

## Введение

Человеку неизвестны окончательные истины, а известно только то, что можно сказать об излагаемом предмете, исходя из современного уровня науки. Физики изучают явления, происходящие в неживой природе. На основе опытов и размышлений создаются модели явлений. Эти модели изменяются со временем людьми в зависимости от точности экспериментов, различиях в их осмыслении и иногда в силу конъюнктурных соображений. Применение той или иной физической модели в практической деятельности людей не зависит от возраста модели.

В сферу интересов физиков включены явления, связанные с устройством материи (того из чего построена вся природа) и свойства материи, определяемые этим устройством. Часто, чем ближе к физике, тем ближе к вопросу о том, как устроена материя и почему такое устройство определяет те или иные явления природы. Физические науки всегда находятся в тесном контакте с вопросами высвобождения материей энергии, то есть энергетических ресурсов человечества. Наоборот, к физическим вопросам относятся вопросы о том, - какие явления природы и как указывают на то или иное устройство материи. В силу сказанного, физика часто пересекается с другими науками, поэтому физика универсальна и может до сих пор выделять из себя другие новые науки. Конечно, современная физика многолика, и нередко специалисты из разных ее областей не понимают друг друга. Но основные факты и теории современной физики относят к совокупности знаний, составляющих содержание общей культуры человечества. И в наш век нельзя быть образованным человеком, не зная основных идей физики, ее прошлого и настоящего.

Изучая различные разделы физики, мы с вами попытаемся понять и объяснить явления природы, которые окружают нас. В физике изучаются формы движения материи, в чем и состоит предмет физики. Условно материя делится на поле и вещество. Вещество - все окружающие нас тела, которые мы можем наблюдать с помощью наших органов чувств.

Поля - объекты, посредством которых происходят различные взаимодействия. Поля мы можем наблюдать лишь опосредствованно через движение вещества и с помощью физических приборов. Физические приборы являются как бы дополнительными органами чувств человека.

Методом исследования в физике является опыт, эксперимент. Только эксперимент может служить прямым доказательством наличия того или иного физического закона. Теория сильна тем, что может предсказывать физические законы помимо эксперимента (хотя чаще в связи с экспериментом), но единственным доказательством справедливости закона служит только опыт, эксперимент. Точность знания законов в физике ограничена точностью экспериментов.

Мы живем в трехмерном мире. Для его количественного описания французским физиком, математиком и философом Рене Декартом (17 в.) предложена прямоугольная система координат.

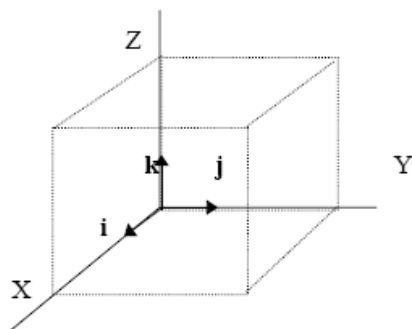


Рисунок 1 – Оси декартовой системы координат:  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  - называются ортами осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$

Орты указывают направление осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и имеют единичную длину, то есть их модули равны единице. В систему отсчета входит система координат и тело отсчета. В принципе существует много систем координат (сферическая, полярная, цилиндрическая, криволинейная и т.п.), которые используются при описании движения, но мы ограничимся только декартовыми (или прямоугольными). При этом за тело отсчета может быть выбрано любое абсолютно твердое тело (или любая точка на абсолютно твердом теле).

Чтобы далее работать с этими величинами, необходимо определиться в системе единиц измерения – мы работаем в международной системе единиц, принятой в большинстве стран мира, “SI” - System International.

Традиционно рассмотрение физики начинается с раздела «Механика».

## **1 Кинематика поступательного и вращательного движения**

### **§ 1.1 Элементы кинематики материальной точки**

*Механика изучает одну из простейших и наиболее общих форм движения материи, называемую механическим движением.*

*Механическое движение есть изменение с течением времени положения одного тела относительно другого, условно принятого за неподвижное. Так, механическое движение совершают планеты, обращающиеся по замкнутым орбитам вокруг Солнца, различные тела, перемещающиеся по поверхности Земли, и т.д. Любое движение тела можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений.*

*Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, связанная с твердым телом, перемещается параллельно самой себе, т.е. поступательное движение – это движение при котором все точки тела перемещаются вдоль параллельных прямых.*

*Вращательное движение – движение, при котором точки твердого тела перемещаются по концентрическим окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.*

Раздел механики, называемый *кинематикой*, посвящен изучению механического движения тел лишь с геометрической точки зрения, т.е. только как зависимость между положением тела в пространстве и временем вне зависимости от причин, вызывающих движение.

Мы с вами определили, что механическим движением называется изменение положения предмета относительно заданной системы отсчета. В природе не существует абсолютного движения, всякое движение имеет относительный характер: либо одного тела относительно другого, либо относительно выбранной системы отсчета. Возникает вопрос, все ли системы отсчета являются равноправными, а если нет, то какие являются предпочтительными. Единственное и естественное требование к системе отсчета состоит в том, что ее выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел, т.е. законы движения в выбранной системе отсчета должны иметь наиболее простой вид. В частности, в такой системе должны оставаться неизменными свойства пространства и времени: пространство должно быть однородным и изотропным, а время однородным.

**Однородность** пространства и времени означает, что наблюдаемые физические свойства и явления должны быть одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени. Не существует выделенных в каком-либо отношении точек пространства и моментов времени.

**Изотропность** пространства означает, что все направления в пространстве равнозначны. Физические явления в замкнутой системе не должны изменяться при ее повороте в пространстве.

Оказывается, что выбор системы отсчета является непростым делом, так как требуемым условиям отвечает специальный класс физических объектов. Если «привязать» неподвижную систему координат к какому-либо произвольно движущемуся объекту, например к вагону поезда, можно заметить, что в данной системе отсчета сразу произойдут странные явления, например, груз, подвешенный на нити, будет время от времени отклоняться от вертикали (что связано с действием различных ускорений вагона: при торможении, ускорении или поворотах). В результате для описания этих явлений в данной системе координат придется прибегнуть к представлениям о взаимодействиях, внешних по отношению к системе, и включить их в рассмотрение. В то же время ясно, что в другой системе координат, не испытывающей указанных ускорений, описание механических явлений будет гораздо проще. Другой пример не очень подходящей системы отсчета — неподвижная система, связанная с Землей. В этой системе можно, например, обнаружить вращение плоскости колебаний физического маятника (на самом деле связанное с вращением Земли вокруг своей оси), для объяснения которого нам также придется привлекать физические причины, являющиеся посторонними по отношению к данной системе отсчета. Вместе с тем, как показывает опыт, по отношению к Солнцу и звездам маятник будет вести себя стабильно, т.е. Солнце и звезды являются подходящими физическими объектами для выбора указанной системы отсчета.

Как показывает опыт, нужным требованиям удовлетворяют системы отсчета, которые связаны с физическими объектами, не испытывающими

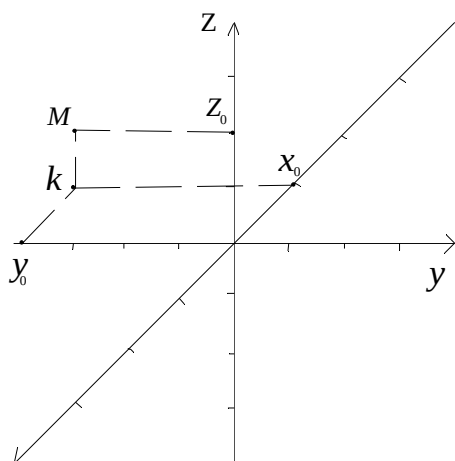
внешних воздействий, т.е. не подвергающимся каким-либо ускорениям. В таких системах отсчета тела находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на них не действуют другие тела. *Свойство тела сохранять такое состояние называется инерцией*, и поэтому системы отсчета, о которых "идет речь, носят название *инерциальных*. Если наряду с выбранной инерциальной системой, рассмотреть *другую, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно*, то свободное движение тела в новой системе будет также происходить с постоянной скоростью. Таким образом, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы законы механики. Не существует никакой абсолютной системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам.

Простейшим объектом для изучения механического движения может служить *материальная точка*.

*Материальной точкой можно считать любой объект, если его геометрические размеры малы по сравнению с характеристическими расстояниями конкретной задачи.* В этом случае мы рассматриваем некоторую модель – это твердое тело с некоторой массой, но пренебрежимо малыми размерами, т.е. это **точка, имеющая массу**. Отметим, что *твердым телом мы будем называть тело, деформацией которого в рассматриваемой задаче можно пренебречь*.

### 1.1.1. Кинематические характеристики механического движения точки

Процесс измерения положения произвольной точки М в декартовой системе координат состоит в следующем (рис. 2).



**Рисунок 2** – Определение положения точки в декартовой системе координат

Из точки М опускают перпендикуляры на ось  $(X_0)$  и  $OY (Y_0)$ . Три значения  $XYZ$  (координаты точки М) однозначно определяют положение точки в пространстве в данный момент времени и относительно данной системы отсчета (система координат всегда связана с телом отсчета, которое обычно не рисуют).

При движении точки ее положение изменяется, изменяются и ее координаты с течением времени. Итак, в результате измерений координат точки  $M(x,y,z)$  в различные моменты времени получается система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

*Эта система носит название системы кинематических уравнений движения материальной точки.*

При использовании математического описания событий желательно иметь компактную запись, позволяющую проводить операции независимо от выбора осей координат. Для этого в математике используются векторные величины. В нашем случае надо взять такие векторные величины, которые соответствуют результатам реальных измерений ( $x, y, z$ ). Возьмем декартову систему координат и отложим единичные вектора вдоль осей, они называются орты,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (рис. 3).

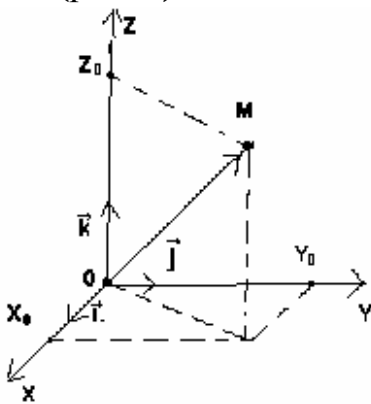


Рисунок 3 – Определение радиуса-вектора точки

*Проведем из начала координат в точку M, имеющую координаты  $x, y, z$  вектор, обозначим его  $\vec{r}$  и назовем радиус-вектором.*

Согласно общим правилам

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

где  $x, y, z$  – координаты конца вектора, т.е. точки M.

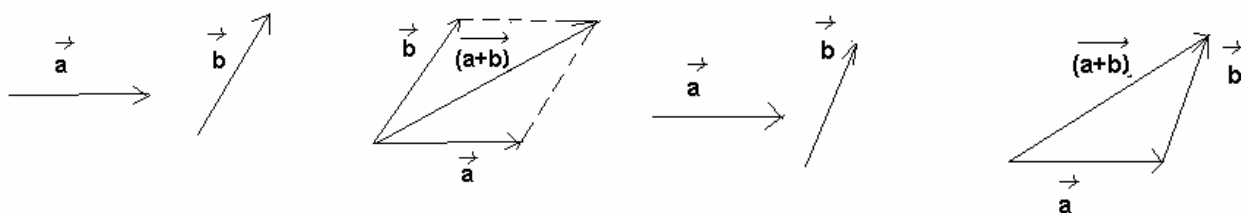
Так как в данной системе координат  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  постоянны по величине и направлению, то при движении точки M вектор  $\vec{r}$  можно представить тройкой изменяющихся чисел ( $x, y, z$ ), т.е. совокупностью координат точки M. Тогда систему кинематических уравнений (1) можно заменить одним эквивалентным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.2)$$

## Векторы

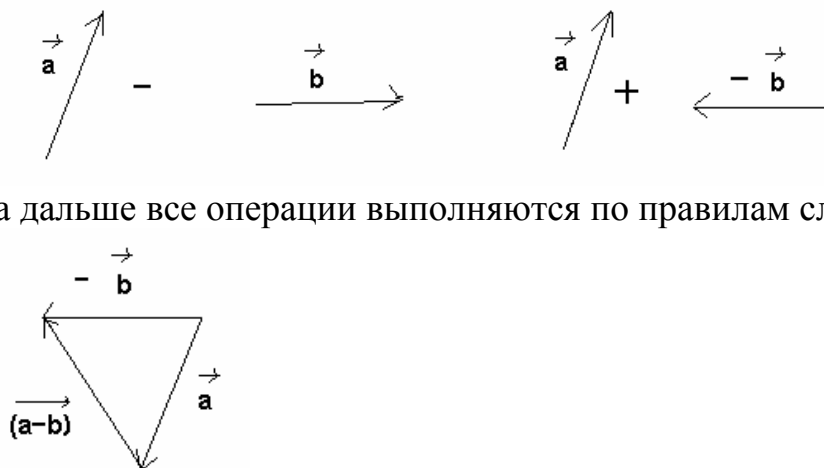
Векторы – физические величины, имеющие направление, ("вектор  $\vec{a}$ "). В декартовой системе координат  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ .  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – базисные векторы (орты декартовой системы координат), а  $x, y, z$  – компоненты вектора. Т.к. векторы характеризуются направлением и величиной, то складывать их нужно особым образом. Вектора складываются по правилу параллелограмма, для этого

совместим начала векторов параллельным переносом и проведем в полученном параллелограмме диагональ



**Рисунок 4** – Методы сложения векторов: а) метод параллелограмма, б) метод треугольника

**Вычитание** векторов осуществляется несколько сложнее: введем отрицательный вектор, который имеет ту же величину, что и исходный вектор, но обратное ему направление,

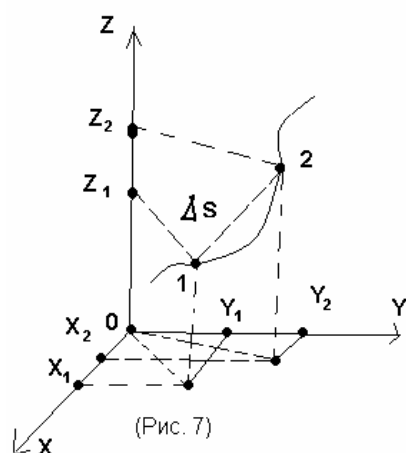


а дальше все операции выполняются по правилам сложения.

