую одним электроном (формула 19), на их концентрацию $n$ и среднее число столкновений $<Z>$ в единицу времени $\langle Z \rangle = \frac{\langle \upsilon_T \rangle}{\langle \lambda \rangle}$, получим формулу для *удельной тепловой мощности* $w$ тока (энергии, выделяющейся в единице объема в единицу времени)

$$w = \gamma \cdot E^2. \ (20)$$

Формула (20) позволяет вычислять удельную тепловую мощность тока в точках, в которых известна напряженность электрического поля и называется законом Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

### 5. Затруднения классической теории электропроводности металлов.

Классическая теория электропроводности (КЭТ), развитая Друде П., была весьма упрощенной. Например, предполагалось, что все электроны проводимости движутся с одинаковой скоростью. Поэтому ученый Лоренц Г., решив усовершенствовать КЭТ, применил к «электронному газу» закон Максвелла для распределения частиц по скоростям и получил парадоксальный результат. Оказалось, что уточненная КЭТ хуже согласуется с опытом, чем грубая теория Друдэ. Таким образом, классическая теория электропроводности Друдэ-Лоренца столкнулась с весьма существенными затруднениями. Из них основными являются два:

1. Классическая теория электропроводности не смогла объяснить зависимость электрического сопротивления металлов от температуры.

Удельное сопротивление $\rho$ обратно пропорционально электропроводности $\rho=1/\gamma$. Из формулы (17) следует, что $\rho$ пропорционально средней скорости теплового движения $<\upsilon_T>$, которая в свою очередь пропорциональна $\sqrt{T}$. Следовательно, при нагревании металлов их электрическое сопротивление теоретически должно возрастать пропорционально $\sqrt{T}$ ($\rho\sim\sqrt{T}$). Согласно же опыту, при нагревании металлов в широком интервале температур их электрическое сопротивление растет пропорционально температуре в первой степени ($\rho\sim T$). КЭТ также не смогла объяснить открытое в 1911г. явление сверхпроводимости, проявляющееся в исчезновении электрического сопротивления при охлаждении металлов до сверхнизких температур.

2. Классическая теория электропроводности не смогла объяснить теплоемкость металлов.

По КЭТ теплоемкость металлов $C_{мет}$ складывается из теплоемкостей кристаллической решетки $C_{реш}$ и электронного газа $C_{газ}$ и, в случае одного моля, должна быть равна

$$C_{мет}=3R+3/2R=37{,}5\ \text{Дж/(моль·К)}.$$

Опыт же показывает, что значение теплоемкости металлов в соответствии с законом Дюлонга и Пти близко к 25 Дж/(моль·К). Таким образом, обнаружилось неожиданное и непонятое с точки зрения КЭТ отсутствие теплоемкости у электронного газа.

Указанные затруднения КЭТ связаны с тем, что в ней не учитывается такое специфическое свойство электрона, как *спин*. (Спин – это собственный момент импульса микрочастицы). Спин электрона был открыт позже и был учтен в квантовой теории, которая устраняет все недостатки КЭТ и которая будет рассмотрена позже.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Указать основные представления классической тории электропроводности металлов.
2. Как в КЭТ объясняется наличие электрического сопротивления? От чего зависит значение электрического сопротивления?
3. Вывести формулу закона Ома в дифференциальной форме.
4. Перечислить недостатки классической тории электропроводности металлов.

## Тема: Закон Ома в интегральной форме

1. **Однородный и неоднородный участки цепи. Вывод закона Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи**

$$I \cdot \int_1^2 \frac{\rho \cdot dl}{S_\perp} = \int_1^2 \vec{E}_к \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}$$

2. **Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}_к \cdot d\vec{l}\ ;\ \varepsilon_{1-2} = \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}$$

3. **Правила Кирхгофа для электрических цепей**

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = 0\ ; \quad \sum_{k=1}^{N} I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k$$

## 1. Однородный и неоднородный участки цепи. Вывод закона Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи.

Однородный и неоднородный участки цепи.

Если в проводнике действует только *электростатическое поле*, то в нем может возникнуть только *кратковременный электрический ток*. Действительно, если обкладки конденсатора, заряженного до некоторой разности потенциалов Δφ, соединить проводником, то в проводнике возникнет электрический ток. По мере протекания тока конденсатор будет разряжаться, и разность потенциалов будет уменьшаться. С течением времени потенциал во всех точках системы уравняется и ток прекратится.

Например, если обкладки заряженного конденсатора емкостью 1Ф замкнуть проводником, имеющим сопротивление 1Ом, то электрический ток в цепи будет протекать примерно в течение 1с.

В электростатическом поле заряды перемещаются из точек с большим потенциалом в точки с меньшим потенциалом, что приводит к выравниванию потенциалов. Для поддержания электрического тока достаточно длительное время, необходим источник , в котором за счет сил *не электростатического происхождения* осуществлялся бы перенос носителей тока в исходную точку с большим потенциалом. Указанные силы называются *сторонними*.

Таким образом, *для поддержания электрического тока в цепи необходимо наличие сторонних сил, действующих либо во всей цепи, либо на отдельных ее участках*.

Сторонние силы могут быть химической, электромагнитной природы и др. Например, в большинстве аккумуляторов роль сторонних сил играют силы химического взаимодействия, приводящие к разделению молекул электролитов на разноименные заряды. В этом случае разность потенциалов на электродах аккумулятора поддерживается за счет энергии химической реакции.

*Участок цепи, на котором* ***не*** *действуют сторонние силы, называется однородным.*

*Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называется* ***не****однородным.*

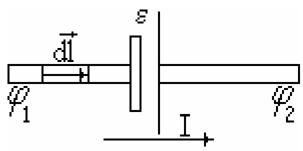
Вывод закона Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи.

В общем случае на неоднородном участке цепи действуют и кулоновские и сторонние силы. Обозначим напряженность поля электростатических (кулоновских) сил через $E_к$, а напряженность поля сторонних сил через $E_{стор}$. Тогда в любой точке внутри проводника результирующая напряженность равна

$$\vec{E} = \vec{E}_к + \vec{E}_{стор}$$

и закон Ома в дифференциальной форме будет иметь вид

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot (\vec{E}_к + \vec{E}_{стор}) . \ (1)$$



Обе части уравнения (1) умножим скалярно на вектор $d\vec{l}$, численно равный элементу $dl$ длины проводника и совпадающий по направлению с вектором $j$ плотности тока

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\rho} \cdot (\vec{E}_к \cdot d\vec{l} + \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}) . \ (2)$$

Так как плотность постоянного тока $j$ равна $j = I / S_\perp$ и скалярное произведение сонаправленных векторов $\vec{j}$ и $d\vec{l}$ равно произведению их модулей, то формулу (2) можно записать в следующей форме

$$I \cdot \frac{\rho \cdot dl}{S_\perp} = \vec{E}_к \cdot d\vec{l} + \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} . \ (3)$$

Формула (3) представляет собой закон Ома для бесконечно малого элемента $dl$ неоднородного участка цепи от сечения 1 с потенциалом $\varphi_1$ до сечения 2 с потенциалом $\varphi_2$. Проинтегрировав выражение (3) по всей длине участка цепи от сечения 1 до сечения 2 получим формулу *обобщенного закона Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи*

$$I \cdot \int_1^2 \frac{\rho \cdot dl}{S_\perp} = \int_1^2 \vec{E}_к \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}\ . \quad (4)$$

Так как сила постоянного тока во всех сечениях проводника постоянна, то сила тока вынесена за знак интеграла.

### 2. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение

Проанализируем интегралы, входящие в формулу (4). Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение в интеграле левой части формулы (4) определяет электрическое сопротивление элемента $dl$ проводника, а сам интеграл выражает электрическое сопротивление цепи на рассматриваемом участке

$$R_{1-2} = \int_1^2 \frac{\rho \cdot dl}{S_\perp}. \quad (5)$$

При этом, *сопротивление $R_{1-2}$ включает* в себя как сопротивление $R$ *проводника*, так и сопротивление $r$ промежутка цепи между электродами источника тока (сопротивление электролита или *внутреннее сопротивление источника*)

$$R_{1-2}=R+r. \quad (6)$$

Первый интеграл правой части формулы (4) выражает *работу сил электростатического поля* по перемещению единичного положительного заряда из точки с потенциалом $\varphi_1$ в точку с потенциалом $\varphi_2$. Эта работа в электростатике была названа *разностью потенциалов*, поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}_к \cdot d\vec{l}\ . \quad (7)$$

Второй интеграл правой части формулы (4) выражает *работу сторонних сил* по перемещению единичного положительного заряда на рассматриваемом участке цепи. Указанная работа сторонних сил называется *электродвижущей силой* (ЭДС) и часто обозначается символом $\varepsilon$

$$\varepsilon_{1-2} = \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}\ . \quad (8)$$

Из формулы (8) следует физический смысл ЭДС:
*ЭДС на участке цепи называется физическая величина, численно равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда на этом участке.*
ЭДС, так же как и разность потенциалов, измеряется в вольтах.

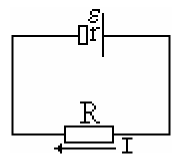
С учетом введенных обозначений для интегралов, формулу (4) можно записать в следующем виде

$$I \cdot R_{1-2} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1-2}\,. \quad (9)$$

Формула (9) также является математическим выражением *закона Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме*.
ЭДС, так же как и сила тока, является величиной алгебраической. Поэтому следует учитывать ее знак.
Если ЭДС *способствует* перемещению положительных зарядов в данном направлении, то она считается *положительной*. Если ЭДС *препятствует* перемещению положительных зарядов в данном направлении, то она считается *отрицательной*.

Произведение величины сопротивления участка цепи и силы тока в нем называется падением напряжения. Из формулы (9) следует физический смысл напряжения: *напряжением на участке цепи называется физическая величина, численно равная сумме работ электростатических и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль этого участка*.

Формула (9) называется также формулой *обобщенного закона Ома,* так как она справедлива для различных цепей.

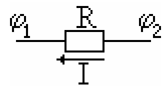



Если на приведенном выше рисунке участок цепи замкнуть проводником, то получим *замкнутую* цепь. В этом случае $\varphi_1 = \varphi_2$ и из формулы (9), с учетом формулы (6), получим закон Ома в следующем виде

$$I \cdot (R + r) = \varepsilon \quad \text{или} \quad I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \ (10)$$

В случае замкнутой неразветвленной цепи ЭДС равна работе по перемещению единичного положительного заряда по всей цепи.

Из формулы (10) следует, что ЭДС равна сумме падений напряжений на внутреннем и внешнем участках цепи.




В случае *однородного* (в отсутствие ЭДС) участка цепи с током $I$, $\varepsilon$=0, $r$=0 и формула (9) принимает следующий вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{R}, \ (11)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ называется падением напряжения на сопротивлении $R$.

Если *неоднородная* цепь не замкнута, то $I$=0 и формула (9) принимает следующий вид

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \varepsilon, \ (12)$$

то есть в этом случае ЭДС равна разности потенциалов на клеммах источника тока.

Для каждого проводника в неизменном состоянии существует однозначная зависимость между разностью потенциалов, приложенной к его концам, и силой тока в нем $I=f(U)$. Эта зависимость называется вольтамперной характеристикой (ВАХ). Для многих проводников, особенно металлических, эта зависимость выражается законом Ома

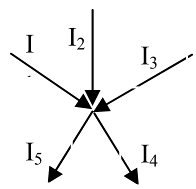
$$I = \frac{1}{R} \cdot U. \ (13)$$

То есть значение силы тока изменяется прямо пропорционально с изменением значения $U$.

Обобщенный закон Ома в интегральной форме позволяет рассчитывать различные электрические цепи.

### 3. Правила Кирхгофа для разветвленных электрических цепей

Расчеты сложных (разветвленных) электрических цепей значительно упрощаются с помощью *правил Кирхгофа* (Г. Кирхгоф, нем. ученый, 1847г.). Любую разветвленную цепь можно представить как совокупность точек разветвления и замкнутых контуров.




*Узлом* называется точка разветвления цепи, в которой *сходится больше двух проводников* с током.

Первое правило Кирхгофа выражает условие постоянства тока в цепи. В случае постоянного тока электрические заряды не должны накапливаться на каком либо участке цепи.

*Первое правило Кирхгофа* гласит: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = 0, \ (14)$$

где $N$– число проводников, сходящихся в узле; $I_k$– сила тока в $k$-м проводнике, причем токи, подходящие к узлу считаются положительными, а токи, отходящие от него– отрицательными

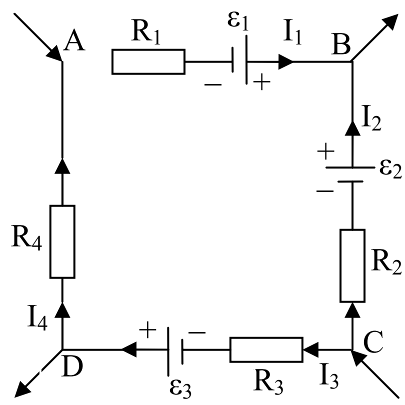
Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома (9) на разветвленные цепи. Второе правило гласит: *в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме Э.Д.С. всех источников электрической энергии, включенных в контур*

$$\sum_{k=1}^{N} I_k \cdot R_k = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k\ , \quad (15)$$

где N– число участков, на которые контур разбивается узлами; $I_k$, $R_k$ и $\varepsilon_k$– сила тока, сопротивление и Э.Д.С. соответствующие *k*-му участку.

При составлении уравнения (15) необходимо выбрать направление обхода контура. Все токи в участках, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, следует считать положительными, а не совпадающие с направлением обхода – отрицательными. Э.Д.С. источников тока считать положительными, если они создают ток, совпадающий с направлением обхода контура. Например, в случае обхода приведенного контура ABCD по часовой стрелке уравнение имеет вид

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 .$$




**Вопросы для самопроверки:**

1. Что понимают под сторонними силами и какова их роль в электрической цепи? Укажите природу сторонних сил.
2. Какой участок цепи называется однородным, и какой неоднородным? Вывести закон Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи. Как выбирается знак Э.Д.С. при записи закона Ома?
3. Пояснить физический смысл разности потенциалов, электродвижущей силы и напряжения на участке электрической цепи. Указать на отличие между этими величинами.
4. Сформулировать правила Кирхгофа. Как выбираются знаки Э.Д.С. и токов при записи правил Кирхгофа?

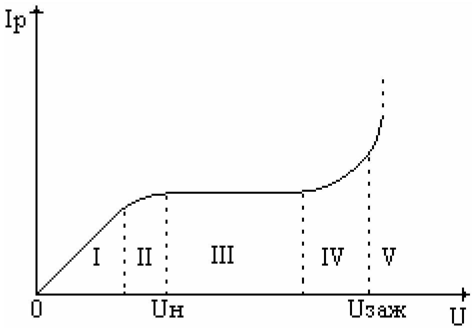
**<u>Тема: Элементы физической электроники</u>**

**1. Работа выхода электрона из металла. Термоэлектронная эмиссия.**

**2. Электрический ток в вакууме.**
**Законы, описывающие ток в вакууме.** $I=B\cdot U^{3/2}$ (для $U_a \geq 0$); $j_{нас} = B' \cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{A}{k \cdot T}\right)$

**3. Электрический ток в газе. Процессы ионизации и рекомбинации. Самостоятельный и несамостоятельный газовые разряды.**

**4. Вольтамперная характеристика газового разряда.**




**5. Типы газовых разрядов. Понятие о плазме.**

**1. Работа выхода электрона их металла. Термоэлектронная эмиссия.**

В классической теории электропроводности металлов электроны проводимости рассматриваются как электронный газ. В этом случае поверхностный слой металла можно рассматривать как стенки сосуда, в котором заключен этот газ. Если какой либо электрон покинет поверхность, то она зарядится положительно и возникнет сила притяжения, препятствующая удалению электрона от поверхности.