Перейдем к рассмотрению других основных кинематических величин.

**Перемещение** – физическая величина, которая характеризует изменение положения тела за время движения.

Для определения перемещения как физической величины с помощью приборов, надо измерить длину отрезка, соединяющего начальное и конечное положение тела и его направление (рис.7). Перемещение точки можно найти, используя координатную систему.



Пусть в момент времени  $t_1$  точка находилась в положении 1 ( $x_1, y_1, z_1$ ). Пусть за время  $t$  точка перешла из положения 1 в положение 2 ( $x_2, y_2, z_2$ ). В этом случае она совершила перемещение  $\Delta S$ , которое характеризуется изменением измеряемых координат

$$\Delta x = x_2 - x_1;$$

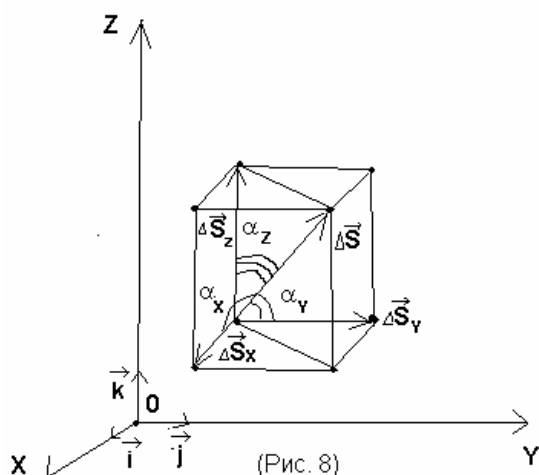
$$\Delta y = y_2 - y_1;$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

Зная  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  можно найти величину перемещения

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

а его пространственное положение будет характеризоваться углами  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ , которые также находятся с помощью  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  (рис.8)



(Рис. 8)

$$\cos \alpha_x = \frac{\Delta x}{\Delta S}; \cos \alpha_y = \frac{\Delta y}{\Delta S}; \cos \alpha_z = \frac{\Delta z}{\Delta S}$$

Для математического описания перемещения точки вводят вектор перемещения  $\Delta \vec{S}$ . При этом если ввести в рассмотрение радиус-векторы, то  $\Delta \vec{S} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,

где  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  - радиус-векторы точки в моменты времени  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$  и  $\Delta \vec{r} = \vec{i} \Delta x + \vec{j} \Delta y + \vec{k} \Delta z$ ,

т.е. характеризуется тройкой чисел  $\Delta \vec{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  (рис.9).

**Траектория** точки – линия в пространстве, которую описывает точка в процессе своего движения.

Существуют различные экспериментальные способы определения траекторий, например фотографирование тела в процессе его движения и т.п.

Зная кинематические уравнения движения, траекторию можно определить, используя математические операции. Для этого нужно в кинематических уравнениях движения исключить время. Таким образом, например, в случае движения в плоскости XOY, с помощью математических операций кинематические уравнения движения

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

надо привести к виду  $y = f(x)$  – это и будет уравнение траектории.

**Скорость** как физическая величина характеризует изменение положения тела в единицу времени.

Средняя скорость материальной точки в данной системе отсчета на интервале времени  $t, t + \Delta t$  равна отношению перемещения точки за данный интервал времени  $\Delta S$  к величине этого интервала  $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

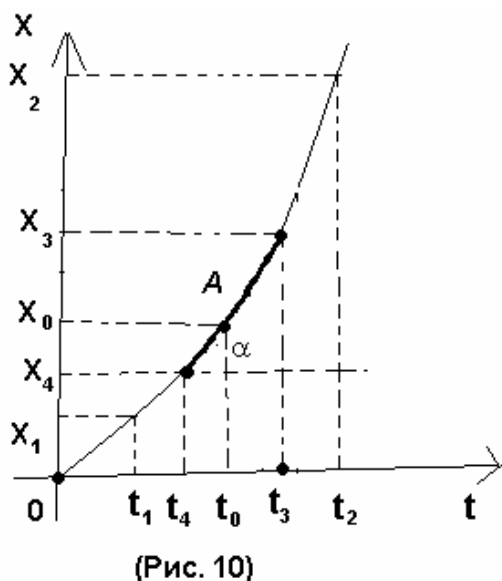
$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta t}$$

При этом направление скорости совпадает с направлением перемещения. В рамках модельного представления с использованием радиус-вектора системы.

Таким образом, средняя скорость точки есть вектор  $\vec{V}$ , равный отношению вектора перемещения из начальной точки в конечную,  $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  к величине интервала времени

$$\vec{V}(t, \Delta t) = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{i} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \vec{j} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \vec{k} \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

**Мгновенная скорость** – это скорость в данный момент времени, т.е. для ее измерения нужно определить  $\vec{V}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , что невозможно. В этом случае поступают следующим образом. Возьмем зависимость координаты  $x$  от времени:  $x = f(t)$ . Пусть момент времени, для которого надо определить скорость, будет  $t_0$ . В этот момент точка  $A$  характеризуется координатой  $x_0$ :  $A(x_0, t_0)$  (рис. 10)



Возьмем интервал времени  $\Delta t$  (который включает точку  $t_0$ ) в течение которого координата точки изменится на  $\Delta x$ . Отношение  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  есть средняя скорость точки на интервале  $\Delta t$ . Будем уменьшать интервал  $\Delta t$  так, чтобы точка  $t_0$  все время оставалась внутри интервала. Начиная с некоторого интервала  $\Delta t_1$  в пределах точности измерений зависимость  $x = f(t)$  становится линейной, т.е. на интервале  $\Delta t_1$  отношение  $\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$  постоянно. Это значит,

что при дальнейшем уменьшении интервала  $\Delta t$  уменьшается и  $\Delta x$ , но их отношение остается тем же. Это значение и будет измеренной скоростью точки в данный момент времени, т.е. мгновенной скоростью.

Таким образом, процедура измерения мгновенной скорости  $V_{\text{мгн}}$  сводится к процедуре измерений средней скорости, но только в границах тех временных интервалов, в которых имеет место линейная зависимость перемещения от времени.

Математический эквивалент физической величины «Мгновенная скорость» находится с помощью математических операций: он находится как предел средней скорости при стремлении  $\Delta t \rightarrow 0$ . Т.е. производная радиус-вектора по времени

$$\vec{V}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} = (\vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}) = \vec{i} \cdot V_x + \vec{j} \cdot V_y + \vec{k} \cdot V_z$$

Если кинематическое уравнение движения точки вдоль прямой имеет вид

$$x = A + Bt + Ct^2, \text{ то } V = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct$$

**Ускорение точки**



*Среднее ускорение точки в данной системе отсчета на интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  есть физическая величина, равная отношению приращения скорости  $\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$  на этом интервале к величине интервала времени*

$$a(t, \Delta t) = \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Ускорение величина векторная. Математический эквивалент среднего ускорения точки в данной системе отсчета на интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  есть вектор  $\vec{a}$ , равный отношению вектора приращения вектора скорости  $\Delta \vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$  к величине интервала времени

$$a(t, \Delta t) = \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение как физическая величина должно быть измерено. Измерение мгновенного ускорения сводится к процедуре измерений среднего ускорения, только в границах тех временных интервалов, в которых имеет место линейная зависимость скорости от времени (по аналогии со скоростью). Математически ускорение находится как предел среднего ускорения при стремлении  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(t, \Delta t) = \lim \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt} = \vec{r} = (\vec{i} \frac{dV_x}{dt} + \vec{j} \frac{dV_y}{dt} + \vec{k} \frac{dV_z}{dt}) = \vec{i} \cdot a_x + \vec{j} \cdot a_y + \vec{k} \cdot a_z$$

$$\text{Или } \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

Так как мгновенная скорость есть производная радиус-вектора по времени, то ускорение является второй производной радиус-вектора по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{r} = (\vec{r}_i \frac{d^2 x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2 y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2 z}{dt^2})$$

**Путь точки.** Физическая величина, равная длине траектории, которую точка прошла в результате движения.

Для измерения пути проводят следующие процедуры. Время движения точки разбивается на интервалы, на которых скорость точки в пределах точности измерений постоянна. Перемещение точки на таком интервале называют элементарным путем:  $\Delta S_i = V(t_i) \Delta t_i$ . Числовое значение скорости берется положительным, поэтому иногда элементарный путь записывают как  $\Delta S = |V(t_i)| \Delta t_i$ .

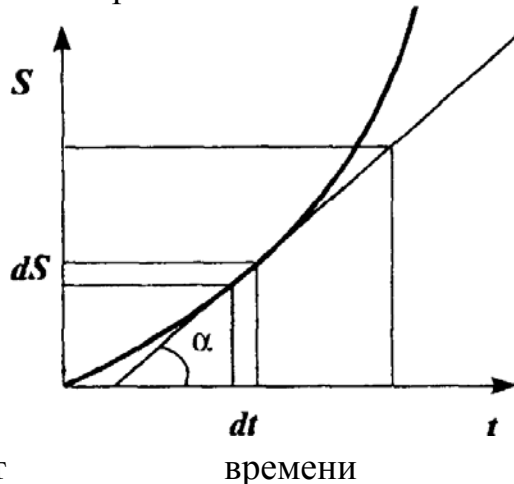
Путь, пройденный точкой от начального до конечного положения при произвольном законе движения равен сумме элементарных путей  $S = \sum_{i=1}^n |V_i(t)| \Delta t_i$ , где  $n$  – число элементарных интервалов времени.

Из этой формулы следует, что: а) путь не может быть отрицательным; б) путь не может уменьшаться с течением времени; в) путь равен площади под кривой зависимости  $|V| = f(t)$ .

Математический эквивалент пути (из точки 1 в точку 2) находится с помощью математических операций:  $S_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |V_i| \Delta t_i = \int_1^2 |V| dt$ .

Мы рассмотрели основные кинематические характеристики точки при ее поступательном движении.

На рис. показана зависимость пройденного пути  $S$  от времени  $t$ .



Вектор скорости  $v(t)$  направлен по касательной к кривой  $S(t)$  в момент времени  $t$ . Из рис. видно, что угол наклона касательной к оси  $t$  равен

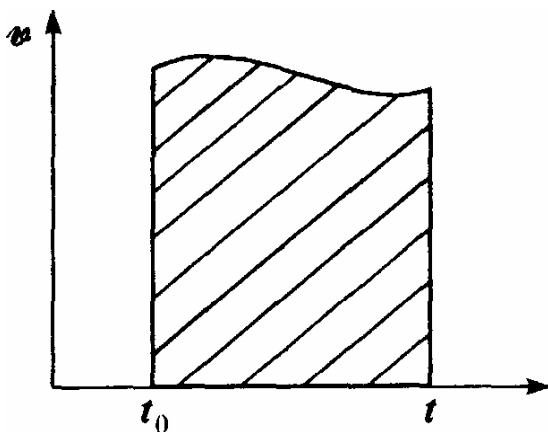
$$\frac{dS}{dt} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Интегрируя выражение (1.5) в интервале времени от  $t_0$  до  $t$ , получим формулу, позволяющую вычислить путь, пройденный

телом за время  $t-t_0$  если известна зависимость его скорости  $v(t)$

от времени

$$S = \int_{t_0}^t v(t) dt. \quad (1.6)$$



Геометрический смысл этой формулы ясен из рис. По определению интеграла пройденный путь представляет собой площадь, ограниченную кривой  $v = v(t)$  в интервале от  $t_0$  до  $t$ . В случае равномерного движения, когда скорость сохраняет свое постоянное значение во все время движения,  $v = \text{const}$ ; отсюда следует выражение

$$S = S_0 + v(t - t_0), \quad (1.7)$$

где  $S_0$  - путь, пройденный к начальному времени  $t_0$ .

Производную скорости по времени, которая является второй производной по времени от радиус-вектора, называют ускорением точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Вектор ускорения  $a$  направлен вдоль вектора приращения скорости  $d\vec{v}$ . Пусть  $a = \text{const}$ . Этот важный и часто встречаемый случай носит название равноускоренного или равнозамедленного (в зависимости от знака величины  $a$ ) движения. Проинтегрируем выражение (1.8) в пределах от  $t = 0$  до  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(0) + \vec{a}t, \quad (1.9)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (1.10)$$

и используем следующие начальные условия:  $\vec{r}(0) = 0; \vec{v}(0) = \vec{v}_0$ .

Таким образом, при равноускоренном движении

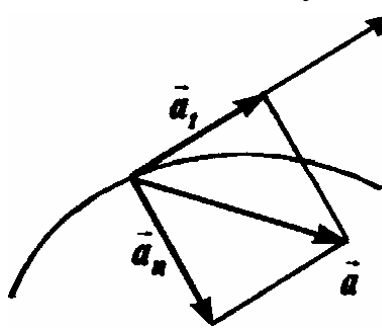
$$\vec{r}(t) = \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (1.11)$$



В частности, при одномерном движении, например вдоль оси  $X$ ,  $x = v_0t + \frac{at^2}{2}$ . Случай прямолинейного движения изображен на рис. При больших временах зависимость координаты от времени представляет собой параболу.