Обладая кинетической энергией теплового движения, наиболее быстрые электроны непрерывно покидают поверхность металла. Однако, вследствие возникающей силы притяжения, они могут удалиться от поверхности лишь на расстояния атомных размеров. Таким образом, над поверхностью металла образуется электронное облако.

В первом приближении приповерхностную область металла можно представить в виде двойного электрического слоя и рассматривать как конденсатор с разностью потенциалов $\Delta\varphi$. Для того, чтобы электрон покинул поверхность металла необходимо совершить определенную работу, называемую работой выхода $A_{вых}$.

*Работой выхода называется работа, которую нужно совершить, чтобы переместить электрон проводимости из металла в вакуум.*

В первом приближении работу выхода можно оценить формулой

$$A_{вых}=e\cdot\Delta\varphi, \quad (1)$$

где $e$– заряд электрона.

Работа выхода зависит от химической природы металла и состояния его поверхности, т.е является величиной, характерной для каждого металла.

Работа выхода может быть совершена за счет кинетической энергии теплового движения электронов, которую можно увеличить нагреванием металла. В этом случае процесс испускания электронов называется *термоэлектронной эмиссией.*

*Термоэлектронной эмиссией называется явление испускания электронов металлами при их нагревании.*

2. Электрический ток в вакууме. Законы, описывающие ток в вакууме.

Закономерности термоэлектронной эмиссии можно исследовать с помощью двухэлектродной лампы – вакуумного диода, представляющего собой вакуумированный баллон, содержащий два электрода –катод $K$ и анод $A$. Лампа включается в цепь как показано на рис. 1. Если при разогретом катоде на анод подать положительный потенциал $U_a$ относительно катода, то в анодной цепи возникнет электрический ток. График зависимости силы анодного тока $I_a$ от анодного напряжения $U_a$ (вольт-амперная характеристика) при постоянной температуре катода показан на рис. 2.

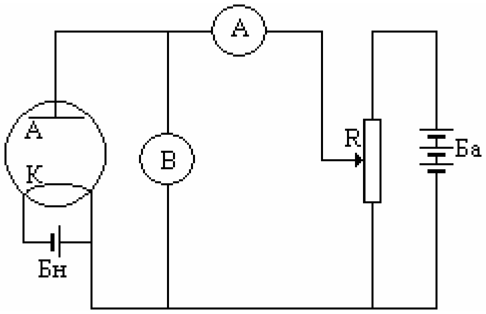



Рис. 1

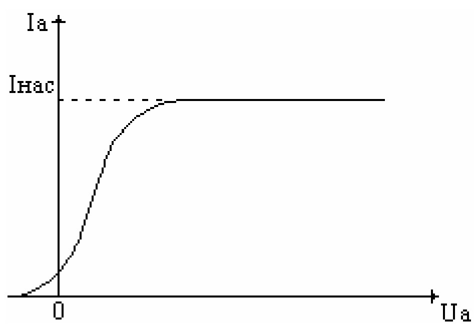



Рис.2

Как видно из рис. 2, сила тока не пропорциональна напряжению. Следовательно, для вакуумного диода закон Ома не выполняется.

Кроме того, так как термоэлектроны вылетают из катода с запасом энергии, то наиболее быстрые могут достигать анода даже при небольших отрицательных значениях анодного напряжения. В области значений силы тока $I_a$ далеких от насыщения вольт-амперная характеристика описывается *законом трех вторых* (установлен российским физиком Богуславским С.А. (1883-1923) и американским физиком Ленгмюром И. (1881-1957))

$$I=B\cdot U^{3/2} \quad (\text{для } U_a\geq 0)\ (2),$$

где $B$ – коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также от их взаимного расположения. В зарубежной литературе приведенный закон называется *формулой Ленгмюра*.

Опыты показали, что плотность тока насыщения очень быстро возрастает с увеличением температуры катода. На основе квантовой статистики теоретически была выведена следующая формула для плотности тока насыщения

$$j_{нас} = B'\cdot T^2 \cdot \exp\left(-\frac{A}{k\cdot T}\right)\ (3),$$

где $A$ – работа выхода электронов из катода, $B'$ – постоянная величина, одинаковая для всех металлов при одинаковых условиях, $T$ – термодинамическая температура. Формула (3) называется *формулой Ричадсона-Дешмана*. Из формулы (3) следует, что с уменьшением работы выхода плотность тока насыщения резко возрастает (экспоненциальная зависимость). Поэтому для получения достаточно больших значений $j_{нас}$ применяют катоды с пониженной работой выхода – оксидные катоды.

3. Электрический ток в газе. Процессы ионизации и рекомбинации. Несамостоятельный и самостоятельный газовый разряды.

*Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом.*

При обычных условиях газы состоят из нейтральных молекул и не содержат свободных электрических зарядов. Следовательно, при обычных условиях газы не проводят электрический ток. Газ становится проводником, если часть его молекул ионизируется.

*Ионизацией называется процесс отрыва электрона от молекулы.*

В результате ионизации образуются ион и свободный электрон. В этих условиях под действием внешней разности потенциалов в газе будет протекать электрический ток. Будет происходить газовый разряд.

Для ионизации молекул необходимо затратить определенную энергию (энергия ионизации или работа ионизации) по отрыву электрона от молекулы. Энергия ионизации характеризуется *потенциалом ионизации*.

*Потенциалом ионизации называется разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем электрическом поле, чтобы увеличение его энергии было равно энергии ионизации.*

Значения потенциалов ионизации для различных веществ лежат в пределах 4-25 эВ.

Ионизация молекул газа может быть вызвана различными внешними воздействиями: нагревом до высоких температур (термическая ионизация), облучением ультрафиолетовыми и рентгеновскими лучами (фотонная ионизация), радиоактивным излучением. Количественной характеристикой процесса ионизации служит интенсивность ионизации, которая определяется числом пар разноименных зарядов, возникающих в единице объема в единицу времени. Одновременно с ионизацией газа в его объеме происходит обратный процесс –*рекомбинация*.

*Рекомбинацией называется процесс превращения заряженной частицы в нейтральную частицу при ее взаимодействии с другими частицами.*

Таким образом, необходимыми условиями существования газового разряда являются возникновение в газе свободных электрических зарядов и наличие в нем электрического поля.

В зависимости от условий возникновения свободных зарядов газовые разряды делятся на несамостоятельные и самостоятельные.

*Несамостоятельным разрядом называется разряд, в котором электропроводность газа создается и поддерживается за счет действия внешнего источника ионизации (внешнего ионизатора).*

*Самостоятельным газовым разрядом называется разряд, который сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора.*

В этом случае электропроводность газа создается и поддерживается за счет процессов, происходящих в самом разряде.

**4. Вольтамперная характеристика газового разряда.**

Закономерности газового разряда можно исследовать с помощью электрической цепи, показанной на рис. 3 и содержащей разрядный промежуток *А-К*, облучаемый ультрафиолетовым излучением, источник питания *Ба*, потенциометр *R* и измерительные приборы. При постоянной интенсивности ультрафиолетового излучения вольт-амперная характеристика разряда имеет вид, показанный на рис. 4.

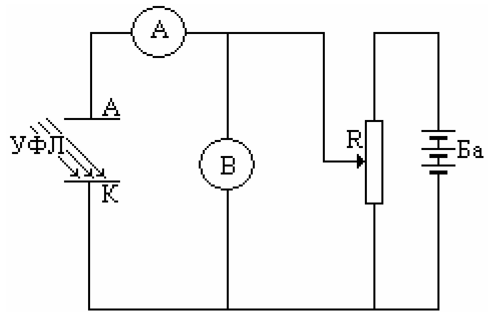



Рис. 3

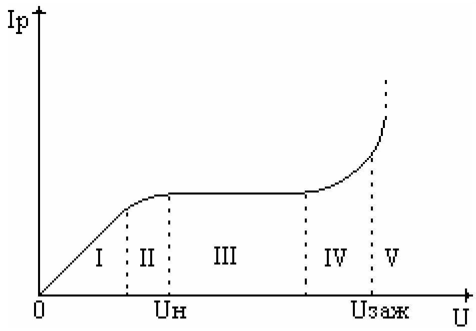



Рис. 4

Вольтамперную характеристику можно разделить на пять характерных областей значений напряжения.

*Несамостоятельный разряд.*

При малых значениях напряжения (область I) сила разрядного тока увеличивается пропорционально с ростом напряжения. В этой области сила тока изменяется по закону Ома, и плотность тока может быть вычислена по формуле

$$j = e \cdot n \cdot (b_+ + b_-) \cdot E \text{ , (4)}$$

где *e* – заряд электрона, *n* – число пар разноименных зарядов в единице объема, $b_+$ и $b_-$ – подвижности положительных и отрицательных зарядов, *E* – напряженность электрического поля.

При дальнейшем увеличении напряжения линейный характер зависимости *I=f(U)* нарушается (область II) и, начиная с некоторого значения напряжения $U_н$, наступает насыщение (область III). Наличие насыщения объясняется тем, что на этом этапе развития разряда возникновение зарядов в газе, взамен уходящим на электроды, целиком обусловлено действием внешнего ионизатора. Число образующихся пар зарядов определяется только мощностью ионизатора. При постоянной мощности ионизатора (*n*=const) и при значениях напряжения равных *Uн* все возникающие заряды достигают электродов.

*Максимальная сила тока, достигаемая при данной интенсивности ионизации называется током насыщения.*

Дальнейшее увеличение напряжения (*U* > *Uн*) приводит к резкому нарастанию силы разрядного тока (область IV). Этот рост силы тока объясняется следующим образом.

Электроны, возникающие под действием внешнего ионизатора, успевают за время своего свободного пробега приобрести энергию, достаточную для того, чтобы столкнувшись с молекулой вызвать ее ионизацию. Этот процесс называется *ударной ионизацией*. Электроны, возникшие в результате ударной ионизации, ускорившись в электрическом поле, в свою очередь вызывают ионизацию других молекул. Таким образом, происходит лавинообразное размножение свободных зарядов, и увеличение разрядного тока. При рассматриваемых значениях напряжения (область IV) выключение внешнего ионизатора приводит к прекращению разряда. Разряд продолжается только до тех пор, пока все ионы и электроны, имеющиеся в газе к моменту выключения ионизатора, не достигнут электродов. Таким образом, при значениях напряжения вплоть до значения $U=U_{заж}$ газовый разряд является несамостоятельным.

*Самостоятельный разряд.*

Для возникновения самостоятельного разряда необходимо, чтобы ионы тоже могли порождать вторичные электроны. Этого можно достичь при относительно больших значениях напряжения $U \geq U$заж (область V), при которых энергия ионов становится достаточной для выбивания электронов из катода. Такой процесс называется *вторичной ионно-электронной эмиссией*. Вторичные электроны в дальнейшем участвуют в ударной ионизации, приводя к резкому увеличению силы тока. В этом случае электропроводность газа поддерживается за счет вторичной ионно-электронной эмиссии и ударной ионизации. Таким образом, при значениях напряжения $U \geq U$заж газовый разряд может существовать независимо от действия внешнего ионизатора, т.е. будет самостоятельным.

*Значение напряжения Uзаж, при котором несамостоятельный газовый разряд переходит в самостоятельный, называется напряжением зажигания.*

Теоретические расчеты и эксперименты показывают, что значение напряжения зажигания определяется произведением давления $P$ газа и расстояния $d$ между электродами. При этом значение $U$заж зависит от химической природы газа и материала катода. Характерный график зависимости $U$заж$=f(p \cdot d)$ показан на рис. 5.

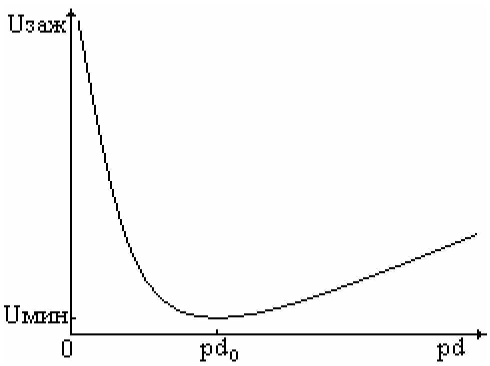



Рис. 5

Как видно из графика, самостоятельный разряд может существовать при различных значениях $U_{заж}$, $p$ и $d$. При этом для каждого газа и материала катода имеется некоторое значение произведения $p \cdot d_0$, при котором значение напряжения зажигания оказывается минимальным. Левая (относительно $p \cdot d_0$) ветвь кривой соответствует различным высоковольтным разрядам низкого давления, тогда как правая ветвь соответствует высоковольтным разрядам.

**5. Типы газовых разрядов. Понятие о плазме.**

Существуют различные виды самостоятельных газовых разрядов, которые отличаются внешним видом и характером физических процессов. Различают следующие характерные виды разрядов:

1 – тлеющий; 2 – коронный; 3 – искровой и 4 – дуговой разряды.

1. Тлеющий разряд возникает при значениях давлениях в несколько *кПа* и ниже и значениях напряжения горения от сотен вольт до нескольких киловольт. Этот тип разряда характеризуется холодным катодом и малой плотностью тока (до сотни миллиампер). Разряд имеет характерные области, главной из которых является так называемая *катодная область*, прилегающая к катоду. Длина катодной области определяется химической природой газа,

материала катода и значением давления. Если анод приблизить к катоду на расстояние меньшее длины катодной области, то тлеющий разряд не возникнет.

Тлеющий разряд нашел применение в лампах «дневного света», иллюминационных лампах, для поверхностной обработки материалов и т.д.

2. Коронный разряд возникает при нормальном давлении газа в сильно неоднородном электрическом поле (около остриев). Этот тип разряда протекает при холодном катоде и малом значении плотности тока (микроамперы) и проявляется в виде светящейся короны. Свечение сопровождает ионизацию молекул воздуха, поэтому коронный разряд используется в различных типах ионизаторов газов. Кроме того коронный разряд используется для очистки газов от примесей и нанесения порошковых и лакокрасочных покрытий.

3. Искровой разряд возникает при нормальном давлении газа и значениях напряжения, более высоких, чем при коронном разряде. Этот тип разряда проявляется в виде сменяющих друг друга ярких, зигзагообразных нитей (или каналов). Электронные и ионные лавины, возникающие в искровых каналах приводят к увеличению давления и температуры. Поэтому искровой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты, ярким свечением и треском. Этот разряд нашел применение в искровой обработке поверхностей. Примером природного искрового разряда является молния.

4. Дуговой разряд возникает как при нормальном, так и повышенном давлениях. Его можно получить из искрового разряда, если уменьшать расстояние между электродами. В этом случае отдельные искровые каналы объединяются в один канал в виде дуги, и значение плотности тока растет до сотен ампер, а значение напряжения падает до десятков вольт. Можно зажечь низковольтную дугу, если первоначально электроды замкнуть, а затем раздвинуть. В любом дуговом разряде электропроводность газа создается и поддерживается термоэлектронной эмиссией с раскаленного катода и термической ионизацией молекул за счет высокой температуры дуги. Температуры катода и дуги зависят от давления. Например, при значении давления $p$=1атм температура *кратера дуги* на катоде достигает $3900^0$С. При больших давлениях газа температура кратера может достигать 6000–$7000^0$С, а температура газа в дуге достигает 5000–$6000^0$С.
Наиболее широко дуговой разряд применяется для сварки и резки металлов, для выплавки металлов и сплавов, а также в качестве интенсивного источника света.

Понятие о плазме.