### § Криволинейное движение. Нормальное и тангенциальное ускорения. Элементы кинематики вращательного движения: угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейными скоростями и ускорениями

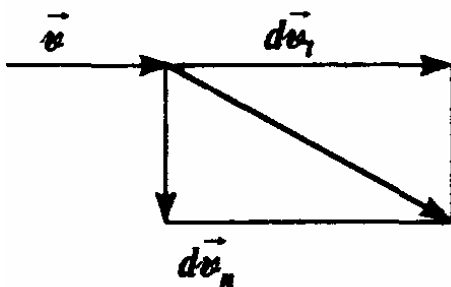
В общем случае движение точки может быть криволинейным.



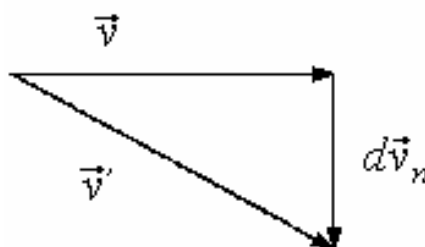
Рассмотрим этот тип движения. Если траектория точки произвольная кривая, то скорость и ускорение точки при ее движении по этой кривой меняются по величине и направлению.

Выберем произвольную точку на траектории. Как всякий вектор, вектор ускорения можно представить в виде суммы его составляющих по двум взаимно перпендикулярным осям. В качестве одной из осей

возьмем направление касательной в рассматриваемой точке траектории, тогда другой осью окажется направление нормали к кривой в этой же точке. Составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории, носит название **тангенциального ускорения**  $a_t$ , а направленная ей перпендикулярно — **нормального ускорения**  $a_n$ .



Получим формулы, выражающие величины  $a_t$  и  $a_n$  через характеристики движения. Для простоты рассмотрим вместо произвольной криволинейной траектории плоскую кривую. Окончательные формулы остаются справедливыми и в общем случае неплоской траектории.



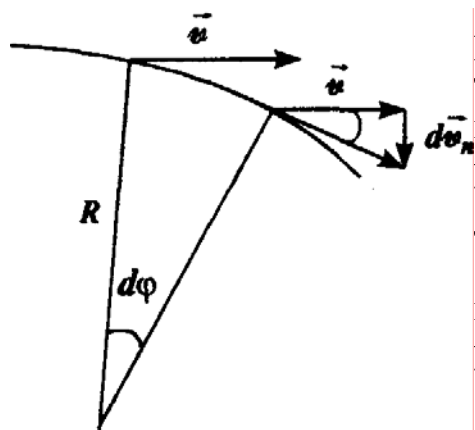
Благодаря ускорению скорость точки приобретает за время  $dt$  малое изменение  $dv$ . При этом тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, зависит только от величины скорости, но не от ее направления. Это изменение величины скорости равно  $dv$ . Поэтому тангенциальное ускорение может быть записано

как производная по времени от величины скорости:

$$a_t = \frac{dv}{dt}. \quad (1.12)$$

С другой стороны, изменение  $dv_n$ , направленное перпендикулярно к  $v$ , характеризует только изменение направления вектора скорости, но не его величины. На рис. показано изменение вектора скорости, вызванное действием нормального ускорения. Как видно из рис.  $v'^2 = v^2 + (dv_n)^2$ , и, таким образом, с точностью до величины второго порядка малости величина скорости остается неизменной  $v=v'$ .

Найдем величину  $a_n$ . Проще всего это сделать, взяв наиболее простой случай криволинейного движения — равномерное движение по окружности. При этом  $a_t=0$ . Рассмотрим перемещение точки за время  $dt$  по дуге  $dS$  окружности радиуса  $R$ .



Скорости  $v$  и  $v'$ , как отмечалось, остаются равными по величине. Изображенные на рис. треугольники оказываются, таким образом, подобными (как равнобедренные с равными углами при вершинах). Из подобия треугольников следует  $\frac{dv_n}{v} = \frac{dS}{R}$ , откуда находим выражение для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{v^2}{R}. \quad (1.13)$$

Формула для полного ускорения при криволинейном движении имеет вид:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.14)$$

Подчеркнем, что соотношения (1.12), (1.13) и (1.14) справедливы для всякого криволинейного движения, а не только для движения по окружности. Это связано с тем, что всякий участок криволинейной траектории в достаточно малой окрестности точки можно приближенно заменить дугой окружности. Радиус этой окружности, называемый радиусом кривизны траектории, будет меняться от точки к точке и требует специального вычисления. Таким образом, формула (1.14) остается справедливой и в общем случае пространственной кривой.

### Угловая скорость и угловое ускорение

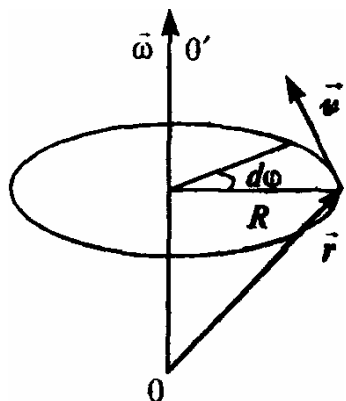
Пройденный путь  $S$ , перемещение  $dr$ , скорость  $v$ , тангенциальное и нормальное ускорение  $a_t$  и  $a_n$ , представляют собой линейные величины. Для описания криволинейного движения наряду с ними можно пользоваться угловыми величинами.

Рассмотрим более подробно важный и часто встречаемый случай движения

по окружности. В этом случае наряду с длиной дуги окружности движение можно характеризовать углом поворота  $\varphi$  вокруг оси вращения. Величину

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.15)$$

называют **угловой скоростью**. Угловая скорость представляет собой вектор, направление которого связывают с направлением оси вращения тела (рис.).



Обратим внимание на то, что, в то время как сам угол поворота  $\varphi$  является скаляром, бесконечно малый поворот  $d\varphi$  — векторная величина, направление которой определяется по правилу правой руки, или буравчика, и связано с осью вращения. Если вращение является равномерным, то  $\omega = \text{const}$  и точка на окружности поворачивается на равные углы вокруг оси вращения за равные времена. Время, за которое она совершает

полный оборот, т.е. поворачивается на угол  $2\pi$ , называется **периодом движения**  $T$ . Выражение (1.15) можно проинтегрировать в пределах от нуля до  $T$  и получить **угловую частоту**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.16)$$

Число оборотов в единицу времени есть величина, обратная периоду, — циклическая частота вращения

$$\nu = 1/T. \quad (1.17)$$

Нетрудно получить связь между угловой и линейной скоростью точки. При движении по окружности элемент дуги связан с бесконечно малым поворотом соотношением  $dS = R \cdot d\varphi$ . Подставив его в (1.15), находим

$$v = \omega r. \quad (1.18)$$

Формула (1.18) связывает величины угловой и линейной скоростей. Соотношение, связывающее векторы  $\omega$  и  $v$ , следует из рис. А именно, вектор линейной скорости представляет собой векторное произведение вектора угловой скорости и радиуса-вектора точки  $r$ :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.19)$$

Таким образом, вектор угловой скорости направлен по оси вращения точки и определяется по правилу правой руки или буравчика.

**Угловое ускорение** — производная по времени от вектора угловой скорости  $\omega$  (соответственно вторая производная по времени от угла поворота)  $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ .

Выразим тангенциальное и нормальное ускорение через угловые скорости и ускорение. Используя связь (1.18), (1.12) и (1.13), получаем

$$a_t = \beta \cdot R, \quad a_n = \omega^2 \cdot R. \quad (1.20)$$

Таким образом, для полного ускорения имеем

$$a = \sqrt{\beta^2 + \omega^4} R. \quad (1.21)$$

Величина  $\beta$  играет роль тангенциального ускорения: если  $\beta = 0$ , полное ускорение при вращении точки не равно нулю,  $a = R \cdot \omega^2 \neq 0$ .

## Лекция 2 ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета. Масса и импульс. Второй закон Ньютона, как уравнение движения. Сила, как производная импульса. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса. Механическая система. Центр инерции (масс) механической системы. Теорема о движении центра инерции.

Мы уже отмечали, что кинематика изучает лишь геометрическую сторону движения, т.е. зависимость координат движущегося тела от времени без указания причин, вызвавших это движение.

Раздел механики, называемый динамикой, устанавливает связь между характером движения тел и их взаимодействием как причиной, вызывающей такое движение, т.е. *динамика устанавливает закономерную причинную зависимость кинематических характеристик движения от величин, определяющих взаимодействие тел, которое обуславливает характер движения*. Частный случай динамики – статика – изучает условия равновесия тел, находящихся под воздействием других тел.

Взаимодействие тел характеризуется физической величиной, которая называется силой. ***Сила является количественной мерой действия тел друг на друга***. Понятие о силе как о физической величине возникло на основе известного физиологического ощущения мускульного усилия, необходимого для изменения скорости движения тела.

В механике принято рассматривать три вида сил:

Во-первых, гравитационные силы или силы тяготения. Их величина зависит от расстояния между взаимодействующими телами, а также их формы и размеров;

Во-вторых, так называемые упругие силы, которые возникают в результате деформации тел;

В-третьих, силы трения, действующие на соприкасающиеся поверхностные слои и зависящие от состояния поверхности, соприкасающихся тел.

Силы могут проявляться динамически и статически. **Динамическое проявление** сил состоит в том, что под их действием тело приобретает ускорение, причем, чем больше величина действующей силы, тем больше будет и ускорение тела. **Статически** силы проявляются в том, что находящиеся под их действием тела, хотя и не приобретают ускорение, но так или иначе деформируются и воздействуют на другие тела, т.е. сила, действующая на тело, проявится статически, если кроме нее на тело будет действовать еще одна сила, препятствующая движению тела.

*Именно количественные зависимости между характером движения и действующими на них силами устанавливают законы динамики, сформулированные И. Ньютоном и опубликованные в его работе в 1687 г. "Математические начала натуральной философии"*

## § 2-1. Первый закон Ньютона

можно сформулировать следующим образом:

***тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие внешних сил не вынудит его изменить это состояние.***

т.е. только силы, действующие на данное тело со стороны других тел, могут изменить состояние его движения. Если же на это тело такие силы не действуют (или взаимно компенсируют друг друга), то оно (тело) будет находиться в одном из неизменных состояний: покоя (скорость тела  $v = 0$ ) или равномерного прямолинейного движения ( $v = \text{const}$ , а его ускорение равно нулю).

*Свойство тела сохранять свое состояние неизменным называют инерцией, а системы отсчета, в которых выполняется этот закон, - инерциальными.*

Физический смысл закона состоит в том, что для механики нет различия между состоянием покоя и равномерного прямолинейного движения. Закон подчеркивает относительность движения. Строго говоря, это закон является чистой абстракцией, но опыт всего человечества за прошедшие три с лишним века подтверждает его справедливость.

Причина изменения состояния тела, т.е. появление ускорения, связана с понятием силы. Вообще говоря, воздействие (сила) может быть достаточно сложным, но в этом случае его можно разложить на так называемые простые воздействия. Поэтому ***силой называют количественную меру простого воздействия на тело со стороны других тел, во время действия которого тело или его части получают ускорения.*** Как показывает опыт, величина полученного ускорения зависит от свойств взаимодействующих тел, от расстояния между ними и от их относительных скоростей. Силу принято измерять (в международной системе единиц СИ) в Ньютонах (Н). На территории нашей страны эта система единиц является Государственным Стандартом с 1977 года. Однако до сих пор существуют метрические внесистемные единицы: грамм, килограмм и тонна. Эти единицы используются при определении веса тела. (***Вес тела – это сила, с которой тело давит на подставку или растягивает нить подвеса.*** В быту силу в Ньютонах измерять не принято.) На практике для измерения величины силы используют динамометр – тарированную (градуированную) пружину, снабженную шкалой.

Здесь следует подчеркнуть, что 1-закон Ньютона, по сути дела, является определением инерциальной системы отсчета. Если в системе отсчета выполняется 1 –закон Ньютона, то она называется инерциальной, если в системе не выполняется первый закон Ньютона, то система – неинерциальная.

Примером такой неинерциальной системы может служить свободно падающий лифт, трос которого оборвался. На вас действует сила тяжести и вы вместе с кабиной лифта падаете вниз с ускорением, равным  $g$

относительно Земли. Но если связать систему отсчета с лифтом, то вы относительно лифта покоитесь, хотя на вас действует сила.

## § 2-2 Второй закон Ньютона.

Опыт показывает, что одна и та же сила сообщает различным телам разные ускорения. Более массивные тела приобретают меньшие ускорения. Для характеристики способности тел противостоять действию силы используется понятие массы. Чем меньше ускорение, которое получает тело, тем больше его масса, т.е. ускорения тел обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.1)$$

Приняв какую-либо массу за эталон, с помощью этого отношения можно измерять любую массу.

Величина ускорения, которое получает тело определенной массы, зависит от величины силы, - чем больше сила  $F$ , тем больше ускорение, т.е. мы можем записать, что  $a \sim F$  или

$$a = kF,$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

С учетом (2.1) имеем

$$a = \frac{kF}{m}. \quad (2.2)$$

Выбор коэффициента пропорциональности зависит от выбора системы единиц. В настоящее время во всех существующих системах единиц принято считать  $k = 1$ , т.е.

$$a = \frac{F}{m}. \quad (2.3)$$

Отметим, что ускорение – это вектор, масса – величина скалярная (число), поэтому сила тоже вектор, направление которого совпадает с направлением ускорения.

Здесь следует сказать, что масса как *количественная мера инертности тел, их способности приобретать ускорение под действием сил характеризует динамические свойства тел.*

Из математической формулировки 2-закона Ньютона следует, что

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.4)$$

Если масса тела неизменна, то мы можем записать, что

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \quad (2.5)$$

Учитывая, что  $\vec{P} = m\vec{V}$  (импульс или количество движения тела), мы можем записать общую формулировку 2-закона Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (2.6)$$



Последнее выражение можно представить в виде  $d(m\vec{V}) = \vec{F}dt$  (это следует из того, что

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} ).$$

*т.о. изменение количества движения тела, на которое действует сила, пропорционально действующей на него силе и направлено параллельно направлению действия силы.*

(В этом виде и был сформулирован второй закон механики самим Ньютоном)

Если масса тела неизменна, то

$$m d\vec{V} = \vec{F} dt . \quad (2.7)$$

Изменение количества движения за конечный промежуток времени  $\Delta t = t - t_0$ , где  $t_0$  соответствует скорости  $V_0$ , а  $t$  – скорости  $V$ , будет равно

$$\int_{V_0}^V m dV = m \int_{V_0}^V dV = m \Delta V = \int_{t_0}^t F dt ,$$

где  $\Delta V = V - V_0$ .

Если  $F$  – постоянна, то

$$m \Delta V = F \Delta t .$$

*Из последнего выражения следует, что чем больше масса тела, тем меньше будет его изменение скорости. С другой стороны, чем больше  $m$ , тем при  $F = \text{const}$  дольше должно быть воздействие силы для того, чтобы изменить скорость тела.*

***Иными словами, никакая сила, как бы велика она не была, не может мгновенно изменить скорость тела. Необходимо, чтобы сила действовала некоторый конечный временной интервал.***

## § 2-3 Закон независимости действия сил

Если на точечное тело действует несколько сил, то результирующее ускорение тела равно векторной сумме ускорений, сообщаемых ему каждой из этих сил. *Иными словами некоторая действующая сила сообщает телу пропорциональное ускорение независимо от действия других сил.*

т.е. если на тело действует  $n$  сил:  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , то некоторая  $i$ -сила сообщает телу ускорение

$$\vec{a}_i = \vec{F}_i / m_i .$$

В свою очередь результирующая сила, действующая на тело будет равна (чему?) векторной сумме всех приложенных к телу сил

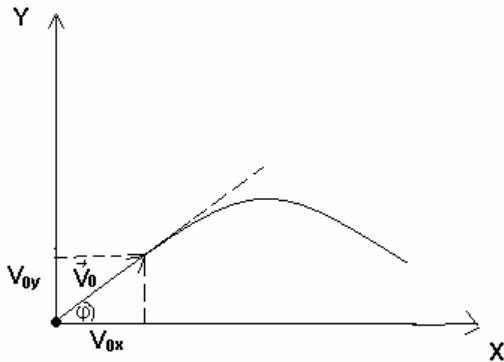
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.8)$$

но т.к.  $\vec{F}_i = m \vec{a}_i$ , то

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n m \vec{a}_i = m \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \quad (2.9)$$

Но в соответствии со 2-законом Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\text{тогда} \Rightarrow \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a} \quad (2.10)$$



Пример: Закон независимости действия сил позволяет упрощать рассматриваемые задачи в физике, т.к. мы можем разлагать на составляющие как силы, так и ускорения. Поясним это на примере: Пусть тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью  $V_0$ . На тело действует сила тяжести  $mg$  и сообщает ему ускорение

$g$ , направленное вниз. В результате тело приобретает дополнительную вертикальную составляющую скорости  $V_1 = -gt$  и тогда вертикальная составляющая скорости будет равна  $V_y = V_{0y} + V_1 = V_0 \sin \varphi - gt$

Горизонтальная составляющая  $V_x$  остается неизменной, т.к. в этом направлении на тело не действуют силы, а следовательно

$$V_x = V_0 \cos \varphi .$$

Из последних двух равенств можно найти зависимость  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

## § 2-4 Уравнения движения материальной точки

В соответствии с законом независимости действия сил результирующая сила  $\vec{F}$  и ускорение  $\vec{a}$  могут быть представлены в виде векторной суммы трех их компонентов, параллельных осям координат

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (2.11)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} . \quad (2.12)$$

Соответственно из 2-закона Ньютона мы получим

$$F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = ma_x \vec{i} + ma_y \vec{j} + ma_z \vec{k}$$

или

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = m \frac{dV_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= ma_y = m \frac{dV_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= ma_z = m \frac{dV_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Откуда мы можем записать, что

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F_y}{m} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{F_z}{m} \end{cases} \quad (2.14)$$

Последние уравнения называют уравнениями движения материальной точки, откуда, как мы уже знаем, путем интегрирования можно найти закон движения тела.

## § 2-5 Третий закон Ньютона

Понятие силы мы определили как меру взаимодействия тел, т.е. при рассмотрении движения какого-нибудь тела учитывается только одна сторона этого взаимодействия. Ясно однако, что все тела надо рассматривать как равноправные, т.е. если второе тело воздействует на первое, то и первое тело воздействует на второе. Третий закон Ньютона устанавливает соотношение между этими воздействиями:

***Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны.***

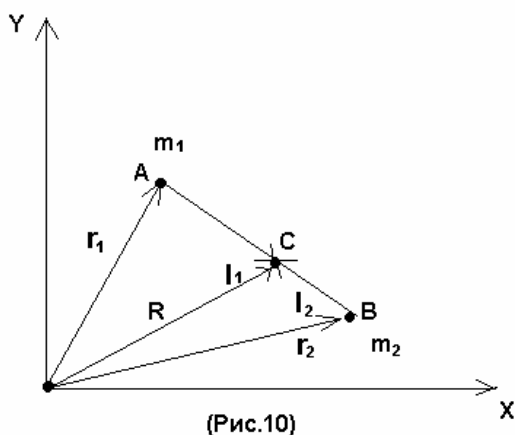
Пример: книга лежит на столе: она притягивается к Земле и вследствие этого давит на стол. Однако книга не проваливается к центру Земли, т.к. стол со своей стороны действует на книгу с силой равной по величине силе давления книги на стол. Эта сила со стороны стола носит название реакции опоры. К самой книге приложено две силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Они равны по величине и противоположно направлены, т.е. их сумма равна нулю, поэтому книга никуда не двигается.

## § 2-6 Динамика системы материальных точек

До сих пор мы рассматривали динамику материальной точки. Сейчас рассмотрим систему материальных точек

**Центр масс системы материальных точек:**

Рассмотрим 2 точки A и B, положение которых задано радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ .



***Центром масс двух материальных точек A и B с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно называется точка C, лежащая на отрезке, соединяющем A и B, на расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от A и B, обратно пропорциональных массам точек (см. рис. 10), т.е.***

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.15)$$

Если положения точек задаются радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , то положение центра масс определяется радиус-вектором  $\vec{R}$ . Из рисунка 10 следует, что

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{l}_1 \quad \text{и} \quad \vec{R} = \vec{r}_2 + \vec{l}_2 \quad (2.16)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $m_1$ , а второе - на  $m_2$  и складывая их, получим:

$$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{l}_1 + m_2\vec{l}_2 \quad (2.17)$$

Из равенства (2.15) следует, что  $m_2\vec{l}_2 = -m_1\vec{l}_1$ . С учетом этого соотношения из выражения (2.17) можно определить значение радиус-вектора  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.18)$$

Обобщая это выражение для произвольного числа материальных точек, получим:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.19)$$

где  $\sum_{i=1}^n m_i = M$  - полная масса системы точек.

Скорость центра масс такой системы определяется дифференцированием (2.19):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.20)$$

Величины  $m_i \vec{V}_i$  представляют собой импульсы отдельных точек, поэтому уравнение (2.20) можно переписать в следующем виде:

$$M\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{P} \quad (2.21)$$

где через  $\vec{P}$  обозначен суммарный импульс системы. Дифференцируя (2.21), находим выражение для ускорения центра масс системы  $A$ :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{a}. \quad (2.22)$$

## § 2-7 Закон изменения импульса системы материальных точек

Для простоты рассмотрим движение системы, состоящей из трех точек, на каждую из которых действуют внутренние силы  $f_{ik}$  и внешние -  $F_i$ , где индекс  $i$  представляет номер точки. Уравнения движения для каждой точки имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2; \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} &= \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3\end{aligned}\quad (2.23)$$

Складывая эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2 + p_3) = f_{12} + f_{13} + f_{21} + f_{23} + f_{31} + f_{32} + F_1 + F_2 + F_3 \quad (2.24)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона внутренние силы попарно равны по величине и противоположны по направлению (например,  $f_{12} = -f_{21}$ ). Потому сумма всех внутренних сил равна нулю, и

$$\frac{dP}{dt} = F_1 + F_2 + F_3,$$

где через  $P$  обозначен суммарный импульс системы. Обобщая (2.24) для любого числа материальных точек, можно записать следующее выражение:

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i F_i \quad (2.25)$$

**которое принято называть законом изменения импульса системы материальных точек.**

Как видно из этого выражения, изменение суммарного импульса определяется равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему.

**Если же эта равнодействующая равна нулю (или на систему не действуют никакие внешние силы), то суммарный импульс системы остается постоянным.** Это следствие уравнения (2.25) называется **законом сохранения импульса**. Другим следствием рассмотренного закона изменения импульса служит

**теорема о движении центра масс**, которая утверждает, что **центр масс системы материальных точек под действием внешних сил движется как материальная точка суммарной массы, к которой приложены все внешние силы**, и записывается в таком виде:

$$M\vec{a} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (2.26)$$

Доказательство этого утверждения следует из сравнения определения ускорения центра масс и выражения (2.25).

Примерами закона сохранения импульса могут служить отдача при стрельбе из огнестрельного оружия, движение ракеты, перемещение осьминогов и т.п.

## Лекция 3 Работа и энергия. Закон сохранения энергии - 2ч.

Работа силы и ее выражение через криволинейный интеграл. Кинетическая энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле. Понятие о градиенте скалярной функции координат. Закон сохранения энергии в механике. Общезначимый закон сохранения энергии.

### 3.1 Работа силы и ее выражение через криволинейный интеграл

Работа силы – это количественная мера передачи движения данному телу посредством действия на него силы со стороны другого тела. Работа силы проявляется лишь при движении тела, на которое она действует. Понятие «работы силы» как физической величины возникло на основании опыта. Из опыта мы знаем, что выполняемая работа тем больше, чем больше величина силы и чем больше длина пути, который проходит тело под действием силы. На основании таких фактов и дается определение работы силы.

Как известно из курса физики средней школы, работа — это скалярная величина, равная произведению силы на перемещение и на косинус угла между ними. Для конечного перемещения  $\Delta r$  имеем

$$\Delta A = F \Delta r = F \Delta r \cos \alpha, \quad (3.1)$$

где мы воспользовались понятием скалярного произведения двух векторов.

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории  $L$ , проходит путь конечной длины, этот путь можно мысленно разбить на бесконечно малые участки, на каждом из которых сила  $F$  может считаться приближенно постоянной, а элементарная работа может быть вычислена по формуле  $dA = F dr$ . Если теперь сложить все эти элементарные работы, то получим

*Элементарной работой  $dA$  силы  $F$  на перемещении  $dl$  называется их скалярное произведение* (рис.3.1):

$$dA = (\vec{F} d\vec{l}) = F dl \cos \alpha. \quad (3.2)$$

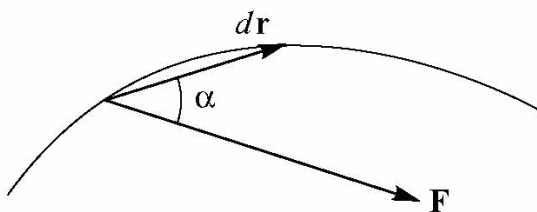


Рисунок 3.1 – Перемещение под действием силы  $F$

Скалярное произведение (3.1) может быть представлено в виде

$$dA = F_l dl \quad (3.3)$$

или

$$dA = F dl_F,$$

где  $F_l = F \cos \alpha$  представляет собой проекцию силы на направление перемещения, а  $dl_F = l \cos \alpha$  - проекцию перемещения на направление силы.

В декартовой системе координат величину элементарной работы (по правилам записи скалярного произведения) можно записать так:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (3.4)$$

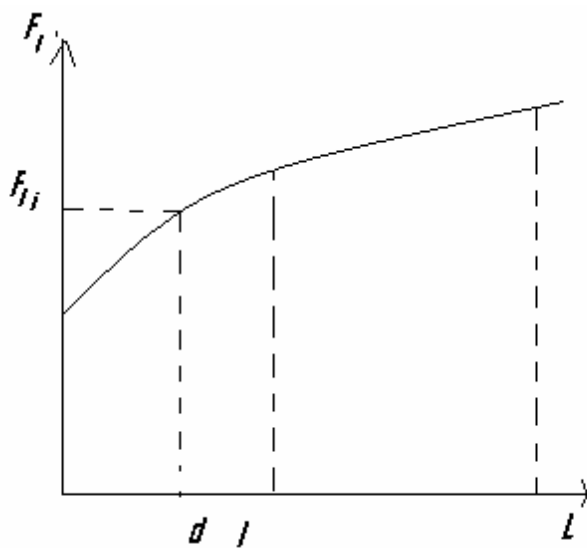
где  $F_x, F_y, F_z$  - проекции силы на оси координат и  $dx, dy, dz$  - соответствующие проекции перемещения.