В некоторых формах самостоятельного разряда образуется сильно ионизированный газ, в котором концентрация положительных и отрицательных зарядов практически одинакова. В этом случае результирующий пространственный заряд практически равен нулю (*квазинейтральное состояние*). Такое состояние газа называется плазмой. О плазме как таковой можно говорить при наличии в газе определенного минимального значения концентрации заряженных частиц. Это минимальное значение концентрация заряженных частиц определяется неравенством

$$L >> D,$$

где $L$ – характерный размер системы заряженных частиц, а $D$ – Дебаевский радиус экранирования, который вычисляется по формуле

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \cdot k \cdot T}{2 \cdot n \cdot q^2}} \quad (5).$$

*Дебаевский радиус экранирования – это минимальное расстояние, на котором происходит экранирование кулоновского поля любого заряда плазмы за счет группировки вокруг него заряженных частиц противоположного знака.*

При большой плотности плазмы ее рассматривают как идеальный газ и к ней применяют классическую электронную теорию электропроводности. Большая концентрация электрических зарядов обоего знака обусловливает большую электропроводность плазмы.

Плазма характеризуется *степенью ионизации* $\alpha$, которая определяется как отношение числа ионизированных атомов и общего числа частиц плазмы. В зависимости от значения $\alpha$ различают *слабоионизированную плазму* (значение $\alpha$ составляет *доли процента*), *умеренно ионизированную плазму* (значение $\alpha$ составляет *до десятков процентов*) и *полностью ионизированную плазму* (значение $\alpha$ близко к *100%*).

В зависимости от значения температуры $T_u$, соответствующей средней энергии теплового движения ионов, различают *низкотемпературную плазму* ($T_u$<$10^5$К) и *высокотемпературную плазму* ($T_u$>$10^7$К).

Вследствие большой электропроводности плазма обладает рядом специфических свойств таких, как: сильное взаимодействие с внешними электрическими и магнитными полями и поверхностью, наличием упругих свойств, приводящих к возникновению и распространению в плазме различных колебаний и волн.

Низкотемпературная газоразрядная плазма, образующаяся при тлеющем, искровом, дуговом и других газовых разрядах, широко используется в различных источниках света, для сварки, резки, плавки и других видов обработки металлов. Плазма служит в качестве рабочего тела в плазменных ракетных двигателях и магнитогидродинамических генераторах.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Что такое термоэлектронная эмиссия? Какими законами описывается электрический ток в вакууме?
2. Что такое газовый разряд, и при каких условиях он возникает?
3. Что такое самостоятельный и несамостоятельный газовый разряд?
4. Описать характерные участки вольтамперной характеристики газового разряда.
5. Что такое напряжение зажигания разряда, и от чего зависит его значение?
6. Охарактеризовать основные виды газового разряда.
7. Что такое плазма газового разряда, и какими свойствами она обладает?

Ляпин Али Ибрагимович, доцент, БРУ

**Тема: Магнитное поле в вакууме. Закон Био-Савара-Лапласа**

1. **Магнитное поле тока. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей.** $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot \left[ d\vec{l}, \vec{r} \right]}{r^3}$; $\vec{B} = \int_0^l d\vec{B}$

**2. Применение закона Био-Савара-Лапласа к расчету магнитного поля:**

**2.1 Магнитное поле прямолинейного проводника с током.** $B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left( Cos\varphi_1 - Cos\varphi_2 \right)$

**2.2 Магнитное поле кругового тока (на его оси).** $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I \cdot \pi R^2}{\left( R^2 + a^2 \right)^{3/2}}$

$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$

**Магнитный момент контура с током.**

**3. Действие магнитного поля на проводник с током. Закон Ампера.** $dF = I \cdot dl \cdot B \cdot Sin\alpha$

**4. Определение силы тока 1А**

**1. Магнитное поле тока. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей.**

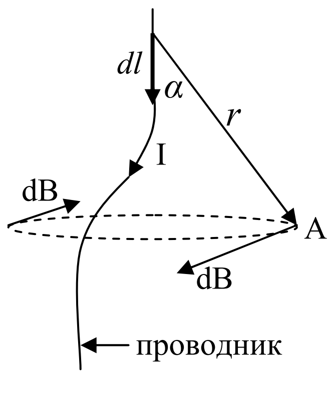
Сведения о магнетизме, накопленные к началу XIX века, позволяли предположить, что магнитные явления тесно связаны с электрическими явлениями. Первым шагом в выяснении природы магнитных явлений стало открытое в 1820г. датским ученым Эрстедом явление отклонения магнитной стрелки, расположенной около проводника с электрическим током. На основании этого и многочисленных последующих опытов был сделан вывод о том, что вокруг проводника с током возникает силовое поле (магнитное поле), действующее на магнитную стрелку. Т.к. ток проводимости представляет собой поток электронов, то естественно было предположить, что магнитное поле порождается потоком движущихся электронов. Однако многочисленные опыты с конвекционным током, током в вакууме показали, что *магнитное поле не зависит от характера заряда и определяется только величиной и направлением тока. Магнитное поле порождается любыми движущимися зарядами.*

Покоящиеся заряды взаимодействуют посредством электрического поля. Это взаимодействие сохраняется при любом движении зарядов. Однако при движении зарядов возникает магнитное поле, обусловливающее появление дополнительного *магнитного взаимодействия*.

Для исследования магнитного поля используется малая плоская рамка с током, так называемый *элементарный контур с током*. По действию магнитного поля на контур с током судят о величине и направлении *магнитной индукции* $\vec{B}$. Магнитная индукция является силовой характеристики магнитного поля и единицей ее измерения является 1Тл.

После открытия Эрстеда начались интенсивные исследования магнитного поля. Французские ученые Ж. Био и Ф. Савар в 1820г. исследовали магнитное поле, создаваемое постоянным током, текущим по проводникам различной формы. Они установили основные закономерности, но им не удалось получить общий закон, позволяющий рассчитывать индукцию поля, создаваемого проводниками произвольной формы. Эта задача была решена французским же ученым П. Лапласом, который обобщил результаты исследований Ж. Био и Ф.Савара в виде закона (*закон Био-Савара-Лапласа*)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I\cdot\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}, \quad (1)$$




где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{Гн}{м}$ – магнитная постоянная, *Гн* (генри) – единица измерения индуктивности, $I$ – сила тока в проводнике, r – радиус-вектор, проведенный от бесконечно малого элемента *dl* проводника в рассматриваемую точку А. *Закон Био-Савара-Лапласа определяет индукцию* $d\vec{B}$ *магнитного поля, создаваемого элементом* $d\vec{l}$ *проводника с током I в точке А с радиус-вектором* $\vec{r}$.

По правилу векторного произведения вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, и его направление определяется правилом правого винта. Если радиус-вектор $\vec{r}$ вращать вокруг элемента $d\vec{l}$, то конец радиус-вектора опишет окружность, в каждой точке которой индукция будет иметь одинаковые значения. Эта окружность называется *линией магнитной индукции* или *силовой линией*. Таким образом, *линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности, охватывающие проводник с током.* Численное значение магнитной индукции определяется формулой

$$dB = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{I\cdot dl\cdot Sin\alpha}{r^2}. \quad (2)$$

П. Лаплас применил к магнитному полю принцип суперпозиции, который в данном случае гласит:

*магнитная индукция* $\vec{B}$ *в каждой точке поля, создаваемого любым проводником с током, равна векторной сумме индукций* $d\vec{B}$ *полей, создаваемых каждым элементом* $d\vec{l}$ *этого проводника.*

С учетом принципа суперпозиции, магнитная индукция, создаваемая некоторым проводником с постоянным током определяется интегрированием формулы (1) по всей длине проводника.

$$\vec{B} = \int_0^l d\vec{B}\ . \ (3)$$

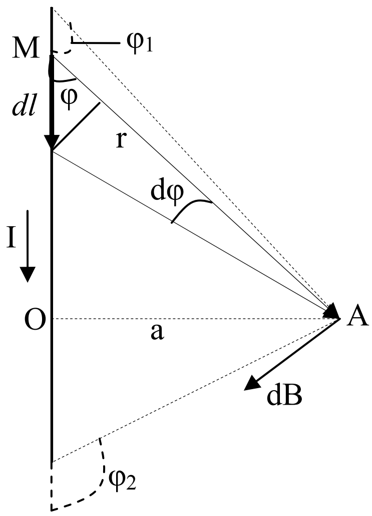
**2. Применение закона Био-Савара-Лапласа к расчету магнитного поля:**
**2.1 Магнитное поле прямолинейного проводника с током.**

Получим формулу для магнитной индукции *B* поля, создаваемого проводником с током *I* в точке *A*, удаленной от оси проводника на расстояние $a$. Элемент $d\vec{l}$ проводника создает в этой точке магнитную индукцию $d\vec{B}$, определяемую законом Био-Савара-Лапласа (1). Из рисунка видно, что векторы $d\vec{B}$ полей, создаваемых в точке *A* всеми элементами $d\vec{l}$ , имеют одинаковые направления, как показано на рисунке. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей. В этом случае формула (3) будет иметь следующий вид

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\cdot\pi} \cdot \int \frac{dl\cdot Sin\alpha}{r^2}\ . \ (4)$$

Приведем подынтегральное выражение к одной переменной $\varphi$. Вследствие малости величины $d\vec{l}$ можно записать следующее соотношение $d\varphi = \dfrac{dl\cdot Sin\varphi}{r}$ (5). Кроме этого из треугольника OAM следует, что $r = \dfrac{a}{Sin\varphi}$ (6). Подстановка (5) и (6) в (4) приводит к следующему выражению

$$B = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi\cdot a}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Sin\alpha\cdot d\alpha\ , \ (7)$$




где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ – углы между радиус-векторами концов проводника и направлением тока. Интегрируя выражение (7) получим формулу для магнитной индукции, создаваемой *прямолинейным проводником конечной длины на некотором расстоянии* $a$

$$B = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi\cdot a}\cdot\left(Cos\varphi_1 - Cos\varphi_2\right).\ (8)$$

Из рисунка видно, что для расстояний $a$ много меньших длины проводника $\varphi_1 \approx 0$, а $\varphi_2 \approx \pi$. В этом случае проводник можно рассматривать бесконечно длинным и магнитную индукцию в точке А определить по формуле

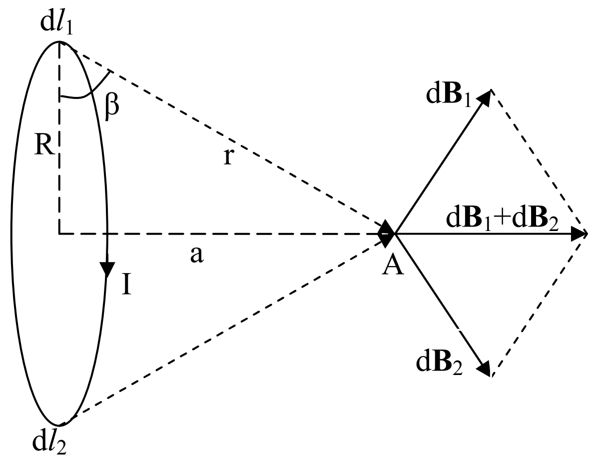
$$B = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\frac{2\cdot I}{a}\ . \ (9)$$

### 2.2 Магнитное поле кругового тока. Магнитный момент контура с током.

Получим формулу для магнитной индукции, создаваемой круговым витком с током *I*, в некоторой точке *A*, лежащей на оси витка на расстоянии $a$ от его центра.

Любые два диаметрально противоположные, равные по длине элемента $\left|d\vec{l}_1\right| = \left|d\vec{l}_2\right| = \left|d\vec{l}\,\right|$ создают в точке *A* поля с равными индукциями

$$\left|d\vec{B}_1\right| = \left|d\vec{B}_2\right| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \ . \ (10)$$




Вектор результирующей магнитной индукции поля этих *двух элементов* лежит на оси витка и его модуль равен

$$\left|d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2\right| = 2 \cdot \left|d\vec{B}_1\right| \cdot Cos\beta = 2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^2} \cdot \frac{R}{r} \ . \ (11)$$

Магнитная индукция *B* поля, создаваемого в точке *A всем витком*, определится интегрированием выражения (11)

$$B = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I \cdot R}{r^3} \cdot dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I \cdot \pi R^2}{r^3} \ . \ (12)$$

Выразив $r$ через радиус *R* витка и расстояние $a$ от центра витка до точки *A*, получим формулу более удобную для расчетов

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I \cdot \pi R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \ . \ (13)$$

*Магнитным моментом плоского замкнутого контура с током I называется вектор* $\vec{p}_m$*, определяемый формулой*

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n} \ , \ (14)$$

где *S* – площадь поверхности, ограниченной контуром (или площадь конура), $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура. Направление вектора $\vec{n}$ связано с направлением тока в витке правилом правого винта. Этим же правилом определяется направление вектора магнитной индукции. Поэтому формулу (13) для магнитной индукции на оси рассматриваемого витка можно записать в следующем виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot \vec{p}_m}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \ . \ (15)$$

Если в формуле (13) расстояние $a$ приравнять нулю, то можно получить формулу для *магнитной индукции в центре кругового витка с током*

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \ . \ (16)$$

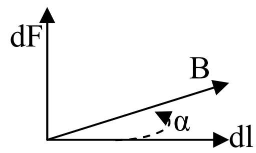
### 3. Действие магнитного поля на проводник с током. Закон Ампера.

Французский ученый А.Ампер, исследуя действие магнитного поля на различные проводники с электрическим током, установил закон (*закон Ампера*), по которому происходит это взаимодействие.

*Сила, действующая на прямолинейный проводник с током со стороны однородного магнитного поля, равна произведению силы тока I в проводнике, длины проводника l, магнитной индукции B и синуса угла* $\alpha$ *между направлением тока и вектора магнитной индукции.*

Математическая формула закона Ампера (силы Ампера) имеет следующий вид

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot Sin\alpha \quad (17).$$




Направление действия силы Ампера определяется правилом правого винта (или левой руки). В случае проводника *произвольной формы*, помещенного в *неоднородное* магнитное поле, формулу (17) записывают для *бесконечно малого элемента dl* проводника, в пределах которого проводник можно считать прямолинейным, а поле однородным. В этом случае формула закона Ампера имеет вид

$$dF = I \cdot dl \cdot B \cdot Sin\alpha \quad (18),$$

или в векторной форме $d\vec{F} = I \cdot \left\lfloor d\vec{l} \cdot \vec{B} \right\rfloor$ (19).

Для того, чтобы вычислить значение силы Ампера, действующей на весь проводник, формулу (19) интегрируют по всей длине проводника с учетом зависимости $\vec{B}$ от координаты.

Из формул (17-19) следует, что если проводник расположен перпендикулярно вектору $\vec{B}$, то сила Ампера будет максимальной и равной

$$dF_{\max} = I \cdot dl \cdot B \quad (20).$$

Выразив из последней формулы величину *B*, получим ее размерность и единицу измерения

$$B = \frac{dF_{\max}}{dl \cdot I} \quad (21) \qquad 1Тл = \frac{1Н}{1м \cdot 1А}.$$

Можно дать такой физический смысл магнитной индукции

*магнитная индукция это векторная физическая величина, численно равная силе, действующей со стороны магнитного поля на единицу длины проводника, по которому течет ток силой 1 А.*

Таким образом, *магнитная индукция является силовой характеристикой магнитного поля*.

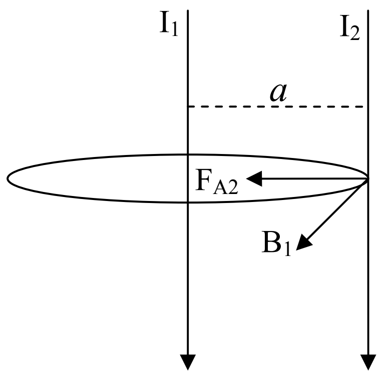
## 6. Определение силы тока 1А

Расположим два длинные прямолинейные проводника с токами $I_1$ и $I_2$, в вакууме на расстоянии $a$ друг от друга. Получим формулу для силы $F_{A2}$, действующей на проводник с током $I_2$ со стороны проводника с током $I_1$. Очевидно, что это будет сила Ампера, которая определяется формулой

$$F_{A2} = I_2 \cdot l_2 \cdot B_1, \quad (22)$$

где *l* – длина второго проводника, а $B_1$ – магнитная индукция, создаваемая первым током в точке, где находится второй проводник. С учетом формулы (9) для искомой силы получим

$$F_{A2} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l_2}{a}. \quad (23)$$




Отметим, что такая же по величине, но противоположно направленная сила $F_{A1}$ будет действовать на первый проводник. Т.е. при совпадении направлений токов в проводниках они будут притягиваться друг к другу.