Для подсчета работы переменной силы на конечном перемещении необходимо просуммировать все элементарные работы:

$$A = \sum_{i=1}^n (F dl \cos \alpha)_i \quad (3.5)$$

Если сила - непрерывная функция координат, то суммирование заменяется интегрированием, и

$$A = \int_a^b F \cos \alpha dl = \int_a^b F_l dl = \int_a^b F dl_F \quad (3.6)$$



И тогда работа силы будет численно равна площади фигуры ограниченной  $F_l(l)$  и осью абсцисс (рис. 3.2).

В качестве примера рассмотрим вычисление работы центральной силы, т.е. силы, которая действует по прямой, соединяющей взаимодействующие тела (материальные точки), и величина этой силы зависит только от расстояния. Пусть материальная точка А действует на другую материальную точку В центральной силой  $F$ . Точка В перемещается из положения 1 с

радиус-вектором  $r_1$  в точку 2, радиус-вектор которой -  $r_2$  (см. рис. 3.3). Выбирая на этом участке траектории малое перемещение  $dl$ , запишем выражение для

элементарной работы  $dA = F dl_F$ ,

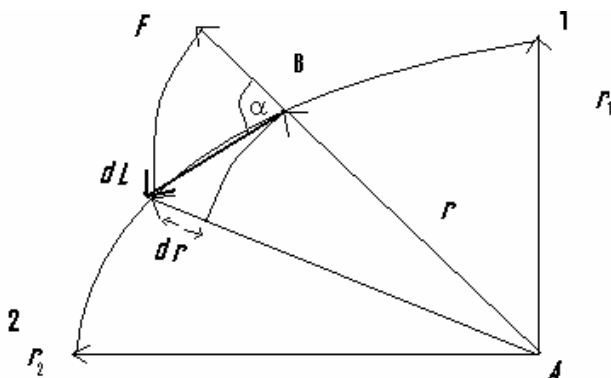


Рис. 3.3 - К вычислению работы центральной силы

Из рис. 3.3 видно, что  $dl \cos \alpha = dr$  представляет собой изменение радиус-вектора на малом перемещении  $dl$ . Поэтому элементарная работа  $dA = F(r)dr$ , т.к. сила зависит только от расстояния. Полная работа силы на участке траектории 1-2 находится суммированием всех элементарных работ, т.е.

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)dr = U(r) \Big|_1^2 = U(r_2) - U(r_1) \quad (3.7)$$

где  $U(r)$  – первообразная для функции  $F(r)$ . Для силы тяготения, которая также является силой, работа при увеличении расстояния от земной поверхности от  $r_1$  до  $r_2$  согласно выражению (3.7) равна:

$$A_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -Gm_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = Gm_1 m_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (3.8)$$

Знак минус перед выражением интеграла соответствует тому, что при увеличении расстояния от Земли приходится затрачивать работу, т.е. совершать отрицательную работу. Очевидно, что полная работа против силы тяжести при изменении расстояния от  $R_3$  (где  $R_3$  - радиус Земли) до бесконечности (тело удаляется на бесконечно большое расстояние от Земли, т.е.  $r_2 \rightarrow \infty$ ) равна:

$$A_\infty = - \frac{Gm_1 M}{R} \quad (3.9)$$

Часто на тело действует одновременно несколько сил. Покажем, что работа суммы сил равна алгебраической сумме работ составляющих сил. Пусть действует  $n$  сил  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ . Работа результирующей силы  $F = \sum_i f_i$  равна

$$F = \int_l F dl = \int_l \left( \sum_i f_i \right)_l dl, \quad (3.10)$$

но проекция суммы векторов на некоторое направление равна сумме проекций слагаемых векторов на то же направление

$$\left( \sum_i f_i \right)_l = \sum_i f_{il}$$

Тогда

$$A = \int_l \sum_i f_{il} dl = \sum_i \int_l f_{il} dl = \sum_i A_i \quad (3.11)$$

Аналогично несложно показать, что если вектор силы  $F$  выражается через свои проекции на оси координат, то

$$A = \int_l F dl = \int_l (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) dl = \sum_i \int_l (f_x d_x + f_y d_y + f_z d_z). \quad (3.12)$$

### 3.2 Мощность

Одна и та же работа в разных случаях может быть произведена за различные отрезки времени, т.е. она может совершаться неодинаково быстро.

Величиной, характеризующей быстроту совершаемой работы, является мощность. Мы с вами уже знаем, что скорость изменения любой функции определяется как производная по времени от такой функции, т.е.



$$N = \frac{dA}{dt} \quad (3.13)$$

Если мы вспомним, что  $dA = F_l dl$  и учитывая, что  $\frac{dl}{dt} = V$ , то мы имеем

$$N = \frac{F_l dl}{dt} = F_l V. \quad (3.14)$$

Отсюда следует, что для того чтобы увеличить мощность какой-то машины, мы должны либо увеличить силу (что требует увеличения ее размеров) или повысить скорость рабочей части машины, что обычно и является предпочтительным.

### 3.3 Консервативные и неконсервативные силы

Все силы, встречающиеся в механике макроскопических тел, принято разделять на консервативные и неконсервативные. Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы пути между двумя точками (при перемещении тела между ними).

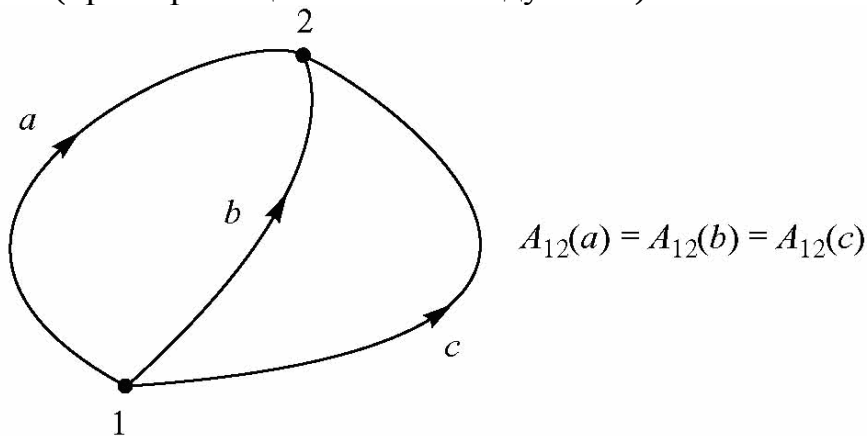


Рис. 3.4 Работа консервативной силы не зависит от пути перехода

Если работа силы не зависит от формы пути, а определяется начальным и конечным положением материальной точки, то ее величина на отрезке 1-2 (см. рис. 3.4) по пути  $a$  равна работе этой же силы на пути  $c$ , но работа  $A_a$  противоположна по знаку работе  $A_c$ :

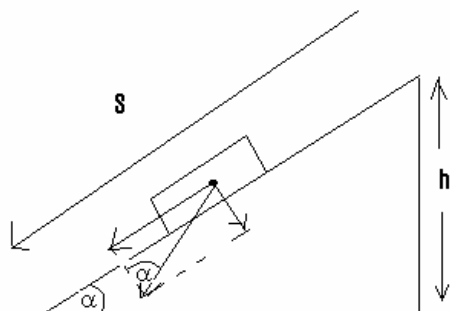
$$A_a = \int_1^2 F(r) dr = - \int_2^1 F(r) dr = -A_c. \quad (3.15)$$

Тогда сумма работ по замкнутому пути равна  $A_1 + A_2 = 0$ . В математике такая сумма называется циркуляцией:

$$\oint F(r) dr = 0. \quad (3.16)$$

Тогда, силы работа которых не зависит от формы пути и для которых выполняется условие (6-9), получили название консервативных или потенциальных сил.

Примером консервативных сил является, например, сила тяжести и упругие силы. Вычислим работу этой силы при переходе материальной точки из положения 1 в положение 2 вдоль прямолинейного отрезка. Найдем работу силы тяжести  $mg$  при движении массы  $m$  по наклонной плоскости



$$A = \int_s F_s ds = \int_s mg \sin \alpha ds = mgS \sin \alpha = mgh$$

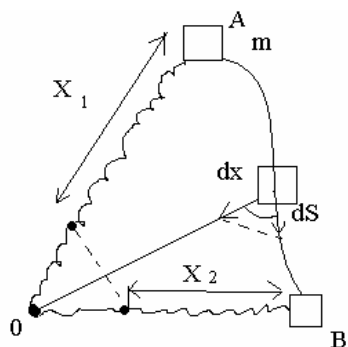
Работа силы тяжести в данном случае не зависит от формы пути, а определяется лишь начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

Определим работу упругой силы на произвольном криволинейном пути. Мы знаем, что согласно закону Гука сила упругости

$$F_y = -kx$$

где  $x$  – величина деформирует пружину,  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

Пусть пружина растянута и тело массой  $m$  находится в точке А, затем начинает двигаться. Второй конец пружины закреплен в точке О. Через некоторое время тело оказывается в точке В.  $x_1$  и  $x_2$  – деформация пружины в точке А и В. Найдем работу упругой силы



$$A = \int_s F_{ys} ds = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = - \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

Как видим, работа упругой силы также не зависит от пути, а определяется положением начальной и конечной точек.

Все силы, не являющиеся консервативными, называются неконсервативными силами. К ним относятся, прежде всего, так называемые диссипативные силы, например силы трения, возникающие при скольжении одного тела относительно другого. Сила трения в этом случае всегда направлена против скорости движения, то есть против перемещения тела. Работа этой силы всегда отрицательна.

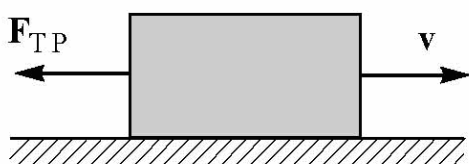


Рис. 3.7 -

И если тело сместилось налево, а потом вернулось назад, то очевидно, что суммарная работа будет величиной отрицательной и не равной нулю. Таким образом, работа силы трения скольжения при движении по замкнутому контуру не равна нулю!

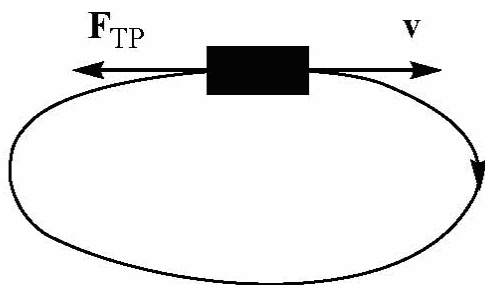


Рис. 3.8 -

Силы, для которых работа зависит от формы пути, называются *неконсервативными*. Примером таких сил может служить сила трения. К неконсервативным силам относятся также силы сопротивления, которые действуют на тело при его движении в жидкой или газообразной среде. Эти силы называют иногда силами вязкого трения. В отличие от трения скольжения, они всегда зависят от абсолютной величины скорости тела! И направлены противоположно ей. Здесь необходимо отметить, что на микроскопическом уровне, как это выяснено на сегодняшний день, все силы, действующие между элементарными частицами, консервативны! Таким образом, неконсервативность сил на макроскопическом уровне — это есть следствие того, что мы не рассматриваем детально движение составляющих тело атомов, молекул, электронов и т.д. Если бы мы могли представить себе замкнутый контур в конфигурационном пространстве всех составляющих тело частиц, то тогда работа всех сил при движении по этому контуру была бы всегда равна нулю. А так в исходное положение возвращается одно лишь макроскопическое тело, и то приближенно, поскольку составляющие тело молекулы теперь движутся быстрее — тело нагрелось. Нагрелась в результате трения и окружающая тело внешняя среда, то есть она тоже изменила свое состояние. Таким образом, в результате движения макроскопического тела по замкнутому контуру вся система, строго говоря, не возвращается в исходное состояние! Поэтому отлична от нуля и работа. Эта работа в конечном счете перешла в тепло. И нет уже способа вернуть затраченную энергию. Этот процесс необратим!

### 3.4 Потенциальная энергия

**Понятие об энергии.** Импульс или количество движения является мерой механического движения, но когда мы имеем факт превращения механического движения, скажем в тепловую, то импульс может уменьшиться до нуля, но ведь движение не может исчезнуть бесследно. Поэтому для количественного описания движения всех форм и ввели физическую величину называемую энергией. *Т.к. работа силы является количественной мерой передачи*

движения, а мерой движения – энергия, то работа есть одна из форм передачи энергии от одного тела другому:

$$A = \Delta E = E_2 - E_1 \quad (3.17)$$

Механической форме движения материи соответствует механическая энергия как ее количественная мера. Различают два вида механической энергии: кинетическую  $E_k$  и потенциальную  $E_n$ , так что полная механическая энергия

$$E = E_k + E_n \quad (3.18)$$

Для консервативных сил, работа которых не зависит от формы пути, можно ввести важное понятие **потенциальной энергии**. Давайте какое-либо произвольное положение системы, характеризуемое заданием координат ее материальных точек, условно примем за нулевое. Тогда работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из некоторого положения в нулевое, называется потенциальной энергией  $E_n$  системы в этом положении.

Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а поэтому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами потенциальная энергия системы  $E_n$  является функцией только ее координат.

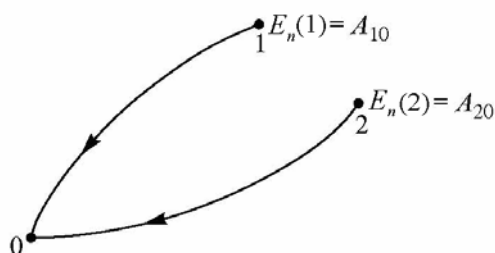


Рис. 3.9 -

Значение потенциальной энергии, вообще говоря, зависит от того, какое положение системы условно принято за нулевое. Если за нулевое принять положение 0, то в положении 1 система будет обладать потенциальной энергией  $E_n = A_{10}$ , равной работе консервативных сил при переходе системы из положения 1 в положение 0. Если же за нулевое принять положение 0', то потенциальная энергия будет равна  $E'_n = A_{10'}$ .

Мы видим, таким образом, что при замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы изменяется на постоянную величину. Тогда в приведенном выше определении вместо потенциальной энергии следует говорить об ее разности в двух положениях. Разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое.

Таким образом, потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Этот произвол нестрашен, так как на самом деле всегда важна лишь разность потенциальных энергий.

*Полученный вывод можно распространить и на систему материальных точек: суммарная работа всех потенциальных сил взаимодействия зависит лишь от начальной и конечной конфигурации системы.*

Знак работы при этом может быть, вообще говоря, любым – работа может быть как положительной, так и отрицательной. Когда работа отрицательна, т.е. угол между силой и перемещением равен  $180^\circ$ , то ее можно совершить лишь за счет внешнего воздействия, и, наоборот, работа положительная (направление перемещения совпадает с направлением силы) может совершаться системой без какого-либо внешнего воздействия. Например, для сжатия пружины нужно приложить некоторое усилие, а сжатая пружина, распрямляясь, сама способна совершить работу. В этом случае говорят, что *положительная работа совершается за счет «запаса» этой работы* в самой системе. Если в системе материальных точек действует несколько различных по своей природе потенциальных сил, которые в этом случае называются внутренними, то общий «запас» положительной работы складывается из «запасов» каждого из видов взаимодействия. Поскольку выбор начальной конфигурации весьма условен, то можно утверждать, что практически любой конфигурации соответствует определенный «запас» положительной работы. *Величину «запаса» этой работы при данной конфигурации системы материальных точек принято называть потенциальной энергией  $E_n$  во внешнем силовом поле или поле внешних сил.* Здесь стоит отметить. Что каждое тело создает в окружающем его пространстве особое состояние, называемое силовым полем. Это поле, как особое состояние материи, проявляется в действии сил на другие тела. Например, в гравитационном поле Земли на тело массой  $m$  действует сила  $mg$ . При совершении системой положительной работы величина потенциальной энергии уменьшается. Наоборот, если над системой совершают работу, которая считается отрицательной, то потенциальная энергия увеличивается. Из этого следует, что

$$dE_n = E_{n2} - E_{n1} = -dA \quad (3.19)$$

*т.е. изменение потенциальной энергии при некотором изменении конфигурации определяется суммарной работой внутренних потенциальных сил, взятой с обратным знаком.* Точка начала отсчета потенциальной энергии может быть выбрана произвольно, т.к. для решения практических задач важным оказывается не сама величина потенциальной энергии, а лишь ее изменение. Например, можно считать. Что камень, лежащий на поверхности Земли, имеет нулевую потенциальную энергию, хотя если ему предоставить возможность падать к центру Земли (в колодец), то окажется, что его потенциальная энергия совсем не равна нулю. *Важно отметить, что любая система стремится по возможности уменьшить свою потенциальную энергию. Поэтому устойчивое состояние системы соответствует минимуму потенциальной энергии.*

### 3.5 Понятие о градиенте скалярной функции координат

Если известно выражение  $E_n(x, y, z)$ , то можно найти силу, действующую на материальную точку в каждой точке поля. Пусть частица переместилась вдоль оси  $x$  на расстояние  $dx$ . Тогда силы поля совершат над частицей работу

$$dA = FdS = F_x dS_x = F_x dx$$

с другой стороны

$$dA = -dE_n,$$

тогда

$$F_x dx = -dE_n$$

откуда

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}.$$

Мы записали  $\frac{\partial}{\partial x}$  вместо  $\frac{d}{dx}$ , чтобы подчеркнуть, что производная по  $x$  вычисляется при  $y$  и  $z = \text{const}$ . Такая производная называется частной. Аналогичные выражения получим для компонент  $F_y$ ,  $F_z$  и тогда

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k}\right)$$

**Вектор с компонентами  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , где  $\varphi$  - скалярная функция  $\vec{r}$ , называется градиентом функции и обозначается  $\text{grad } \varphi$**

$$\text{grad} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Иногда записывают  $\text{grad} \varphi = \nabla \varphi$ ,

где  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  - оператор набла или оператор Гомельтона, тогда

$$\vec{F} = -\text{grad} E_n.$$

**Геометрический смысл градиента:** Для выяснения геометрического смысла градиента полезно ввести эквипотенциальные поверхности, то есть такие поверхности, на которых скалярная функция  $U$  остается постоянной:

$$U(x, y, z) = \text{const}$$

Пусть  $U$  — одна из таких поверхностей, и пусть она проходит через точку пространства  $O$ , в которой ищется градиент (рис.3.10).

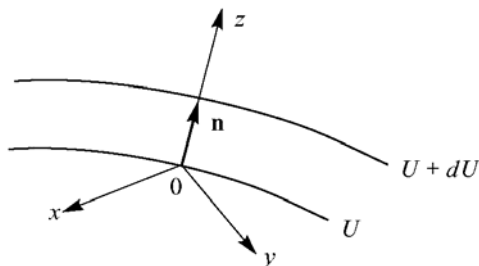


Рис. 3.10 -

Поместим в этой точке начало координат. Ось  $Z$  направим по нормали к поверхности ( $\bar{n}$  — единичный орт нормали), а оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости, касательной к поверхности в точке  $O$ . Поэтому в первом приближении вдоль осей  $x$  и  $y$  функция  $U$  не изменяется

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

Следовательно

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial z} \bar{n}$$

поскольку в нашем случае  $\bar{k} = \bar{n}$ . Если  $U$  возрастает в направлении оси  $Z$ , то  $\partial U / \partial z > 0$  и, следовательно, градиент направлен по нормали  $\bar{n}$  к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии. Очевидно, что в этом направлении потенциальная энергия изменяется наиболее быстро

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n} \bar{n}$$

### 3.6 Кинетическая энергия

Если на тело массой  $m$  действует некоторая сила  $F$ , сообщая ему ускорение  $a$ , то эта сила совершает определенную работу, которая связана с изменением скорости тела. Величина элементарной работы определяется так же, как и ранее:

$$dA = F \cos \alpha dl = ma \cos \alpha dl,$$

где направление силы совпадает с направлением ускорения.

Тогда  $\bar{a} \cos \alpha = a_t$  является проекцией ускорения на направление перемещения, т.е. тангенциальной составляющей полного ускорения, которая характеризует изменение скорости по абсолютной величине:  $a_t = \frac{dV}{dt}$ . С учетом этого

выражение для  $dA$  равно:

$$dA = ma_t dl = m \frac{dV}{dt} dl \quad (6-12)$$

Пусть  $dt$  — промежуток времени, за который тело проходит отрезок  $dl$ .

Тогда можно записать

$$dA = m \frac{dl}{dt} dV = mV dV \quad (6-13)$$

т.к.  $\frac{dl}{dt} = V$  — скорость тела за промежуток времени  $dt$ . Принимая во внимание, что в механике Ньютона масса не зависит от скорости, выражение (6-13) можно преобразовать к виду

$$dA = md\left(\frac{V^2}{2}\right) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dE_k \quad (6-14)$$

где величина  $E_k = \frac{mV^2}{2}$  называется кинетической энергией тела. На конечном участке траектории величина работы равна

$$A = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \Delta E_k \quad (6-15)$$

т.е. изменение кинетической энергии тела за некоторый промежуток времени равно суммарной работе, совершенной всеми силами, действующими на тело в этот же промежуток времени.

### 3.7 Закон изменения и сохранения механической энергии

Полная механическая энергия системы материальных точек  $E$  складывается из его кинетической энергии  $E_k$  и потенциальной энергии  $E_n$ , т.е.

$$E = E_k + E_n \quad (6-16)$$

При движении точек внутри системы изменяются как скорости точек, так и их взаимное расположение. Пусть скорость произвольной точки ( $i$ -точки) изменяется под действием сил со стороны других точек. Полное изменение кинетической энергии  $i$  – точки в соответствии с выражением (6-15) определяется работой всех сил, действующих на эту точку – как внутренних так и внешних:

$$\Delta E_{ki} = A_i \quad (6-17)$$

Сложив выражения (6-17) для всех точек системы, получим:

$$\sum_{i=1}^n \Delta E_{ki} = \sum_{i=1}^n A_i \quad (6-18)$$

Левая часть этого уравнения является кинетической энергией всей системы, которую можно обозначить  $\Delta E_k$ , а правая часть есть общая работа всех сил, которую можно представить как сумму трех слагаемых:

1. работы всех внутренних потенциальных (консервативных) сил -  $A_{\text{внутр.пот.}}$  ;
2. работы всех внутренних непотенциальных сил -  $A_{\text{внутр.непот.}}$  ;
3. работы всех внешних сил -  $A_{\text{внеш.}}$  .

При этом надо учесть, что суммарная работа всех внутренних потенциальных сил с обратным знаком равна изменению потенциальной энергии системы  $\Delta E_n$ . Поэтому равенство (6-18) приобретает такой вид:  $\Delta E_k = -\Delta E_n + A_{\text{внутр.непот.}} + A_{\text{внеш.}}$ . Перенос  $\Delta E_n$  в левую часть этого равенства и замечая, что  $\Delta E_k + \Delta E_n = \Delta E$ , получим:

$$\Delta E = A_{\text{внутр.непот.}} + A_{\text{внеш.}} \quad (6-19)$$

Выражение (6-19) представляет собой **закон изменения механической энергии**:



**Изменение полной механической энергии системы материальных точек за некоторый промежуток времени равно суммарной работе всех внутренних непотенциальных и всех внешних сил за этот промежуток времени.**

Если система замкнута, т.е. на нее не действуют никакие внешние силы или сумма всех внешних сил равна нулю, а все внутренние силы являются потенциальными, то  $\Delta E = 0$ , и выражение

$$\Delta E_k + \Delta E_n = \Delta E = \text{const} \quad (6-20)$$

Представляет собой **закон сохранения полной механической энергии.**

В качестве примера применения этого закона рассмотрим вывод так называемой второй космической скорости, под которой подразумевается скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно оказалось способным преодолеть притяжение Земли. Для этого используем выражение (6-7) для работы силы тяжести при удалении тела на бесконечно большое расстояние от Земли:

$$A_\infty = -\frac{Gm_1M}{R}.$$

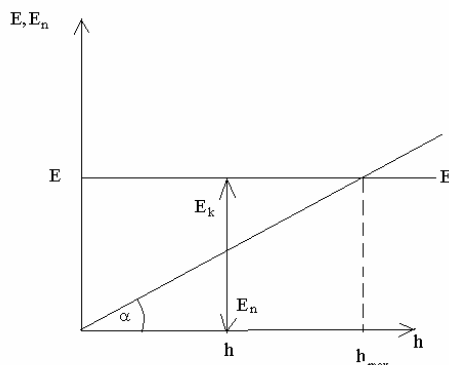
Т.к. гравитационные силы потенциальны, величина этой работы, взятая с обратным знаком, определяет значение потенциальной энергии притяжения тела к Земле -  $A_\infty = -E_n$ . Тогда из закона сохранения энергии следует что, тело может преодолеть притяжение Земли, если ему сообщить кинетическую энергию  $E_k$ , которая равна потенциальной энергии притяжения:

$$\frac{mV_{II}^2}{2} = G \frac{Mm}{R} = G \frac{M}{R} \frac{Rm}{R} = G \frac{Mm}{R^2} R = gRm$$

( $g$  – ускорение свободного падения на поверхности Земли), откуда следует, что вторая космическая скорость  $V_{II}$  равна:

$$V_{II} = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (6-21)$$

**Графическое представление энергии:** Энергию тела как функцию, определяющую ее величину, можно представить графически. Это не только удобно, но и позволяет сделать ряд заключений о характере движения тела. Так потенциальная энергия тела массы  $m_1$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли  $E_n(h) = mgh$  пропорциональна  $h$ . Зависимость  $E_n(h)$  графически будет иметь вид:



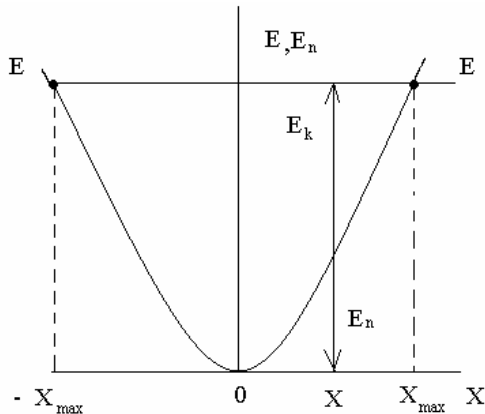
угол наклона этой прямой определяется массой тела:  $\text{tg} \alpha = mg$ . Полная энергия  $E = mgh$  есть величина постоянная (ЕЕ) -  $E_n$  и  $E_k$  на некоторую  $h$ . Из рассматриваемого графика несложно определить скорость тела на произвольной высоте

$$E_k = E - E_n = mgh_{\text{max}} - mgh = \frac{mV^2}{2}$$

$\Rightarrow$ : скорость тела на высоте  $h$

$$V = \sqrt{2g(h_{\text{max}} - h)}$$

Подобным же образом можно графически отобразить зависимость потенциальной энергии упругой деформации  $E_n(x) = \frac{kx^2}{2}$  от величины деформации  $x$ .



- Мы имеем симметричную параболу.