Из формулы (23) следует, что если по проводникам текут токи 1А и расстояние между ними равно 1м, то сила, действующая на единицу длины проводника, будет равна

$$\frac{F_{A2}}{l_2} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{H}{м} . \quad (24)$$

На основании полученного результата можно дать следующее *определение для силы тока 1А*:

*1А – это сила такого тока, который проходя по двум длинным, параллельным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1м друг от друга, вызывает их взаимодействие с силой* $2 \cdot 10^{-7}$ *Н на каждый метр длины.*

**Вопросы для самопроверки:**

1. Что такое магнитное поле? Какой характеристикой магнитного поля является магнитная индукция?
2. Записать математическую формулу закона Био-Савара-Лапласа и дать определение. Какой вид имеют линии вектора $\vec{B}$ ?
3. Вывести формулу для магнитной индукции прямолинейного проводника с током.
4. Вывести формулу для магнитной индукции в центре кругового витка с током.
5. Какая сила действует на проводник с током в магнитном поле?
6. Дать определение силы тока 1А.

**Тема: Закон полного тока для магнитного поля в вакууме**

**1. Вихревой характер магнитного поля. Циркуляция вектора магнитной индукции.**

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cdot dl\cdot Cos(\vec{B},d\vec{l})$$

**Закон полного тока для магнитного поля в вакууме**

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot\sum_i^N I_i$$

**2. Применение закона полного тока к расчету магнитного пол**

**Магнитное поле тороида (тороидальной катушки)**

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{N\cdot I}{r}$$

**Магнитное поле соленоида**

$$B = \mu_0\cdot n\cdot I$$

## 1. Вихревой характер магнитного поля. Циркуляция вектора магнитной индукции. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме

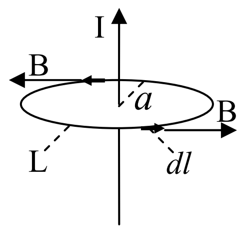
Раньше было показано, что линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой концентрические окружности, охватывающие проводник. Можно показать, что это имеет место для магнитного поля любого тока. То есть *силовые линии магнитного поля замкнуты*. *Поля с замкнутыми силовыми линиями называются вихревыми*. *Следовательно*, *магнитное поле является вихревым*. В этом состоит отличие магнитного поля от *электростатического*, силовые линии которого *не замкнуты*.

*Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L называется интеграл вида*

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cdot dl\cdot Cos(\vec{B},d\vec{l}\,),\ (1)$$

где *dl – элемент контура*.

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{B}$ по некоторому замкнутому контуру *L* с радиусом *α*, охватывающему проводник с силой тока *I*. Для простоты расчетов выберем длинный проводник, и рассматриваемый контур совместим с одной из силовых линий. В этом случае любой из элементов $d\vec{l}$ контура будет совпадать по направлению с вектором $\vec{B}$, значение магнитной индукции в любой точке контура будет одинаковым и интеграл (1) имеет вид




$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot\oint_L dl = B\cdot 2\pi\cdot a\ .\ (2)$$

Магнитная индукция, создаваемая длинным проводником с силой тока *I* на расстоянии $\alpha$, определяется известной формулой

$$B=\frac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot a}\ .\ (3)$$

Подставив формулу (3) в формулу (2) для циркуляции получим

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot I\ .\ (4)$$

Повторив приведенный вывод для другого контура, с другим радиусом, можно убедиться, что циркуляция не зависит от его размера. Можно также показать, что циркуляция не зависит и от формы контура, главное, чтобы контур охватывал проводник с током. Таким образом, формула (4) справедлива для любого контура, охватывающего проводник с током. Циркуляция вектора магнитной индукции по контуру *L*, охватывающему *N* проводников с токами $I_i$, с учетом принципа суперпозиции, определится формулой

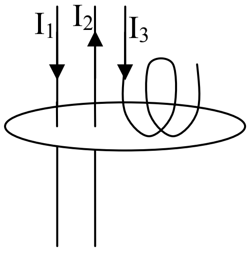
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot\sum_i^N I_i\ ,\ (5)$$

где $\sum_i^N I_i$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром *L*.

Формула (5) является математической формулой *закона полного тока для магнитного поля в вакууме*, которому можно дать такое определение

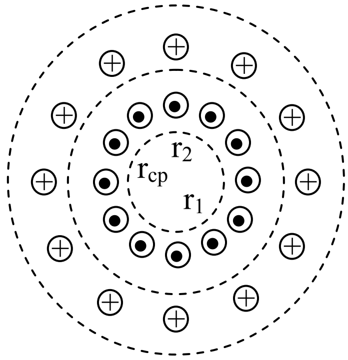
*циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.*

При этом каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Например, для приведенного на рисунке случая $\sum_i^N I_i = I_1 - I_2 + 2I_3$. *Если контур не охватывает ток, то циркуляция вектора $\vec{B}$ по такому контуру равна нулю.*




Закон полного тока справедлив не только в вакууме, но в любой среде. Он позволяет вычислять индукцию магнитного поля без применения закона Био-Савара-Лапласа, что намного облегчает вычисления.

## 2. Применение закона полного тока к расчету магнитного поля
## Магнитное поле тороида (тороидальной катушки)




*Тороидом* называется кольцевая катушка, витки которой намотаны на каркас, имеющий форму тора («бублика»). На рисунке показано сечение тороида плоскостью, проходящей через его осевую линию. Для простоты положим, что витки плотно прилегают друг к другу и намотаны из провода, диаметр которого много меньше радиуса тороида. В этом случае линии магнитной индукции будут иметь форму окружностей, центры которых лежат на прямой, проходящей через центр тороида, и перпендикулярной плоскости чертежа. Применение закона полного тока сводится к выбору контура и расчету циркуляции. По закону полного тока контур может быть любой формы и любых размеров. Для простоты расчетов мы будем выбирать контуры, совпадающие с линиями магнитной индукции. Тогда в любой точке выбранного контура значение магнитной индукции будет одинаковым, и циркуляция будет равна

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi \cdot r \,. \quad (6)$$

Применив закон полного тока, получим

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \sum_i^N I_i \,. \quad (7)$$

Если $r \le r_1$, то такой контур не охватывает токов, $\sum_i^N I_i = 0$, циркуляция равна нулю и $B$=0.

Если $r \ge r_2$, то при числе витков равном $N$ контур будет охватывать $2N$ проводников с током. Причем, в $N$ из них ток течет в одном направлении, а в $N$ – в противоположном. Алгебраическая сумма токов во всех проводниках будет равна нулю, циркуляция будет равна нулю и $B$=0. Таким образом, *вне тороида магнитное поле отсутствует*, оно сосредоточено (локализовано) в области $r_1 < r < r_2$. Контур радиуса $r$, лежащий внутри тороида, охватывает $N$ проводников с током $I$ одного направления. Поэтому по формуле (7) для магнитной индукции внутри тороида получим

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot N \cdot I \text{ или } B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{N \cdot I}{r} \,. \quad (8)$$

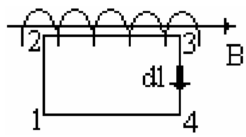
Магнитная индукция на осевой линии тороида определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{N \cdot I}{r_{cp}} \text{ или } B = \mu_0 \cdot n \cdot I \,, \quad (9)$$

где $n = \dfrac{N}{2\pi \cdot R}$ – число витков на единицу длины.

Магнитное поле соленоида

Если неограниченно увеличивать средний радиус тороида, сохраняя неизменным диаметр обмотки и густоту витков $n$, то в пределе получится бесконечно длинная прямая катушка, называемая *соленоидом*. *Магнитная индукция вне соленоида отсутствует,* как и у тороида оно сосредоточено внутри. Причем линии магнитной индукции направлены параллельно оси. Для нахождения магнитной индукции поля соленоида выделим мысленно участок конечной длины $l$ и проведем контур 1-2-3-4-1. Циркуляцию вектора $\vec{B}$ по этому контуру можно представить как сумму циркуляций по отдельным участкам



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B}\cdot d\vec{l}\ . \ (10)$$

На участках 1-2 и 3-4 элементы $d\vec{l}$ контура перпендикулярны вектору $\vec{B}$, поэтому первый и третий интегралы равны нулю (см. формулу (1)). Участок 4-1 лежит вне соленоида, где магнитная индукция равна нулю, поэтому четвертый интеграл в формуле (10) также равен нулю. Следовательно, циркуляция магнитной индукции по контуру 1-2-3-4-1 равна

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_2^3 \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot\int_2^3 dl = B\cdot l\ . \ (11)$$

Теперь применим закон полного тока (5)

$$B\cdot l = \mu_0\cdot N'\cdot I\ , \ (12)$$

где $N'$ – число витков на длине $l$.

Из формулы (12) получим формулу для магнитной индукции соленоида

$$B = \mu_0\cdot\frac{N'}{l}\cdot I \ \text{ или } \ B = \mu_0\cdot n\cdot I\ . \ (13)$$

Как следует из формулы (13), магнитная индукция не зависит от расстояния. Следовательно, *магнитное поле соленоида однородно*.

На практике формула (13) применяется в случаях, когда диаметр $d$ витков катушки много меньше ее длины $l$. Достаточно точные значения для магнитной индукции получаются при отношении $\frac{l}{d} = 10$.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Какие поля называются вихревыми?
2. Что понимают под циркуляцией вектора?
3. Дайте определение закону полного тока для магнитного поля в вакууме.
4. Что такое соленоид? Какой формулой определяется магнитная индукция соленоида? Каким является магнитное поле соленоида?

Ляпин Али Ибрагимович, доцент, БРУ

**Тема: Магнетизм как релятивистский эффект**

1. **Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.** $\vec{F}_Л = q \cdot \left[ \vec{\upsilon}, \vec{B} \right]$

2. **Движение заряженных частиц в магнитном поле.** $R = \left| \frac{m}{q} \right| \cdot \frac{\upsilon}{B}$ **;** $T = \frac{2\pi}{B} \cdot \left| \frac{m}{q} \right|$

3. **Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц.**

4. **Релятивистское толкование магнитного взаимодействия.**

## 1. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.

На проводник с током в магнитном поле действует сила, определяемая законом Ампера

$$d\vec{F}_A = I\cdot\left[d\vec{l},\vec{B}\right] \qquad \text{или} \qquad d\vec{F}_A = \left[I\cdot d\vec{l},\vec{B}\right]. \ (1)$$

Покажем, как из закона Ампера можно получить формулу для силы Лоренца, действующей на отдельную заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле. Для этого рассмотрим величину $I\cdot d\vec{l}$, которая иногда называется *элементом тока*.

Согласно классической теории электропроводности для силы тока проводимости можно записать

$$I = j\cdot S_\perp = q\cdot\upsilon\cdot n\cdot S_\perp, \ (2)$$

где $j$ – плотность тока, $S_\perp$– площадь поперечного сечения элемента проводника, $\upsilon$ – скорость упорядоченного движения заряженных частиц и $n$ – число частиц в единице объема. Умножив обе части выражения (2) на $dl$ получим

$$I\cdot dl = q\cdot\upsilon\cdot n\cdot S_\perp\cdot dl. \ (3)$$

Произведение $n\cdot S_\perp\cdot dl$ дает число $dn$ заряженных частиц в объеме выбранного элемента проводника. Тогда формулу (3) можно записать в виде

$$I\cdot dl = q\cdot\upsilon\cdot dn,$$

или в векторной форме

$$I\cdot d\vec{l} = q\cdot\vec{\upsilon}\cdot dn \ (4)$$

т.к. направления векторов $d\vec{l}$ и $\vec{\upsilon}$ совпадают.

Подставив (4) в (1) получим другой вид формулы для силы Ампера

$$d\vec{F}_A = q\cdot dn\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]. \ (5)$$

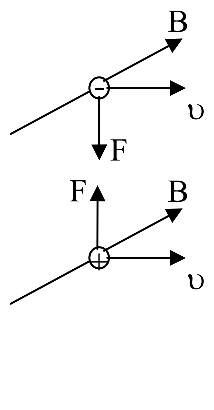
Последнее выражение определяет силу, действующую на $dn$ число заряженных частиц. Поделив силу $d\vec{F}_A$ на это число частиц, получим формулу для *силы Лоренца*, действующей на отдельную заряженную частицу

$$\vec{F}_Л = q\cdot\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]. \ (6)$$

Численное значение силы определяется формулой

$$F_Л = q\cdot\upsilon\cdot B\cdot Sin\left(\vec{\upsilon}\,\hat{}\,\vec{B}\right). \ (7)$$

Таким образом, *сила Лоренца – это сила, действующая на частицу с зарядом q, движущуюся со скоростью υ в магнитном поле с индукцией B*. Так как формула (6) получена из закона Ампера, то *направление силы Лоренца определяется так же, как направление силы Ампера, т.е. правилом левой руки.*




Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно вектору скорости частицы, сообщая ей нормальное ускорение (изменяя лишь направление скорости). *Абсолютное значение скорости заряженной частицы и ее кинетическая энергия в магнитном поле не изменяются. Сила Лоренца не совершает работу.* Следует отметить, что это справедливо только в случае не изменяющихся во времени полей.

В общем случае, когда заряженная частица движется одновременно и в электрическом и в магнитном полях, результирующая сила, действующая на частицу, определяется геометрической суммой сил

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} + q\cdot\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right] \quad \text{или} \quad \vec{F} = q\cdot\left(\vec{E}+\left[\vec{\upsilon},\vec{B}\right]\right), \ (8)$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

## 2. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Полученное выражение для силы Лоренца позволяет установить закономерности движения заряженных частиц в магнитном поле. Из формул (6) и (7) следует, что при *движении заряженной частицы вдоль линии магнитной индукции* ($\vec{\upsilon} \parallel \vec{B}$) *сила Лоренца равна нулю*.

Если частица влетает в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, сила Лоренца будет максимальной и равной

$$F = |q| \cdot \upsilon \cdot B. \quad (9)$$

В любой точке траектории сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости частицы, т.е. она является центростремительной силой. Поэтому

$$|q| \cdot \upsilon \cdot B = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}, \quad (10)$$

где $m$ – это масса частицы, а $R$ – радиус кривизны траектории.

Из формулы (10) выразим $R$

$$R = \left|\frac{m}{q}\right| \cdot \frac{\upsilon}{B}. \quad (11)$$

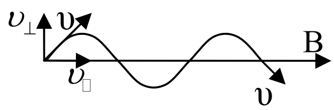
В однородном поле $B$=const и скорость не изменяется по величине. Следовательно, радиус кривизны также будет постоянным. Это означает, что траектория частицы будет представлять собой окружность. Таким образом, *в поперечном магнитном поле* ($\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$) *заряженная частица равномерно вращается по окружности вокруг вектора B*.

Период вращения определяется формулой

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{\upsilon} = \frac{2\pi}{B} \cdot \left|\frac{m}{q}\right|. \quad (12)$$

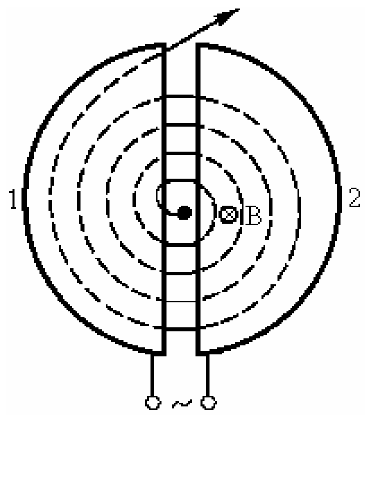
Из формулы (12) следует, что период вращения частицы не зависит от ее скорости.

В общем случае, *когда частица влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом* $\alpha$ *к линиям магнитной индукции, она будет двигаться по винтовой траектории*. В этом случае сила Лоренца изменяет только направление нормальной составляющей скорости, заставляя частицу двигаться по окружности вокруг вектора $B$. В то же время продольная составляющая скорости не изменяется и частица будет равномерно двигаться вдоль вектора $B$.




## 3. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц

Независимость периода $T$ обращения заряженной частицы от ее скорости в однородном магнитном поле используется в ускорителях заряженных частиц. Одним из примеров таких ускорителей является *циклотрон*. Циклотрон состоит из двух дуантов – полых металлических полуцилиндров 1 и 2, разделенных узкой щелью. Дуанты помещены в вакуумную камеру и расположены между полюсами сильного электромагнита. На дуанты подается переменное напряжение, так, что в щели возникает электрическое поле, способное ускорять заряженные частицы. Таким образом, в циклотроне частицы движутся в поперечных электрическом и магнитном полях.




Ускоряемые частицы (чаще всего протоны) вводятся в ускоритель вблизи его центра. Вначале, обладая малой скоростью, частицы описывают внутри первого дуанта дугу малого радиуса. Попадая в электрическое поле между дуантами, они ускоряются и во втором дуанте уже движутся по дуге большего радиуса (см. ф. 11). Снова попадая в электрическое поле, частицы снова ускоряются, увеличивая радиус траектории. Так продолжается до тех пор, пока радиус траектории частиц не сравняется с радиусом дуантов. Такое движение по раскручивающейся спирали достигается тогда, когда период колебаний напряжения между дуантами равен периоду обращения частиц. В этом случае каждый раз при попадании частицы в зазор, она будет ускоряться. В результате многократного ускорения заряженной частицы электрическим полем, ее кинетическая энергия может достигать значений до 20 Мэв. Дальнейшее ускорение частиц в циклотроне становится невозможным из-за релятивистского возрастания их массы и связанного с этим увеличением периода обращения. Для ускорения частиц до больших энергий используются фазотроны.

## 4. Релятивистское толкование магнитного взаимодействия

При движении заряженной частицы со скоростью $\upsilon$ в магнитном поле она будет испытывать на себе действие силы Лоренца. Следует уточнить, что в данном случае речь идет о скорости движения частицы относительно магнитного поля. В системе отсчета, относительно которой заряженная частица покоится, она не будет испытывать на себе действие силы Лоренца. Т.е. магнитное взаимодействие является относительным.

Формулы преобразований Лоренца для компонентов векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ и $\vec{B}$ электрического и магнитного полей при переходе к неподвижной системе отсчета *К* от системы *К'*, движущейся относительно системы *К* равномерно и прямолинейно вдоль оси *X* со скоростью $\upsilon$, имеют следующий вид

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \frac{E'_y + \upsilon \cdot B'_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \qquad E_z = \frac{E'_z - \upsilon \cdot B'_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

$$H_x = H'_x, \qquad H_y = \frac{H'_y - \upsilon \cdot D'_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \qquad H_z = \frac{H'_z + \upsilon \cdot D'_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

$$D_x = D'_x, \qquad D_y = \frac{D'_y + \frac{\upsilon}{c^2} \cdot H'_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \qquad D_z = \frac{D'_z - \frac{\upsilon}{c^2} \cdot H'_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

$$B_x = B'_x, \qquad B_y = \frac{B'_y - \frac{\upsilon}{c^2} \cdot E'_z}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \qquad B_z = \frac{B'_z + \frac{\upsilon}{c^2} \cdot E'_y}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Как это следует из приведенных формул, в неподвижных системах отсчета (при $\upsilon$=0) существуют либо электрическое поле, характеризуемое векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$, либо магнитное поле, характеризуемое векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$.

Прежде, при рассмотрении следствий из преобразований Лоренца, было показано, что релятивистские эффекты (например, сокращение продольного размера и массы тела) проявляются при скоростях, близких скорости света. В то же время, хотя скорость упорядоченного движения электронов проводимости очень мала (порядка $10^{-3}$м/с), между проводниками с токами возникает магнитное взаимодействие. Этот, на первый взгляд, противоречивый результат объясняется очень большой (порядка $10^{28}$м$^{-3}$) концентрацией электронов проводимости в проводнике.

Обобщая сказанное, отметим, что электрическое и магнитное взаимодействия составляют части единого электромагнитного взаимодействия. Существует единое электромагнитное поле, которое, в зависимости от выбора системы отсчета, проявляется в электрическом или магнитном взаимодействиях.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Какое ускорение сообщает заряженной частице сила Лоренца?
2. Зависит ли период обращения заряженной частицы в циклических ускорителях?
3. В чем состоит относительность магнитного взаимодействия?

## Тема: Эффект Холла. Магнитный поток.

**1. Эффект Холла**
**(холловская разность потенциалов)**

$$U = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

**2. Магнитогидродинамический генератор**

**3. Контур с током в магнитном поле**

$$M = p_m \cdot B \cdot Sin\alpha$$

**4. Магнитный поток.**

$$\Phi_B = \int_0^S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

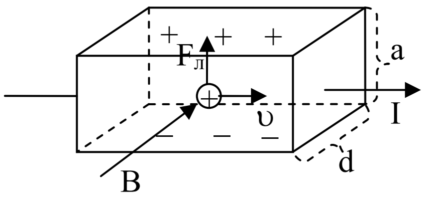
**Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля.**

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

**5. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.**

$$A = \int I \cdot d\Phi$$

## 1. Эффект Холла




Если проводящую пластину с током $I$ поместить в поперечное ($B \perp I$) однородное магнитное поле, то между гранями, параллельными направлению тока и магнитной индукции возникает разность потенциалов (холловская разность потенциалов). Это явление, открытое в 1879г. американским ученым Э. Холлом называется эффектом Холла.

*Эффектом Холла называется явление возникновения разности потенциалов между гранями проводящей пластины с током, помещенной в магнитное поле*.

Экспериментально было установлено, что разность потенциалов $U$ пропорциональна силе тока $I$, магнитной индукции $B$ и обратно пропорциональна ширине $d$ пластины

$$U = R_x \cdot \frac{I \cdot B}{d}, \ (1)$$

где $R_x$ – постоянная Холла.

Выведем формулу для холловской разности потенциалов. Для простоты положим, что все носители тока в проводнике движутся со средней скоростью $<\upsilon>$. На положительные носители действует сила Лоренца, по модулю равная $F_л = q \cdot \upsilon \cdot B$ и вызывающая отклонение носителей к верхней грани пластины. Под действием этой силы на верхней грани будет скапливаться положительный заряд, а на нижней – отрицательный. Между этими гранями возникнет электрическое поле с постоянно растущей напряженностью $E$, препятствующее такому движению частиц. При определенном значении напряженности $E$ сила $F = q \cdot E$, действующая на заряды со стороны электрического поля, сравняется с силой Лоренца

$$q \cdot <\upsilon> \cdot B = q \cdot E \ \ (2)$$

и установится стационарное электрическое поле.

Разность потенциалов $U$ связана с напряженностью $E$ поля известным соотношением

$$U = E \cdot a \ . \ (3)$$

Из формул (2) и (3) получим

$$U = <\upsilon> \cdot B \cdot a \ . \ (4)$$

Среднюю скорость определим из известной формулы $j = q \cdot n \cdot <\upsilon>$ классической теории электропроводности для плотности тока

$$<\upsilon> = \frac{j}{q \cdot n}$$

или, выразив плотность тока через силу тока $I$ и площадь $S = a \cdot d$ поперечного сечения пластины,

$$<\upsilon> = \frac{I}{q \cdot n \cdot a \cdot d} \ . \ (5)$$

Подстановкой формулы (5) в формулу (4) получим искомую формулу для холловской разности потенциалов

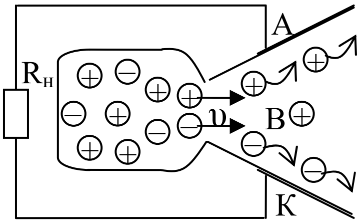
$$U = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \frac{I \cdot B}{d} \ .(6)$$

Сравнивая формулы (6) и (1) получим формулу для постоянной Холла

$$R_x = \frac{1}{q \cdot n} \ . \ (7)$$

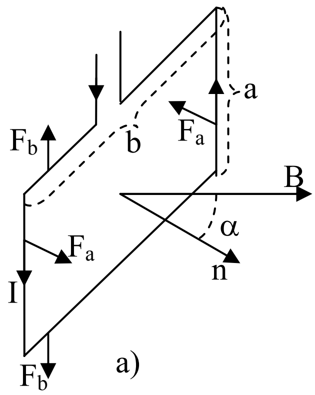
Экспериментально определив знак и значение постоянной Холла можно установить значение концентрации носителей тока в материале и их знак. Этот способ используется для определения типа проводимости полупроводников.

## 2. Магнитогидродинамический генератор




Магнитогидродинамическим генератором (МГД–генератор) называется устройство, предназначенное для непосредственного преобразования внутренней энергии в электрическую. Принцип действия МГД–генератора состоит в следующем. Сильно ионизированный газ (плазма), образующийся в результате сгорания топлива, пропускается через поперечное магнитное поле. Под действием силы Лоренца разноименные заряды накапливаются на электродах *A* и *K*. При замыкании электродов на нагрузку $R_н$ в ней будет протекать электрический ток. В этом случае работа электрического тока совершается за счет уменьшения кинетической энергии струи плазмы.

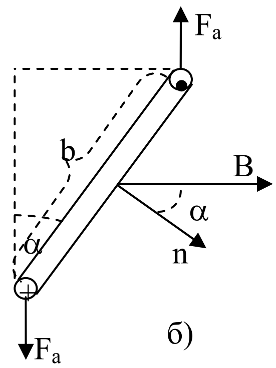
## 3. Контур с током в магнитном поле




Рассмотрим жесткий прямоугольный контур с током *I*, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией *B* (рисунок *а*). На каждую из сторон $a$ и $b$ рамки действует сила Ампера. Силы $F_b$, действующие на стороны $b$, направлены в противоположные стороны и уравновешивают друг друга, стремясь только растянуть рамку. Стороны $a$ перпендикулярны магнитной индукции, и действующие на них силы определяются формулой

$$F_a = I \cdot a \cdot B \quad (8).$$

Т.к. на стороны $a$ рамки действует пара сил $F_a$, то появится вращающий момент, под действием которого рамка будет поворачиваться.




Найдем формулу для вращающего момента, действующего на рамку. Для этого рассмотрим вид сверху (рисунок *б*). Названный вращающий момент определяется известной формулой

$$M = F_a \cdot b \cdot Sin\alpha \;. (9)$$

Подставив формулу (8) в формулу (9) для момента получим

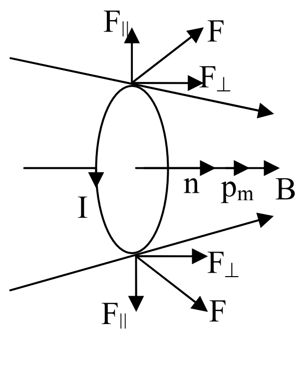
$$M = B \cdot I \cdot a \cdot b \cdot Sin\alpha \;. (10)$$

Произведение сторон $a$ и $b$ рамки дает ее площадь $S = a \cdot b$, а произведение силы тока *I* в рамке и площади, ограниченной ею, равно магнитному моменту $p_m = I \cdot S$. С учетом последних формул получим формулу для вращающего момента

$$M = p_m \cdot B \cdot Sin\alpha \;.(11)$$

Вектор $p_m$ магнитного момента направлен по нормали $n$ к поверхности рамки, а направление вектора вращающего момента совпадает с направлением вектора $\left[\vec{p},\vec{B}\right]$. Поэтому формулу (11) можно представить в векторной форме

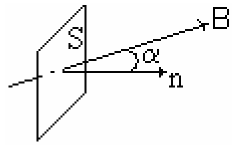
$$\vec{M} = \left[\vec{p} \cdot \vec{B}\right] \;. (12)$$




Из формулы (11) следует, что в магнитном поле рамка с током будет поворачиваться так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна вектору магнитной индукции.

Мы рассмотрели рамку в однородном магнитном поле. В случае неоднородного поля линии магнитной индукции не параллельны и составляют некоторый угол с плоскостью рамки. Поэтому и сила *F*, действующая на рамку, будет составлять некоторый угол с указанной плоскостью. Параллельные составляющие $F_\parallel$ этой силы будут создавать лишь растягивающее усилие. В то же время перпендикулярные составляющие $F_{\perp}$ будут вызывать поступательное перемещение рамки. При указанном на рисунке направлении магнитного момента $p_m$ рамка будет втягиваться в область поля с большей магнитной индукцией. Если направление тока в рамке изменить на противоположное, то она будет выталкиваться из поля. В общем случае на рамку также будет действовать вращающий момент. Действие магнитного поля на рамку с током широко используется в различных электроизмерительных приборах.

## 4. Магнитный поток. Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля.




Рассмотрим *однородное* магнитное поле с *индукцией В*. Поместим в это поле плоскую площадку площадью *S*. Ориентацию площадки в пространстве зададим единичным вектором $\vec{n}$ (*нормалью*), перпендикулярным к плоскости площадки.

*Потоком вектора* $\vec{B}$ однородного поля через *плоскую* площадку *S* называется *скалярная физическая величина*, равная произведению модуля вектора $\vec{B}$, площади *S* и $Cos\alpha$

$$\Phi_B = B \cdot S \cdot Cos\alpha \quad (1) \qquad \text{или} \qquad \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S \quad (2),$$

где $\alpha$– угол между вектором $\vec{B}$ магнитной индукции поля и нормалью $\vec{n}$ к поверхности.

*Поток вектора* $\vec{B}$ *через площадку S численно равен числу силовых линий, пересекающих эту площадку*.

Единицей измерения магнитного потока является *1Вб* (Вебер), *1Вб=1Тл·1м²*.

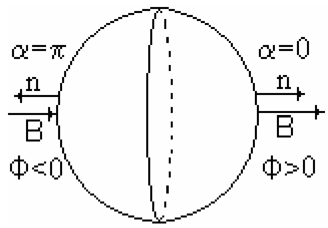
В случае *неоднородного* поля и поверхности *S любой формы* выбирают элемент *dS* поверхности таких малых размеров, что его можно считать плоским, а поле в его окрестности – однородным. Тогда поток через этот элемент *dS* (*элементарный поток*) равен

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3),$$

а полный поток через поверхность *S* вычисляется интегрированием выражения (3) по всей поверхности

$$\Phi_B = \int_0^S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \; (4)$$

Из формулы (1) видно, что значение потока может быть как *положительным* (при $\alpha$<90⁰), так и *отрицательным* (при $\alpha$>90⁰).




При вычислении потока через любую *замкнутую* поверхность за *положительное* направление нормали обычно принимается направление *наружу*. Тогда силовые линии, *выходящие* из объема, ограниченного этой поверхностью, создают *положительный* поток, а входящие в объем создают отрицательный поток.

Поток через замкнутую поверхность вычисляется по формуле

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (5)$$

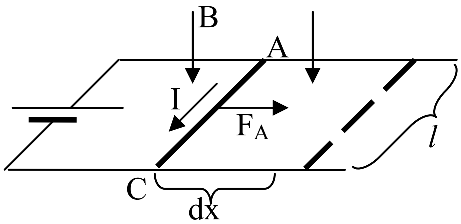
Так как *силовые линии магнитного поля замкнуты*, то каждая линия будет входить в замкнутый объем и выходить из него. В первом случае поток будет отрицательным, а во втором случае – положительным. В итоге поток через замкнутую поверхность будет равен нулю. *Теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля* гласит, что

> *поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через любую замкнутую поверхность равен нулю*.