Здесь  $E$ - полная энергия тела. Если через точку абсцисс  $X$  провести вертикаль, то ее отрезок, заключенный между осями абсцисс  $X$  и параболой  $E_n(x)$ , выразит потенциальную энергию тела  $E_n$  в данной точке.  $E_k$  - отрезок. И в данном случае с возрастанием  $X$  пружины потенциальная энергия тела возрастает, кинетическая уменьшается, и наоборот – при уменьшении деформации. Когда деформация пружины равна  $X$  и  $E_n = \frac{kx^2}{2}$ , то  $E_k = E - E_n = kx_{\max}^2/2 - kx^2/2$ , откуда скорость тела

$$V = \sqrt{\frac{k}{m}(x_{\max}^2 - x^2)}$$

При  $X = 0$   $V = \sqrt{kx_{\max}^2/m}$  - максимальна по величине. Если  $x = x_{\max}$ , то  $V = 0$ .

## Лекция 4 Динамика вращательного движения

Момент силы и момент импульса. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Момент инерции материальной точки. Момент импульса механической системы. Момент инерции тела относительно неподвижной оси. Теорема Штейнера. Кинетическая энергия вращающегося тела. Закон сохранения момента импульса.

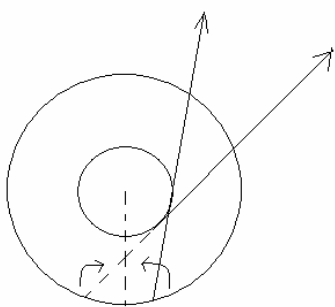
Произвольное движение твердого тела можно свести к поступательному и вращательному движению. Мы говорили, что *при поступательном движении все точки тела движутся по параллельным траекториям, так что для описания движения тела в целом достаточно знать закон движения центра масс*. При таком движении траектории все точек одинаковы и для описания этого движения используются такие понятия как масса, импульс, сила.

*При вращательном движении все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на одной оси*. Скорости точек на любой из окружностей связаны с радиусами этих окружностей и угловой скоростью вращения  $\vec{V} = [\vec{\omega} \vec{r}_i]$ . При вращении твердое тело сохраняет свою форму, поэтому  $r_i = \text{const}$  и

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}_i \right] = [\vec{\beta} \vec{r}_i] \quad (4.1)$$

$$a_t = \beta r, \quad a_n = \omega^2 r.$$

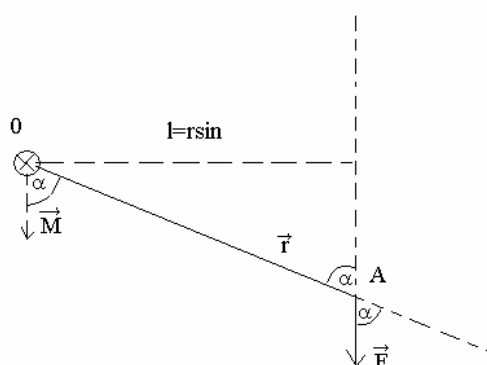
Однако при изучении вращательного движения понятий масс, скорость, ускорение, сила оказывается недостаточно. Вспомним известный фокус из школы, когда мы тянем за конец нитки, намотанной на катушку, и в зависимости от угла наклона нити катушка катится вперед или назад, т.е. здесь существенным оказывается не только величина силы, но и точка ее приложения, не только масса, но и распределение массы относительно оси вращения.



### 4.1 Определение момента силы

Из опыта мы также знаем, что при вращении какого-либо тела с помощью рычага (например, при затягивании болта гаечным ключом) существенным оказывается не только модуль силы, но и длина рычага. В соответствие с этим вводится понятие *момента силы*.

Пусть есть некоторое тело закрепленное в точке  $O$  и пусть некоторая сила  $\vec{F}$  воздействует на тело в некоторой точке  $A$  с радиус-вектором  $\vec{r}$ .



**Моментом силы относительно точки  $O$**  называется вектор  $\vec{M}$ , модуль которого равен произведению модуля силы  $\vec{F}$  на ее плечо  $l$

$$M = Fl = Fr \sin \alpha \quad (4.2)$$

**Плечом силы** называют длину перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую, вдоль которой действует

сила.

Направление вектора  $\vec{M}$  определяется **правилом буравчика**: при вращении его на по кратчайшему пути от направления вектора  $\vec{r}$  к направлению вектора  $\vec{F}$  перемещение винта буравчика определяет направление вектора  $\vec{M}$ . Поскольку его направление определяется условно,  $\vec{M}$  является псевдо вектором.

Мы будем обозначать:

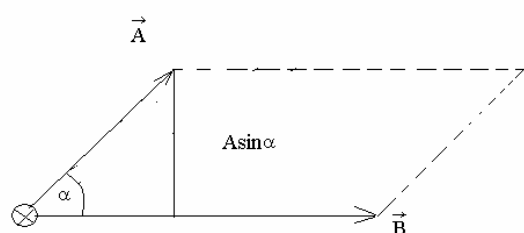
- ⊗ - вектор направлен за плоскость (перпендикулярно плоскости листа)
- ⊙ - вектор направлен к нам.

Из (4.2) следует, что момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус- вектора  $\vec{r}$  точки приложения на силу  $\vec{F}$ .

Для тех, кто забыл, напомним что:

**Векторным произведением векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$**  называется вектор, обозначаемый символом  $[\vec{A}\vec{B}]$  и определяемый выражением

$$[\vec{A}\vec{B}] = A \cdot B \sin \alpha \cdot \vec{n} \quad (4.3)$$



$A$  и  $B$  – модули векторов,  $\alpha$  - угол между векторами направление  $\vec{n}$  выражается таким образом, чтобы  $\vec{A}, \vec{B}$  и  $\vec{n}$  - образовывали правовинтовую тройку: если смотреть вдоль вектора  $\vec{n}$ .

Напомним также свойства векторного

произведения:

1) Векторное произведение **некоммутативно**

$$[\vec{A}\vec{B}] = -[\vec{B}\vec{A}], \text{ но}$$

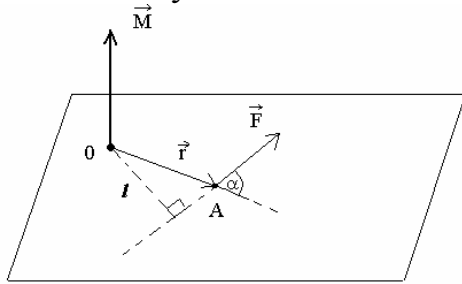
2) Векторное произведение обладает свойством **дистрибутивности**

$$[(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)] = [\vec{A}_1\vec{B}_1] + [\vec{A}_2\vec{B}_1] + [\vec{A}_1\vec{B}_2] + [\vec{A}_2\vec{B}_2]$$

Тогда из выражений (2) и (3) следует, что **модуль и направление момента силы  $\vec{M}$  совпадают с модулем и направлением векторного произведения векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$** . Поэтому мы можем записать

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}], \quad (4.4)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки приложения силы, проведенный из точки, относительно которой определяется момент. Мы можем изобразить все это в объеме. Пусть есть некоторая точка на плоскости, точка А – точка

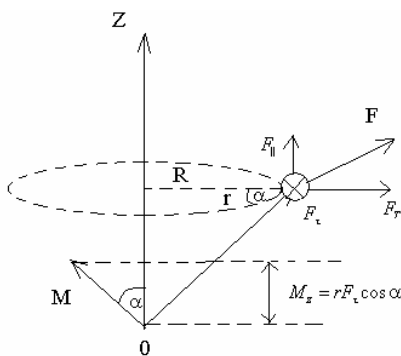


приложения сил. Когда сила приложена к одной из точек твердого тела, вектор силы лежит в плоскости, то вектор  $\vec{M}$  характеризует способность силы вращать тело вокруг точки О. Поэтому момент силы называют также вращающим моментом. Если

тело может вращаться вокруг точки О произвольным образом, то под действием силы тело повернется вокруг оси, совпадающей с направлением вращающего момента, т.е. вектора  $\vec{M}$ .

**Проекция вектора  $\vec{M}$  на произвольную ось Z, проходящую через точку О, называется моментом силы относительно этой оси.**

$$M_z = [\vec{r}\vec{F}]_z \quad (4.5)$$



Пусть к точке А приложена сила  $\vec{F}$ . Ось Z проходит через точку О,  $\vec{r}$  - радиус-вектор, определяющий положение точки А. Представим  $\vec{F}$  в виде

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\tau}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}(\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\tau})] = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_{\perp} + \vec{M}_{\tau}$$

$\vec{M}_{\perp}$  и  $\vec{M}_{\parallel}$   $\perp$  оси Z и их проекции = 0

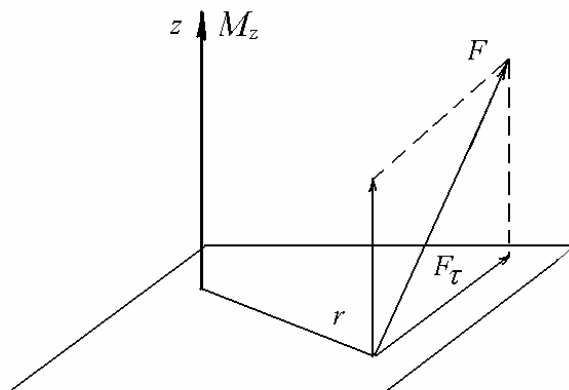
$$\vec{M}_z = (M_{\tau})_{np.Z} = M_{\tau} \cos \alpha = rF_{\tau} \cos \alpha = rF_{\tau}$$

**Момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело вокруг этой оси.**

Следует отметить, что сумма моментов всех внутренних сил для любой системы точек всегда равна нулю

$$\sum M_{внутр.} = 0$$

Т.е. моментом силы относительно произвольной оси z называется векторное произведение радиуса-вектора  $r$  и составляющей  $\vec{F}_{\tau}$  силы  $F$ , приложенной в точке А (см. рис.).



По аналогии с моментом силы вводится момент импульса материальной точки.

## 4.2 Момент импульса частицы

Момент импульса материальной точки (частицы) относительно точки  $O$  называется векторная величина

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}(m\vec{V})] \quad (4.6)$$

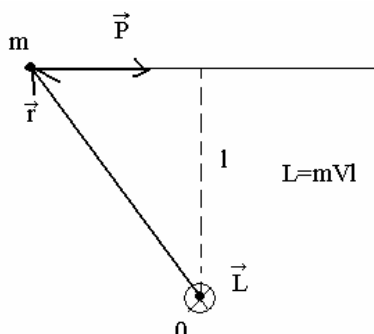
где  $r$  - радиус-вектор, определяющий положение частицы относительно точки  $O$ , а  $\vec{p} = m\vec{V}$  - импульс частицы. Направление этого вектора также определяется правилом буравчика. Модуль этой величины

$$L = rps \sin \alpha \quad (4.7)$$

можно представить в виде

$$L = lp,$$

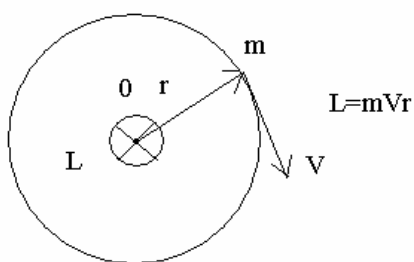
где  $l = r \sin \alpha$ .



Следует подчеркнуть, что частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется.

Рассмотрим частицу, которая движется вдоль прямолинейной траектории. **Проекция вектора  $\vec{L}$  на произвольную ось  $Z$ , проходящую через точку  $O$ , называется моментом импульса частицы относительно этой оси.**

$$L_z = [\vec{r}\vec{p}]_{np.z} \quad (4.8)$$



## 4.3 Момент инерции

Мы с вами определили момент импульса материальной точки как  $L_i = r_i m_i V_i$ , (индекс  $i$  подчеркивает, что мы взяли отдельную  $i$  – материальную точку), но  $V_i = \omega r_i$ , тогда

$$L_i = \omega m_i r_i^2$$

Соответственно для твердого тела мы получим  $L$ , просуммировав по всем материальным точкам, из которых состоит наше тело

$$L = \sum_i \omega r_i^2 m_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 \quad (4.9)$$

Обозначим величину

$$I = \sum_i r_i^2 m_i. \quad (4.10)$$

**Величина равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется моментом инерции тела относительно этой оси.**

Всякое тело, независимо от того, вращается оно или нет, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится.

Заметим, что с учетом (4.10) мы можем записать выражение (4.9) в виде

$$\vec{L} = I \vec{\omega}, \quad (4.11)$$

где  $I$ - момент инерции твердого тела.

Момент инерции характеризует распределение массы тела относительно определенной оси. Как следует из определения момента инерции – это величина аддитивная. Момент инерции тела складывается из моментов инерции его отдельных элементов, которые можно рассматривать как материальные точки, т.е.

$$I = \sum_{i=1}^N I_i,$$

где  $I_i = m_i r_i^2$  - момент инерции материальной точки.