Математическая формула теоремы имеет следующий вид

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \; . \; (6)$$

5. **Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле**.




Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из двух *закрепленных* проводников, соединенных с источником Э.Д.С., и на которые наложена скользящая перемычка *AC*. В отсутствие магнитного поля энергия источника будет затрачиваться на поддержание электрического тока в цепи и нагревание проводников. При включении магнитного поля скользящая перемычка *AC* будет смещаться под действием возникшей силы Ампера $F_A = I \cdot B \cdot l$. То есть сила Ампера будет совершать работу. На элементарном перемещении $dx$ эта работа определится формулой

$$dA = I \cdot B \cdot l \cdot dx\ . \ (7)$$

Из рисунка видно, что произведение длины $l$ проводника на его перемещение $dx$ равно площади $dS$ поверхности, очерчиваемой проводником при его движении. Поэтому произведение $B \cdot l \cdot dx$ равно магнитному потоку $d\Phi$ через указанную поверхность. С учетом этого получим *формулу для элементарной работы по перемещению проводника с током в магнитном поле*

$$dA = I \cdot d\Phi\ . \ (8)$$

Интегрируя выражение (8) получим *формулу для работы на некотором конечном перемещении*

$$A = \int I \cdot d\Phi\ . \ (9)$$

Таким образом,

*работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока $I$ в проводнике и магнитного потока $\Delta\Phi$ через поверхность, очерчиваемую проводником при его перемещении.*

**Вопросы для самопроверки:**

1. В чем заключается эффект Холла?
2. От чего зависит знак холловской разности потенциалов? Где на практике может быть использован эффект Холла?
3. Что такое магнитный поток, и в каких единицах он измеряется?
4. Как формулируется теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля? Почему магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю?
5. Вывести формулу для работы по перемещению проводника с током в магнитном поле.

## Тема: Явление электромагнитной индукции

**1. Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Правило Ленца.**

**2. Закон электромагнитной индукции.**

$$\varepsilon_{инд} = \oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

**3. Поток сцепленный с контуром.**
**Индуктивность. Индуктивность соленоида.**

$$\Phi = L \cdot I$$
$$L = \mu_0 \cdot \mu \cdot n^2 \cdot V$$

**4. Явление самоиндукции.**

$$\varepsilon_{си} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

**5. Установление тока при замыкании**

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)\right]$$

**и исчезновение тока при размыкании электрической цепи**

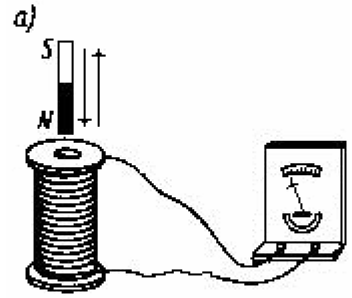
$$I = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)$$

## 1. **Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Правило Ленца.**

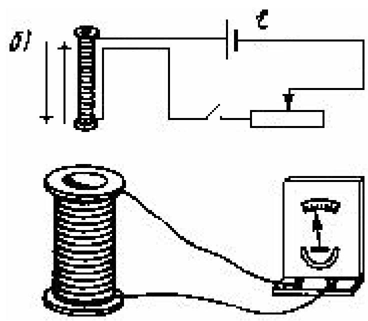
В предыдущих лекциях было показано, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление – магнитное поле вызывает появление электрических токов. Это явление было открыто М. Фарадеем в 1831г. и получило название электромагнитной индукции.

*Электромагнитной индукцией называется явление возникновения ЭДС* (*электрического тока*) *в проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром.*

Электромагнитную индукцию Фарадей наблюдал в следующих опытах:




– при вдвигании или выдвигании магнита в катушку, подсоединенную к гальванометру;




– при приближении или удалении катушки с постоянным током к другой катушке, подсоединенной к гальванометру;
– в случае двух неподвижных, близко расположенных катушек, когда через одну из них протекает изменяющийся ток (например, при включении или выключении источника питания), а вторая подсоединена к гальванометру.

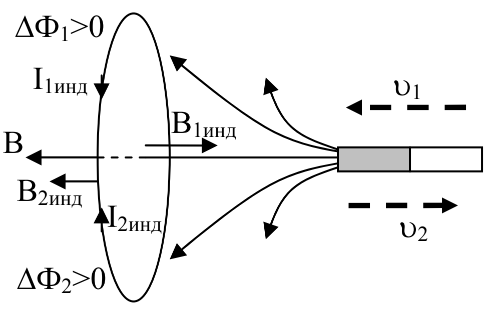
Во всех перечисленных опытах электромагнитная индукция проявляется в отклонении стрелки гальванометра, подсоединенного к катушке.

Такими простыми опытами были установлены основные закономерности электромагнитной индукции:

– причиной возникновения ЭДС индукции является изменение магнитного потока;
– величина ЭДС индукции определяется скоростью изменения магнитного потока;
– знак ЭДС противоположен знаку изменения магнитного потока.

Знак ЭДС определяется общим правилом нахождения направления индукционного тока, *правилом Ленца*:

*индукционный ток всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток*.




При приближении магнита к проводящему контуру магнитный поток $\Phi_1$ увеличивается и в контуре наводится индукционный ток $I_1$, который своим магнитным полем $B_1$ препятствует возрастанию магнитного потока (приближению магнита). При удалении магнита от контура магнитный поток $\Phi_2$ уменьшается и в нем наводится ток $I_2$ противоположного направления, который своим магнитным полем $B_2$ препятствует уменьшению магнитного потока (удалению магнита).

## 2. Закон электромагнитной индукции.

На основе результатов опытов Фарадея и правила Ленца был установлен *закон электромагнитной индукции*, который гласит, что

*ЭДС электромагнитной индукции, возникающая в замкнутом контуре, численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока, охватываемого этим контуром.*

Математическая *формула закона электромагнитной индукции* имеет следующий вид

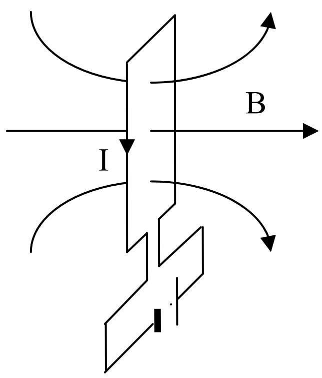
$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}. \ (1)$$

Из формулы (1) следует, что при увеличении магнитного потока ($\Delta\Phi>0$) ЭДС индукции имеет отрицательный знак, а при уменьшении магнитного потока ($\Delta\Phi<0$) ЭДС имеет положительный знак.

Возникновение индукционного тока в неподвижном проводнике английский ученый Максвелл объяснил возникновением в нем электрического поля, которое порождается переменным магнитным полем. Циркуляция вектора напряженности $E_B$ этого поля по любому неподвижному проводящему контуру $L$ представляет собой ЭДС электромагнитной индукции

$$\varepsilon_{инд} = \oint_L \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \ (2)$$

## 3. Поток, сцепленный с контуром. Индуктивность. Индуктивность длинного соленоида.




Если по контуру протекает электрический ток $I$, то вокруг него возникает магнитное поле с индукцией $B$, определяемой законом Био-Савара-Лапласа. Силовые линии поля, пересекая поверхность, охватываемую этим контуром, будут создавать магнитный поток $\Phi$. Этот поток называют *магнитным потоком, сцепленным с контуром* т.к. он создан самим контуром.

Поскольку магнитный поток пропорционален магнитной индукции, а магнитная индукция пропорциональна силе тока, то магнитный поток пропорционален силе тока

$$\Phi = L \cdot I, \ (3)$$

где коэффициент пропорциональности $L$ выражает свойства контура и называется *индуктивностью*. Из формулы (3) можно получить размерность и единицу измерения индуктивности

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{Вб}{А}, \quad \frac{1Вб}{1А} = 1Гн.$$

Получим формулу для индуктивности соленоида длиной $l$, содержащего $N$ витков площадью S. Магнитный поток через один виток определяется формулой $\Phi_B = B \cdot S \cdot Cos\alpha$, а через все витки – следующей формулой

$$\Phi_B = B \cdot S \cdot N. \ (4)$$

Магнитная индукция соленоида вычисляется по формуле

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N}{l} \cdot I. (5)$$

Подставив формулу (5) в формулу (4) для магнитного потока, получим

$$\Phi = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \cdot I \,. \;(6)$$

Сравнивая формулу (6) с формулой (3) получим для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \,. \;(7)$$

Умножив и разделив правую часть формулы (7) на $l$, получим другую формулу для индуктивности соленоида

$$L = \mu_0 \cdot \mu \cdot n^2 \cdot V \,, \;(8)$$

где $n$– число витков на единицу длины соленоида, а $V$– объем соленоида.
Из формул (7) и (8) видно, что индуктивность зависит от числа витков, геометрических размеров соленоида и магнитной проницаемости (сердечника).

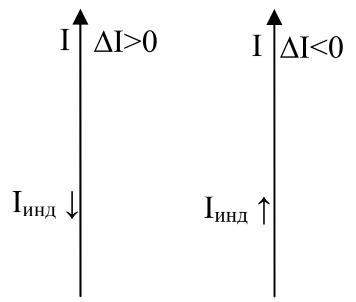
### 4. Явление самоиндукции.

Если сила тока в контуре будет изменяться, то будет изменяться и магнитный поток, сцепленный с контуром. Это приведет к возникновению в контуре ЭДС электромагнитной индукции, которая называется *самоиндукцией*.

*Самоиндукцией называется явление возникновения ЭДС индукции в контуре при изменении в нем силы тока*.

Получим формулу для ЭДС самоиндукции. Для этого формулу (3) подставим в формулу (1) закона электромагнитной индукции (при постоянной индуктивности)

$$\varepsilon_{си} = -\frac{d}{dt}(L \cdot I) = -L\frac{dI}{dt} \,. \;(9)$$



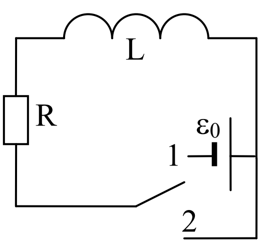

В данном случае причиной возникновения ЭДС является изменение силы тока. По правилу Ленца индукционный ток $I_{инд}$ будет направлен противоположно току $I$ при его увеличении и будет совпадать с током $I$ по направлению при его уменьшении. То есть индукционный ток препятствует изменению тока $I$. Так как значение $I_{инд}$ определяется индуктивностью, то можно сказать, что *индуктивность характеризует инерционные свойства электрической цепи*.

Препятствующее действие ЭДС самоиндукции проявляется в возникновении в цепи переменного тока дополнительного (реактивного) индуктивного сопротивления

$$X_L = L \cdot \omega \,. \;(10)$$

### 5. Установление и исчезновение тока при замыкании и размыкании электрической цепи.

При замыкании и размыкании электрической цепи сила тока в ней изменяется, вследствие чего возникает ЭДС самоиндукции. Эта ЭДС препятствует изменению силы тока. Препятствующее действие ЭДС самоиндукции проявляется в замедлении нарастания силы тока при замыкании цепи и ее убывания при размыкании цепи.




Найдем закон изменения силы тока в цепи, содержащей катушку с индуктивностью $L$, активное сопротивление $R$ и источник постоянного тока с электродвижущей силой $\varepsilon_0$.

В общем случае в такой цепи действуют ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{си} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ и $\varepsilon_0$, и сила тока определяется законом Ома

$$I = \frac{\varepsilon_0 - L\dfrac{dI}{dt}}{R}. \ (11)$$

Произведя разделение переменных в формуле (11) получим

$$\frac{dI}{\varepsilon_0 - I \cdot R} = \frac{1}{L} \cdot dt. \ (12)$$

Интегрирование последнего уравнения при постоянных значениях величин $\varepsilon_0$, $L$ и $R$ приводит к следующему выражению

$$\ln(\varepsilon_0 - I \cdot R) = -\frac{R}{L} \cdot t + \ln C, \ (13)$$

где $C$ – постоянная интегрирования.

Потенциирование формулы (13) дает

$$\varepsilon_0 - I \cdot R = C \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) \ (14).$$

Полагая, что в начальный момент времени $t$=0, $I$=$I_0$, из формулы (14) получим значение постоянной $C$

$$C = \varepsilon_0 - I_0 \cdot R. \ (15)$$

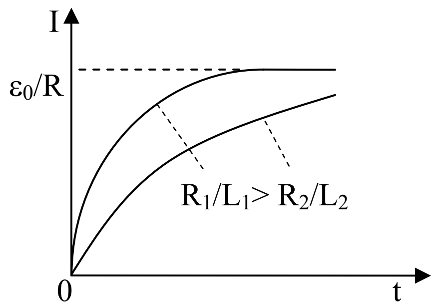
Если подставим (15) в (14), то после несложных преобразований получим

$$I = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) + \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)\right]. (16)$$

*При замыкании цепи* начальное значение силы тока $I_0$=0, первое слагаемое формулы (16) обращается в ноль и *закон нарастания силы тока в цепи имеет вид*

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)\right]. \ (17)$$

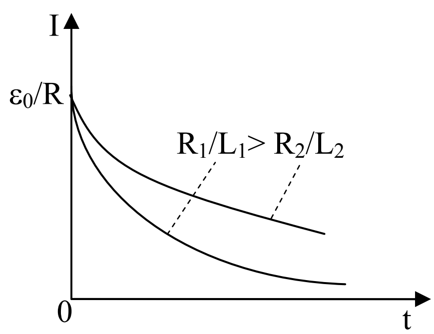
Сила тока нарастает тем медленнее, чем больше индуктивность цепи и меньше ее активное сопротивление.




*При размыкании цепи* (выключении источника) $\varepsilon_0$=0, второе слагаемое формулы (16) обращается в ноль и *закон убывания силы тока в цепи имеет вид*

$$I = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right). \ (18)$$

Сила тока убывает тем медленнее, чем больше индуктивность цепи и меньше ее активное сопротивление.




**Вопросы для самопроверки:**

1. В чем заключается электромагнитная индукция? Что является причиной возникновения ЭДС индукции? Чем определяются величина и знак ЭДС индукции?
2. В чем заключается самоиндукция?
3. Что такое индуктивность, и в каких единицах она измеряется? Какие свойства электрической цепи характеризует индуктивность и в чем это проявляется?
4. От чего зависит скорость нарастания или убывания силы тока в цепи при ее замыкании или размыкании?

**Тема: Магнитное поле в веществе. Закон полного тока для магнитного поля в веществе.**

**1. Магнитное поле в веществе. Макро- и микротоки**
**Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков**

$$\vec{P}_a = \sum_{i=1}^{Z} \vec{p}_{e_i}$$

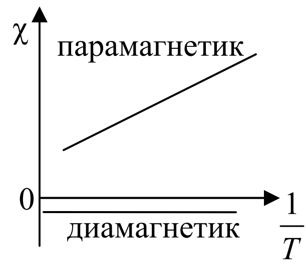
**Намагниченность** $$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_{a_i}$$

**2. Элементарная теория диамагнетизма**

$$\vec{P}_a = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot \left\langle a^2 \right\rangle}{6 \cdot m} \cdot \vec{B}$$

**и парамагнетизма** $$\vec{P}_{a_B} = \frac{P_a^2}{3 \cdot k \cdot T} \cdot \vec{B}$$

**3. Магнитная восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры**




**4. Закон полного тока для магнитного поля в веществе**

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i_{макро}}$$

**Напряженность магнитного поля** $$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H}$$

**Магнитная проницаемость среды** $$\mu = (1 + \chi)$$

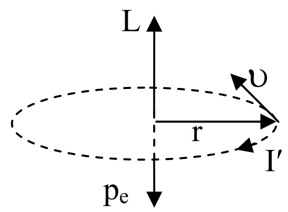
**5. Условия для *H* и *B* на границе раздела двух сред** $$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

## 1. Магнитное поле в веществе. Макро- и микротоки. Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков. Намагниченность.

Вещество состоит из атомов. Согласно классическим представлениям электроны в атомах движутся по замкнутым траекториям. Такое движение каждого электрона эквивалентно контуру с током, который создает свое магнитное поле (микрополе). Если вещество внести во внешнее поле (макрополе), то поле изменится. Чтобы отличить эти два типа полей и создающих их токов вводятся понятия *макроток и микроток*.

*Макротоками называются токи, обусловленные движением свободных электрических зарядов, например ток проводимости.*

*Микротоками* (*молекулярными токами*) *называются токи, обусловленные движением электронов в молекулах.*




Пусть электрон движется со скоростью $\upsilon$ по орбите с радиусом $r$. Через площадку, расположенную в любом месте на пути электрона, за один оборот переносится заряд, равный заряду электрона $e$, а за единицу времени $\frac{e}{T} = e \cdot \nu$, где $T$ и $\nu$ – период и частота обращения электрона. По определению это и есть сила микротока $I' = e \cdot \nu$ .(1) Магнитный момент такого контура с током определится формулой

$$p_e = I \cdot S = e \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \text{ .(2)}$$

Если правую часть формулы (2) умножить и разделить на 2 и учесть, что $2\pi \cdot r \cdot \nu = \upsilon$, то получим другую *формулу для магнитного момента микротока* (*или орбитального магнитного момента электрона*)

$$p_e = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \upsilon \cdot r \text{ . (3)}$$

Для справки.

Как любое тело с массой $m$, вращающееся по окружности, электрон в атоме обладает механическим моментом импульса (орбитальным механическим моментом), определяемым известной формулой

$$L_e = m \cdot \upsilon \cdot r \text{ .(4)}$$

Отношение орбитального магнитного момента $p_m$ электрона и его механического момента называется *гиромагнитным отношением*

$$\Gamma = \frac{e}{2 \cdot m}.$$

Гиромагнитное отношение является важнейшей характеристикой атома и проявляется в так называемых магнитомеханических эффектах.

Магнитные моменты атомов.

Магнитный $\vec{P}_a$ и механический $\vec{L}_a$ моменты атома в целом определяются векторной суммой моментов $\vec{p}_{e_i}$ и $\vec{L}_{e_i}$ всех его электронов

$$\vec{P}_a = \sum_{i=1}^{Z} \vec{p}_{e_i} \text{ (5) и } \vec{L}_a = \sum_{i=1}^{Z} \vec{L}_{e_i} \text{ , (6)}$$

где $Z$ – число электронов в атоме (порядковый номер атома).

Магнитный момент атома определяется числом электронов и ориентацией плоскостей электронных орбит. Поэтому, хотя каждый электрон в атоме обладает магнитным моментом, векторная сумма этих моментов может быть равна нулю.

Типы магнетиков.

В зависимости от того обладают или не обладают атомы собственным магнитным моментом (в отсутствие внешнего поля), вещества делятся на *диамагнетики* и *парамагнетики*.

*Диамагнетиками называются вещества, атомы которых не обладают собственным магнитным моментом*.

К диамагнетикам относятся инертные газы, вода, золото, медь и другие вещества. При внесении диамагнетика в магнитное поле он выталкивается из него. Это означает, что в магнитном поле диамагнетик намагничивается. При этом возникающий магнитный момент направлен противоположно магнитной индукции внешнего поля.

*Парамагнетиками называются вещества, атомы которых обладают собственным магнитным моментом.*

К парамагнетикам относятся кислород, щелочные металлы, алюминий и другие вещества. При внесении парамагнетика в магнитное поле он втягивается в него.

Таким образом, по поведению магнетиков в магнитном поле можно качественно отличить диамагнетик от парамагнетика.

Количественной характеристикой намагниченного состояния вещества служит векторная физическая величина $\vec{J}$, которая называется намагниченностью (или вектором намагниченности), и определяется формулой

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_{a_i}, \quad (7)$$

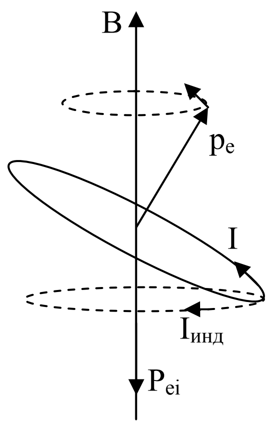
где $N$ – число атомов с магнитным моментом $\vec{P}_{a_i}$ в объеме $\Delta V$.

Из формулы (7) следует, что *намагниченность характеризует магнитный момент единицы объема вещества.*

## 2. Элементарная теория диа- и парамагнетизма.

Поведение магнетиков в магнитном поле можно объяснить на основе классической теории.

Диамагнетизм.




Если вектор $\vec{p}_e$ орбитального магнитного момента электрона составляет некоторый угол с вектором магнитной индукции $\vec{B}$, то вектор $\vec{p}_e$ будет вращаться вокруг вектора $\vec{B}$, описывая конус. Такое движение аналогично движению вращающегося «волчка» и называется *прецессией* (в данном случае ларморовой прецессией).

Частота $\omega_L$ ларморовой прецессии определяется формулой

$$\omega_L = \frac{e \cdot B}{2 \cdot m}, \quad (8)$$

где $e$ и $m$ – заряд и масса электрона соответственно.

Прецессия электронной орбиты приводит к появлению дополнительного движения электрона в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$ и возникновению индуктированного тока $I_{\text{инд}}$. С учетом формул (1) и (8) для индуцированного тока можно записать

$$I_{инд} = \frac{e^2 \cdot B}{4\pi \cdot m}. \quad (9)$$

Этому току соответствует индуцированный магнитный момент $\vec{p}_{e_i}$, равный

$$\vec{p}_{e_i} = I_{инд} \cdot S' \cdot \vec{n} = -\frac{e^2 \cdot \vec{B}}{4\pi \cdot m} \cdot S', (10)$$

где $S'$ – это площадь проекции орбиты $S$ электрона на плоскость перпендикулярную $\vec{B}$. Вектор магнитного момента $\vec{p}_{e_i}$ направлен противоположно $\vec{B}$, поэтому поставлен знак минус. Расчеты показывают, что величину $S'$ можно вычислить по формуле

$$S' = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r_i^2, (11)$$

где $r_i$ – радиус орбиты электрона.

Подставив (11) в (10), получим формулу для индуцированного магнитного момента, соответствующего одному электрону

$$\vec{p}_{e_i} = -\frac{e^2 \cdot r_i^2}{6 \cdot m} \cdot \vec{B}. (12)$$

Чтобы получить магнитный момент атома необходимо просуммировать магнитные моменты всех электронов, т.е.

$$\vec{P}_a = -\frac{e^2 \cdot \vec{B}}{6 \cdot m} \cdot \sum_{i=1}^{Z} r_i^2 .(13)$$

Введя величину $\left\langle a^2 \right\rangle$ среднего значения квадрата расстояния электрона от ядра, сумму в формуле (13) можно заменить следующим выражением

$$\sum_{i=1}^{Z} r_i^2 = Z \cdot \left\langle a^2 \right\rangle. (14)$$

Тогда получим формулу для *индуцированного магнитного момента атома*

$$\vec{P}_a = -\frac{Z \cdot e^2 \cdot \left\langle a^2 \right\rangle}{6 \cdot m} \cdot \vec{B}. (15)$$

Индуцированный магнитный момент атома направлен противоположно магнитной индукции, поэтому диамагнетик выталкивается из магнитного поля.

*Причиной возникновения индуцированного магнитного момента является прецессия электронной орбиты в магнитном поле*. Частота ларморовой прецессии (ф.8) зависит лишь от значения магнитной индукции. Следовательно, индуцированный магнитный момент будет возникать у любых атомов независимо от их природы. Поэтому атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств.

У парамагнитных атомов собственный магнитный момент превышает по значению индуцированный магнитный момент. Поэтому вещества, состоящие из таких атомов, проявляют парамагнитные свойства.

Парамагнетизм.

Классическая теория парамагнетизма была создана П. Ланжевеном (1905). В теории Ланжевена парамагнитные атомы рассматриваются как постоянные магнитные диполи, практически не взаимодействующие между собой. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты диполей ориентированы хаотически вследствие теплового движения атомов. Так, что намагниченность вещества в целом равна нулю.

При включении внешнего магнитного поля на диполи будет действовать вращающий момент, стремящийся ориентировать их по полю. Этому препятствует тепловое движение. В результате, при данном значении магнитной индукции $\vec{B}$ в парамагнетике устанавливается некоторая преимущественная ориентация магнитных моментов по полю и результирующий магнитный момент (намагниченность) вещества становится отличным от нуля.

Результирующий магнитный момент вещества складывается из проекций магнитных моментов $P_{a_B}$ отдельных атомов на направление магнитной индукции. На основе классической статистики Ланжевен получил следующее выражение для среднего значения проекции магнитного момента атома на направление магнитной индукции

$$P_{a_B} = \frac{P_a^2}{3 \cdot k \cdot T} \cdot B, \quad (16)$$

где $P_а$ – магнитный момент атома, $к$ – постоянная Больцмана, $T$ –абсолютная температура. Формула (16) справедлива для слабых магнитных полей и относительно низких температур.

## 3. Магнитная восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры.

С учетом формул (7) и (15) получим *формулу для намагниченности диамагнетика*

$$\vec{J}_{диа} = -\frac{n \cdot Z \cdot e^2 \cdot \left\langle a^2 \right\rangle \cdot \mu_0}{6 \cdot m} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (17)$$

где $n$ – число атомов в единице объема. Таким образом, намагниченность диамагнетика прямо пропорциональна магнитной индукции. Коэффициент пропорциональности обозначается буквой $\chi_{диа}$ и называется *диамагнитной восприимчивостью*

$$\chi_{диа} = -\frac{n \cdot Z \cdot e^2 \cdot \left\langle a^2 \right\rangle \cdot \mu_0}{6 \cdot m}. \quad (18)$$

Диамагнитная восприимчивость отрицательна и ее значение лежит в пределах $10^{-6}$–$10^{-5}$.

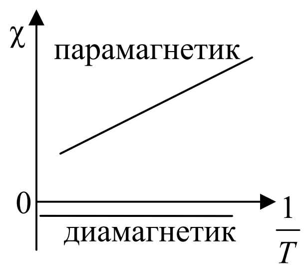
Используя формулы (7) и (16) аналогично получим *формулу для намагниченности парамагнетика*

$$\vec{J}_{пара} = \frac{n \cdot P_{a_B}^2 \cdot \mu_0}{3 \cdot k \cdot T} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (19)$$

В этой формуле коэффициент пропорциональности обозначается буквой $\chi_{пара}$ и называется *парамагнитной восприимчивостью*

$$\chi_{пара} = \frac{n \cdot P_{a_B}^2 \cdot \mu_0}{3 \cdot k \cdot T}. \quad (20)$$

Парамагнитная восприимчивость положительна и ее значение лежит в пределах $10^{-5}$–$10^{-3}$.




Из полученных формул (18) и (20) следует, что если магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры, то при нагревании парамагнетиков их магнитная восприимчивость уменьшается.

Введя понятие магнитной восприимчивости вещества χ можно записать общую формулу для намагниченности

$$\vec{J} = \chi \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{или} \quad \vec{J} = \chi \cdot \vec{H}, \quad (21)$$

где $H$ – напряженность магнитного поля.

В соответствие с классической теорией парамагнетизма магнитная восприимчивость обратно пропорциональна температуре. В то же время опыт показывает, что у большого числа металлических парамагнетиков (хром, ванадий и др.) магнитная восприимчивость не зависит от температуры. Это указывает на ограниченность классической теории.

## 4. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды.

В вакууме магнитное поле может быть создано только макротоками (т.к. вещество отсутствует). В веществе же магнитное поле будет создаваться как макротоками так и микротоками. Закон полного тока, записанный для поля в вакууме можно обобщить, введя в него микротоки

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \left( \sum_i I_{i_{макро}} + \sum_i I_{i_{микро}} \right), (22)$$

где $\sum_i I_{i_{макро}}$ и $\sum_i I_{i_{микро}}$ – это алгебраические суммы макро и микротоков, пересекающих поверхность, натянутую на контур $L$. Как видно на приведенном рисунке, вклад в величину $\sum_i I_{i_{микро}}$ будут вносить только те микротоки, которые оказываются нанизанными на рассматриваемый контур. Токи $I_1$ не пересекают указанную поверхность (не охватывается контуром $L$), а токи $I_2$ пересекают ее дважды в противоположных направлениях. Поэтому вклад этих токов равен нулю. Можно показать, что сумма микротоков равна циркуляции вектора намагниченности по контуру $L$, на который нанизаны микротоки

$$\sum_i I_{i_{микро}} = \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l} \ . (23)$$

Подставив формулу (23) в (22), после несложных преобразований получим *формулу закона полного тока для магнитного поля в веществе*

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i_{макро}} \ . (24)$$

Величина, стоящая в скобках под знаком интеграла обозначается символом $\vec{H}$ и называется *напряженностью магнитного поля*

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \vec{H} \ . (25)$$

С учетом введенного обозначения математическую формулу *закона полного тока для магнитного поля в веществе* можно записать в более компактном виде

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i_{макро}} \ . (26)$$

и дать закону такое определение:

*циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме макротоков, охватываемых этим контуром.*

Из формулы (26) следует, что *напряженность характеризует магнитное поле макротоков и имеет размерность* ***А/м***.

Линии вектора $\vec{H}$ подобно линиям вектора $\vec{B}$ представляют собой концентрические окружности, охватывающие линии тока.

Подставив (21) в (25) получим

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (1+\chi) \cdot \vec{H} \ \text{ или } \ \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H}, (27)$$

где символом $\mu$ обозначена *магнитная проницаемость вещества (среды)* $\mu = (1+\chi)$.

Можно так определить физический смысл магнитной проницаемости среды:

*магнитная проницаемость среды показывает, во сколько раз магнитное поле макротоков усиливается за счет поля микротоков.*

В случае вакуума (и воздуха) $\mu$=1, у диамагнетиков $\mu$ незначительно меньше единицы, а у парамагнетиков незначительно больше единицы.

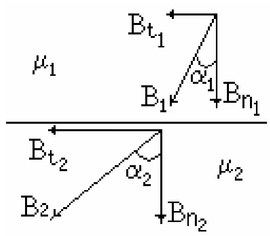
## 5. Условия для *H* и *B* на границе раздела двух сред

На границе раздела двух сред с различными значениями магнитной проницаемости линии векторов магнитной индукции и напряженности испытывают преломление. Можно показать, что нормальные составляющие $B_n$ не изменяются, т.е.

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (28)$$

а для тангенциальных составляющих $B_t$ магнитной индукции справедлив следующий закон преломления

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (29)$$




где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – углы падения и преломления, а $\mu_1$ и $\mu_2$ – магнитные проницаемости первой и второй сред.
(Вывод приведенных формул можно найти в любом учебнике).

Из формулы (29) следует, что при входе в магнетик с большей магнитной проницаемостью угол преломления растет. Т.е. в таком магнетике густота силовых линий будет больше. Поэтому, если в магнитное поле поместить полое тело из вещества с большей магнитной проницаемостью, то значение магнитной индукции в полости будет в $\mu$ раз меньше. Это можно использовать для защиты приборов от действия магнитного поля.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Что понимают под макро- и микротокамми?
2. В зависимости от чего атомы делятся на диа- и парамагнитные?
3. Как в классической теории объясняется возникновение у атомов индуцированного магнитного момента?
4. Как магнитная восприимчивость веществ зависит от температуры?
5. Сформулировать закон полного тока для магнитного поля в веществе. Что такое напряженность магнитного поля?
6. Каков физический смысл магнитной проницаемости среды?

**<u>Тема: Ферромагнетики. Энергия магнитного поля</u>**

1. **Ферромагнетики. Опыты Столетова. Основная кривая намагничивания**
2. **Кривая намагничивания ферромагнетика в переменном магнитном поле Магнитный гистерезис. Точка Кюри**
3. **Доменная структура ферромагнетика, процесс намагничивания.**
4. **Спиновая природа ферромагнетизма.**
5. **Энергия магнитного поля.** $W = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu} \cdot V$

**Объемная плотность энергии.** $w = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu}$

## 1. Ферромагнетики. Опыты Столетова. Основная кривая намагничивания

Особый класс магнетиков образуют вещества, обладающие самопроизвольной (в отсутствие внешнего поля) намагниченностью. Наиболее распространенным представителем этого класса магнетиков является железо. Поэтому такие вещества получили название – *ферромагнетики*.

*Ферромагнетики это вещества, в которых собственное магнитное поле может намного превышать вызвавшее его внешнее магнитное поле.* Например, для железа это превышение может составлять $5{\cdot}10^3$.

К ферромагнетикам кроме железа относятся никель, кобальт, гадолиний, ряд сплавов, а также некоторые металлические стекла.

*Ферромагнетики обладают следующими отличительными свойствами:*

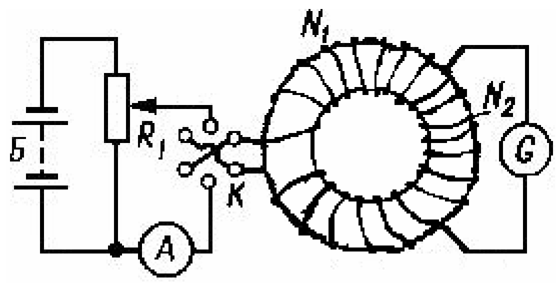
*– нелинейная зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля. В переменном поле эта зависимость имеет вид замкнутой кривой (петли гистерезиса);*

*– большое значение магнитной проницаемости $\mu$ (для супермаллоя $\mu=8{\cdot}10^5$) и ее сложная зависимость от напряженности магнитного поля;*

*– наличие остаточной намагниченности;*

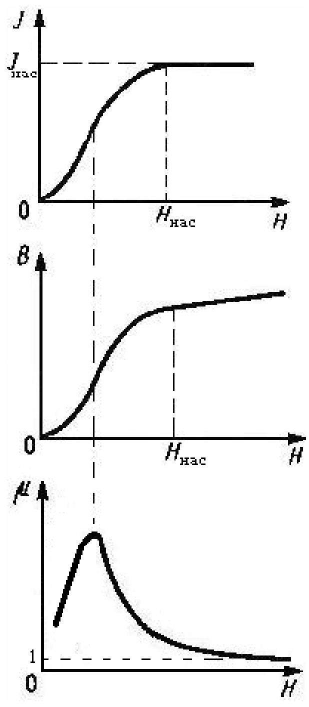
*– наличие температуры Кюри, при которой исчезают ферромагнитные свойства;*

*– изменение линейных размеров и объема при намагничивании (магнитострикция).*




Экспериментальное изучение магнитных свойств железа было начато российским ученым А.Г. Столетовым (1872 г.). Он исследовал зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля. В опытах Столетова кольцо из исследуемого материала использовалось в качестве сердечника трансформатора. Метод исследования заключался в измерении электрического заряда, протекающего по вторичной катушке трансформатора при изменении направления тока в первичной катушке. По измеренному значению $q$ заряда рассчитывалось значение магнитной индукции $B$ в сердечнике по формуле

$$B = \frac{q \cdot R}{2N_2 \cdot S}, (1)$$




где $R$ и $N_2$ – электрическое сопротивление и число витков вторичной катушки, а $S$ – площадь поперечного сечения сердечника. При известном значении силы тока в первичной обмотке и, следовательно, напряженности магнитного поля $H$, определялись магнитная проницаемость $\mu = \frac{B}{\mu_0 \cdot H}$ и намагниченность $J = \frac{B}{\mu_0} - H$ железа.

В результате опытов Столетов установил зависимости намагниченности, магнитной индукции и магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля. На рисунке приводятся основные кривые намагничивания.

Начиная с некоторого значения напряженности $H_н$, намагниченность достигает насыщения $J_н$ и дальше не изменяется. Так как $B = \mu_0 \cdot (H + J)$, то после достижения насыщения магнитная индукция $B$ увеличивается прямо пропорционально напряженности.

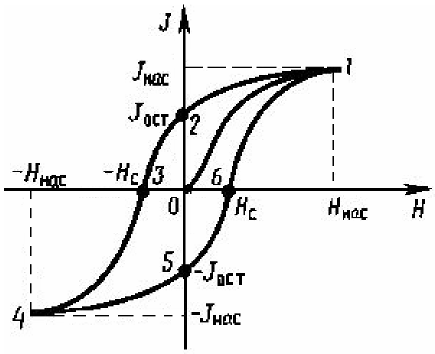
Нелинейная зависимость $\mu$ от $H$ объясняется следующим образом. Магнитная проницаемость определяется формулой

$$\mu = 1 + \frac{J}{H}. \quad (2)$$

При малых значениях напряженности магнитная проницаемость резко возрастает т.к. $J$>>$H$. После достижения насыщения ($J_н$=const) при дальнейшем увеличении напряженности второе слагаемое формулы (2) стремится к нулю, и магнитная проницаемость стремится к единице.
Рассмотренные особенности намагничивания ферромагнетика показывают, что использование ферромагнетиков для получения сильных магнитных полей эффективно при значениях намагниченности, далеких от насыщения.

## 2. Кривая намагничивания ферромагнетика в переменном магнитном поле. Магнитный гистерезис. Точка Кюри

Изучая намагничивание ферромагнетика в переменном магнитном поле, Столетов обнаружил важное его свойство сохранять намагниченность после выключения внешнего поля. Существование остаточной намагниченности делает возможным изготовление постоянных магнитов.




Если намагниченность довести до насыщения, а затем уменьшать напряженность намагничивающего поля, то намагниченность будет изменяться не по первоначальной кривой 01, а по кривой 12. Т.е. при $H$=0 в ферромагнетике наблюдается остаточная намагниченность $J_{ост}$. Чтобы снять остаточную намагниченность необходимо изменить направление напряженности на противоположное. Остаточная намагниченность снимается при некотором значении напряженности $H_с$, которое называется *коэрцитивной силой. Коэрцитивная сила характеризует способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние*.

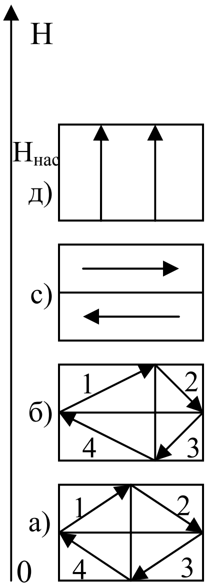
При дальнейшем изменении напряженности намагничивающего поля до $-H_{нас}$ и далее до $+H_{нас}$ получится замкнутая кривая, называемая *петлей гистерезиса*.
Аналогичная петля гистерезиса имеет место и для зависимости $B$ от $H$.
В зависимости от значения коэрцитивной силы ферромагнетики делятся на магнитно-мягкие и магнитно-твердые. К магнитно-мягким относятся материалы с малыми значениями коэрцитивной силы ($H_к$~0,8–8А/м). Такие ферромагнетики используются в качестве сердечников трансформаторов и т.д. Магнитно-твердые материалы характеризуются высокими значениями коэрцитивной силы ($H_к$~$10^4$–$10^5$А/м) и используются для изготовления постоянных магнитов.

Значения магнитной восприимчивости $\chi$ и проницаемости $\mu$ ферромагнетиков уменьшаются с увеличением температуры при любой напряженности намагничивающего поля, гистерезис ослабляется. При достаточно высокой температуре ферромагнитные свойства исчезают вовсе, и ферромагнетик превращается в парамагнетик. *Значение температуры $T_к$, при котором вещество переходит из ферромагнитного состояния в парамагнитное, называется точкой Кюри*. Каждый ферромагнетик имеет свою точку Кюри (например, у кобальта $T_к$=1403К, у железа $T_к$=1043К, у никеля $T_к$=631К). При охлаждении ниже точки Кюри ферромагнитное состояние вещества восстанавливается.
Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное состояние не сопровождается поглощением или выделением теплоты. Поэтому такой переход является примером фазового перехода второго рода.

Остаточная намагниченность ферромагнетика может быть снята ударом. Поэтому постоянные магниты нужно предохранять от ударов.

**3. Доменная структура ферромагнетика, процесс намагничивания**

Классическая теория ферромагнетизма была разработана фр. ученым П. Вейсом (1907г). Вейс предполагал, что при температурах ниже точки Кюри ферромагнетик «разбивается» на *домены – малые области* ($10^{-6}$–$10^{-4}$м) *самопроизвольной намагниченности*.




В отсутствие намагничивающего поля ($H$=0) в пределах каждого домена вещество намагничено до насыщения. Однако векторы $J$ намагниченности отдельных доменов ориентированы так (рис. а), что результирующая намагниченность вещества близка к нулю.

Процесс намагничивания ферромагнетика объясняется следующим образом.

С увеличением напряженности $H$ внешнего поля (рис. б) объем доменов типа *1* и 4, векторы $J$ которых составляет меньший угол с вектором $H$, увеличивается за счет доменов типа *2* и *3*, у которых указанный угол больше. На этой стадии намагничивание является обратимым.

При дальнейшем увеличении напряженности поля (рис. с) домены типа *2* и *3* исчезают вовсе. На этой стадии процесс становится необратимым. При последующем росте напряженности происходит вращение векторов намагниченности доменов, они устанавливаются вдоль вектора $H$ (рис. д) и наступает магнитное насыщение.

На участке наиболее крутого увеличения намагниченности наблюдается *эффект Г. Баркгаузена* (1919), *который проявляется в скачкообразном изменении J при монотонном изменении H*. Эффект Баркгаузена объясняется тем, что дефекты строения кристаллов препятствуют плавному смещению границ доменов при увеличении напряженности поля.

При выключении внешнего поля после достижения насыщения, единственным фактором, влияющим на намагниченность $J$, остается тепловое движение атомов. Однако для «поворота» домена (совокупности атомов) требуется значительная энергия. Поэтому процесс размагничивания при обычных температурах затруднен. Размагничивание наступает при достаточно высокой температуре (точке Кюри).

**4. Спиновая природа ферромагнетизма**

В экспериментах А.Эйнштейна, де Гааза и Барнетта (1915г.) было найдено, что гиромагнитное отношение для железа в два раза превышает значение орбитального гиромагнитного отношения электрона. Это означало, что ферромагнитные свойства не связаны с орбитальным магнитным моментом электрона.

Исследованиями в атомной физике было установлено, что электрон обладает собственным моментом импульса – *спином* и связанным с ним *спиновым магнитным моментом*. Значение «собственного» гиромагнитного отношения электрона в точности совпадает со значением, найденным экспериментально. На этом основании был сделан вывод о том, что *ферромагнитные свойства связаны со спиновым магнитным моментом электрона*, т.е. *ферромагнетизм имеет спиновую природу*.

По современным представлениям природа ферромагнетизма объясняется следующим образом. В атомах ферромагнетиков имеются недостроенные электронные оболочки с нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами. За счет обменного взаимодействия, спиновые магнитные моменты электронов соседних атомов в пределах домена выстраиваются параллельно. Так вещество в пределах домена оказывается намагниченным до насыщения. Возникновение сил обменного взаимодействия между элементарными частицами обсуждается в квантовой механике.

## 5. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии

Вокруг проводника с током существует магнитное поле. При изменении силы тока в проводнике возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая этому изменению. Следовательно, для изменения силы тока в проводнике необходимо совершить определенную работу против этой ЭДС. Названную работу можно формально определить следующим образом. За промежуток времени $dt$ совершается работа

$$dA = \varepsilon_{cu} \cdot I \cdot dt \,. \;(3)$$

Если в (3) учесть, что $\varepsilon_{cu} = -L\dfrac{dI}{dt}$, то получим формулу для работы, которую нужно совершить против ЭДС самоиндукции, чтобы увеличить силу тока в цепи на величину $dI$

$$dA = -L \cdot I \cdot dI \,.(4)$$

Интегрированием выражения (4) в пределах от *0* до $I$ при $L$=const, получим

$$A = -L \cdot \int_0^I I \cdot dI = -\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \,.(5)$$

Совершенная работа превращается в энергию магнитного поля. В этом можно убедиться по равенству углов отклонения стрелки гальванометра при включении и выключении цепи. Поэтому для энергии магнитного поля проводника с током можно написать

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \,. \;(6)$$

Выразим рассматриваемую энергию через характеристики поля. Рассмотрим соленоид с сердечником, для которого индуктивность равна $L = \mu_0 \cdot \mu \cdot n^2 \cdot V$ и магнитная индукция равна $B = \mu_0 \cdot \mu \cdot n \cdot I$. Подставив последние формулы в выражение (6), получим формулу для энергии однородного магнитного поля в объеме $V$

$$W = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu} \cdot V \,.(7)$$

Поделив обе части выражения (7) на объем, получим формулу объемной плотности энергии магнитного поля

$$w = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu} \,.(8)$$

Полученная формула справедлива для диа– и парамагнетиков, у которых магнитная индукция изменяется линейно с изменением напряженности поля.

**Вопросы для самопроверки:**

1. Перечислить отличительные свойства ферромагнетиков. Как объясняется нелинейная зависимость проницаемости $\mu$ от $H$ напряженности у ферромагнетиков?
2. В каком случае не эффективно использовать ферромагнетик для получения сильного магнитного поля?
3. Какое свойство ферромагнетика характеризует коэрцитивная сила?
4. Что понимают под термином «точка Кюри»?
5. Что понимают под термином «домен»? Как в доменной теории объясняется намагничивание ферромагнетика во внешнем поле?

6. Как с помощью формулы объемной плотности энергии вычислить энергию некоторого объема неоднородного магнитного поля?

...нной работы по русскому языку дается ... из 3 частей ...е (А1 – А31). К каждому из них даны ...ко один правильный. ... (В1 – В8). Ответы к этим заданиям вы ...тельно. ... задания (С1) и представляет собой ... тексту (сочинение). ...и в том порядке, в котором они даны. ...кайте задание, которое не удаётся ...следующему. Если после выполнения ... вы можете вернуться к пропущенным

...ности от сложности каждого задания ...ми баллами. Баллы, полученные вами ...руются. Постарайтесь выполнить как ...к можно больше баллов.

**...м успеха!**

***ответа.***

**А1** В каком слове звуков больше, чем букв?

1) ёлочка 2) косится 3) бульон 4) ель

**А2** В каком слове верно выделена буква, обозначающая ударный гласный звук?

1) Инстинкт
2) чЁрпать
3) квАртал
4) Имперский

**А3** В каком предложении вместо слова ВРАЖДЕБНЫЙ нужно употребить ВРАЖЕСКИЙ?

1) Только что родившийся зайчат окружал огромный ВРАЖДЕБНЫЙ мир, пугающий своей агрессивностью.
2) Неожиданно ВРАЖДЕБНЫЙ приём удивил и огорчил приятелей.
3) К исходу месяца ВРАЖДЕБНАЯ оборона была сломлена, и войска вошли в город.
4) Природа нередко рассматривается в произведениях устного народного творчества как ВРАЖДЕБНАЯ сила.

**А4** Укажите пример с ошибкой в образовании формы слова.

1) восемьсот кустарников
2) делав всё необходимое
3) красивый тюль
4) наиболее успешно

**А5** Укажите грамматически правильное продолжение предложения.

**Говоря о богатстве языка,**

1) в аудитории началась дискуссия.
2) у меня возник интерес к этой проблеме.
3) требуются конкретные примеры.
4) мы касались главным образом его словарного запаса.