При практическом вычислении моментов инерции вместо суммирования используется интегрирование (суммирование бесконечно малых величин). Если ось, относительно которой вычисляется момент инерции, проходит через центр симметрии тела, то вычисление такого интеграла представляет сравнительно несложную задачу, но в общем случае это достаточно сложная задача. Для упрощения вычислений полезной оказывается теорема о параллельном переносе осей инерции (или **теорема Штейнера**), формулировка которой гласит, что **момент инерции относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями, т.е.**

$$I_{\text{произ}} = I_{\text{цм}} + m d^2 \quad (4.12)$$

Определим момент инерции как

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i,$$

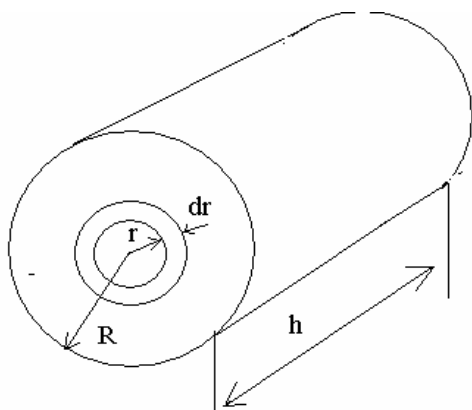
где  $\Delta m_i$  - некоторая элементарная масса. Но мы знаем, что суммирование можно записать как

$$I = \int r^2 dm.$$

Учитывая, что  $dm = \rho dV$ , мы имеем

$$I = \int \rho r^2 dV = \rho \int r^2 dV \quad (\rho = \text{const})$$

Вычисление  $\int$  - сложная задача. Но когда тело имеет осе-симметричную форму, задача упрощается:



Найдем  $I$  однородного цилиндра радиуса  $R$  и высотой  $h$ . Разобьем цилиндр на слои радиуса  $r$  и толщины  $dr$ . Масса такого слоя равна

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h \cdot dr.$$

Тогда

$$dI = \rho r^2 dV = \rho r^2 2\pi r h \cdot dr = 2\pi \rho h r^3 \cdot dr$$

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 \cdot dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \rho h \pi R^2 \cdot R^2$$

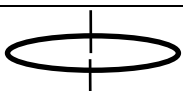
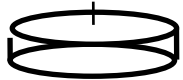
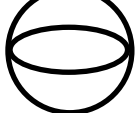
$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

(т.к.  $m = \pi R^2 h \rho$ ) - не зависит от  $h$ . Поэтому это же выражение определяет  $I$  и тонкого диска.

Если теперь нам нужно вычислить момент инерции цилиндра *относительно оси, проходящий через образующую цилиндра*, то используя теорему Штейнера (4.12) мы запишем

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

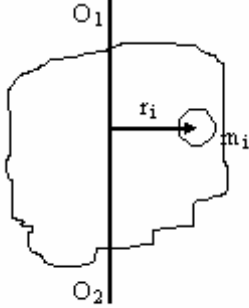
Для некоторых тел правильной формы значение моментов инерции относительно осей, проходящих через центр их симметрии, приведены в таблице

| Форма тела | Расположение оси                                                                    | Величина момента инерции |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| Обруч      |  | $m R^2$                  |
| Цилиндр    |  | $\frac{1}{2} m R^2$      |
| Шар        |  | $\frac{2}{5} m R^2$      |



#### 4.4 Уравнение динамики вращательного движения

Пусть имеется твердое тело произвольной формы, которое может вращаться вокруг оси  $O_1O_2$ . Разбивая тело на малые элементы, можно заметить, что все они вращаются вокруг оси  $O_1O_2$  в плоскостях, перпендикулярных оси вращения с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ . Движение каждого из отдельных элементов малой массы  $m$  описывается вторым законом Ньютона. Для  $i$ -го элемента имеем:



$$m_i a_i = m_i \frac{dv_i}{dt} = f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{iN} + F_i, \quad (4.13)$$

где  $f_{ik}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) представляют собой внутренние силы взаимодействия всех элементов с выбранным, а  $F_i$  - равнодействующая всех внешних сил, действующих на  $i$ -элемент. Умножим обе части уравнения (4.13) на  $r_i$ :

$$r_i (m_i a_i) = r_i m_i \frac{dv_i}{dt} = r_i f_{i1} + r_i f_{i2} + \dots + r_i f_{iN} + r_i F_i.$$

В правой части получившегося уравнения произведения типа  $r_i f_{i1}$  представляют собой моменты внутренних сил относительно оси вращения. Аналогично произведения  $r_i F_i$  являются моментами внешних сил, действующих на  $i$ -элемент. Просуммируем уравнения по всем элементам, на которые было разбито тело. Сумму моментов внутренних сил можно разбить по парам слагаемых, обязанных своим возникновением взаимодействию двух элементов тела между собой. Нетрудно заметить, что моменты сил взаимодействия этих элементов равны по величине и противоположно направлены, т.е. они компенсируют друг друга. При сложении всех моментов внутренних сил они попарно уничтожатся. Суммарный момент всех внешних сил обозначим  $\sum M_i$ , где  $M_i = [r_i F_i]$ .

Левая часть уравнения можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^N r_i m_i a_i = \sum_{i=1}^N r_i m_i \left[ \frac{d\omega}{dt} r_i \right] = \frac{d\omega}{dt} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = I \frac{d\omega}{dt},$$

На основании изложенного уравнение приводится к виду

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_i M_i,$$

которое называется уравнением динамики вращательного движения твердого тела или уравнением моментов. Дело в том, что левую часть этого уравнения можно представить по другому, т.к. по аналогии с правой частью величину

$$[r_i a_i m_i] = \left[ r_i \frac{d(m_i v_i)}{dt} \right] = \left[ r_i \frac{dp_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [r_i m_i v_i]$$

называют изменением момента импульса  $\vec{L}$  (радиус  $r_i$  внесен под знак дифференцирования, т.к. все точки вращаются по окружностям постоянного радиуса). Если обозначить сумму  $\sum_{i=1}^N L_i = L$ , то уравнение можно записать

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N M_i \quad \text{или}$$

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M} \quad (4.14)$$

**Скорость изменения момента импульса равна суммарному моменту сил, действующих на частицу.**

#### 4.5 Закон сохранения момента импульса

Мы уже говорили, что сумма моментов внутренних сил равна 0, т.е.

$$\sum M_{\text{внутр}} = 0,$$

тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M_{\text{внеш. сил}}$$

Если система замкнута, т.е.  $\sum M_{\text{внеш. сил}} = 0$  или моменты сил компенсируют друг друга, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

т.е.  $\vec{L} = \text{const.}$  Это случается, если система замкнута, т.е. внешние силы вообще не действуют, или если моменты внешних сил компенсируют друг друга. Наконец, если внешние силы оказываются центральными - линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Тогда мы можем сформулировать закон сохранения импульса следующим образом:

**Момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным.**

Весьма интересным представляется случай, когда момент импульса при вращении тела имеет достаточно большую величину (по сравнению с моментом внешних сил). Наиболее ярким примером этого служит гироскоп (см. рис. 16). **Гироскопом принято называть достаточно массивное тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии.** Гироскоп закрепляют в одной точке с помощью специального устройства – *карданова подвеса*. Если на гироскоп действуют внешние силы (груз  $mg$  на рис.), то ось гироскопа начинает смещаться под воздействием **момента силы**, т.е. изменение момента импульса совпадает с направлением  $\vec{M}$ . За малый промежуток времени  $dt$  ось гироскопа повернется на угол  $d\phi$  так, что изменение момента импульса  $dL = L_1 - L_2 = Ld\phi$ . В то же время из уравнения (13) следует  $dL = M$

$dt$ , откуда можно придти к выводу, что гироскоп начинает вращаться в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка с частотой, которая называется **частотой прецессии**

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} \quad (4.16)$$

Если моменты внешних сил малы по сравнению с моментом импульса вращающегося тела, то частота прецессии мала, и тело сохраняет ориентацию оси вращения в пространстве (пример- жонглирование предметами в цирке).

#### 4.6 Кинетическая энергия вращающегося тела

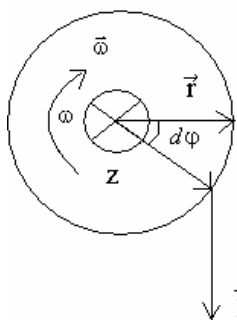
Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с частотой  $\omega$ , то элементарная масса  $\Delta m_i$ , отстоящая на расстоянии  $r_i$  от оси будет иметь скорость  $V_i = \omega r_i$ , тогда кинетическая энергия  $i$ - материальной точки

$$(\Delta E_k)_i = \sum (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum r_i^2 \Delta m_i \quad \sum r_i^2 \Delta m_i = I$$

Тогда

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} \Leftrightarrow (\text{наблюдается аналогия}) \quad E_k = \frac{mV^2}{2} \quad (4.17)$$

*Роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости – угловая скорость.*



Найдем работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела.

$$dA = FdS$$

$$dS = r d\varphi$$

$$dA = rF d\varphi$$

$$\text{Но } M_z = rF$$

$$\text{тогда } dA = M_z d\varphi$$

$$d\varphi = \omega dt; \quad dA = I\omega d\omega$$

$$A = \int I\omega d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = \Delta E_K$$

Соответственно мощность

$$p = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega$$

Такой подход удобно применять для решения многих задач механики:

Пусть стержень подвешен и после отклонения на 90 градусов отпустили без начальной скорости. Найдем его угловую скорость при прохождении стержня через положение равновесия.

Работа силы тяжести

$$A = mgl / 2 = E_K = \frac{I\omega^2}{2} \text{ отсюда следует, что}$$

$$\omega = \sqrt{mgl / I}$$

## Лекция 5 Элементы релятивистской кинематики и динамики – 2ч

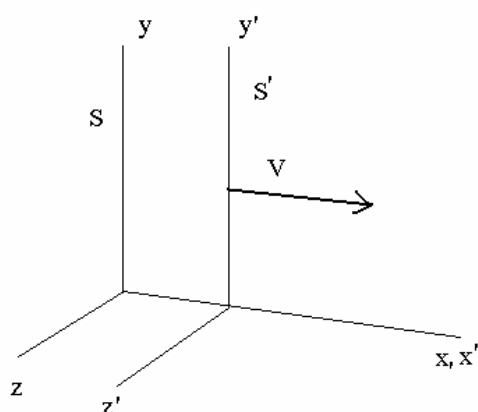
Преобразование Галилея. Механический принцип относительности. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Относительность длин и промежутков времени. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии. Соотношение между полной энергией и импульсом частицы. Релятивистское выражение для кинетической энергии.

До сих пор, рассматривая движение тел, мы предполагали, что их скорости относительно невысокие. Наши представления о пространстве времени меняются коренным образом, когда тело начинает двигаться с большими скоростями.

### 5.1 Преобразования Галилея

Галилей первым обратил внимание на то, что *никакими механическими опытами, осуществленными в пределах данной инерциальной системы отсчета, невозможно установить, находится ли она в состоянии покоя или в состоянии равномерного прямолинейного движения*. Он писал, что в закрытой каюте равномерно движущегося корабля мухи летят с одинаковой скоростью по всем направлениям; расстояние, на которое вы прыгните, не зависит от направления прыжка. Вероятно, и каждому из вас доводилось, разглядывая из окна вагона стоящий на соседнем пути поезд, испытать обманчивое чувство, будто вагон, в котором вы находитесь, начал двигаться, в то время как на самом деле трогался с места соседний поезд. Все это является проявлением принципа относительности.

Рассмотрим две инерциальные декартовы системы координат. Обозначим через  $S$  какую-либо инерциальную декартову систему координат,



а через  $S'$  – другую инерциальную декартову систему координат, движущуюся со скоростью  $V$  относительно первой. Пусть оси  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  системы  $S'$  направлены параллельно осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  системы  $S$  (рис. 5.1). Выберем эти оси так, чтобы вектор  $V$  был направлен параллельно оси  $X$ . Мы будем сравнивать измерения времени и расстояний, сделанные наблюдателем, неподвижным относительно системы  $S'$ , с такими же измерениями, выполненными

наблюдателем, покоящимся относительно системы  $S$ . Если каждый из двух наблюдателей располагает большим числом часов с совершенно одинаковым ходом, то они могут произвести следующий опыт. Пусть сначала

наблюдатель в системе S распределит свои часы вдоль оси X и установит их все на одно и то же время.

Точно так же сделает второй в системе S'. Теперь мы можем сравнить показания часов 1, 2, 3, ... в системе S. При условии  $V/c \ll 1$ , и опыт подтверждает, что

$$t' = t \quad (5.1)$$

Здесь  $t$  означает время события в системе S, а  $t'$  – означает время события в системе S'.

Мы можем также определить относительные размеры неподвижной и движущейся метровой линейки. Экспериментально мы находим, что

$$L = L' \quad (5.2)$$

при условии, когда  $V \ll c$ .

Мы можем выразить равенства (1) и (2) в форме преобразования, связывающего координаты  $x', y', z'$  и время  $t'$ , измеренные в системе S', с координатами  $x, y, z$  и временем  $t$ , измеренными в системе S. Система S' движется со скоростью  $V_x$  относительно системы отсчета S. Предположим, что при  $t=0$  также и  $t'=0$  и что в этот момент совпадают начала координат O и O'. Если мы выберем совершенно одинаковые масштабы длины, то получим уравнения преобразования:

$$t = t'; \quad x = x' + Vt'; \quad y = y'; \quad z = z' \quad (5.3a)$$

$$t = t'; \quad x' = x - Vt'; \quad y = y'; \quad z = z' \quad (5.3b)$$

Эти преобразования называются преобразованиями Галилея (рис.3.14).

Непосредственным следствием уравнений (5.3) является закон сложения скоростей:

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} + V = v'_x + V \quad (5.4)$$

Или в векторной форме:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (5.5)$$

где  $v'$  – скорость, измеренная в системе S', а  $v$  – скорость, измеренная в системе S. Преобразование, обратное по отношению к (5.5):

$$v' = v - V \quad (5.6)$$

## 5.2. Механический принцип относительности или Принцип относительности Галилея

Анализируя (5.3) и следствия из него Галилей сделал следующий вывод:

**Основные законы механики одинаково формулируются для любых двух систем отсчета, связанных преобразованием Галилея или для всех инерциальных систем.**

Это вывод называется **принципом относительности Галилея**.

Сделанное здесь предположение об инвариантности законов механики относительно преобразования (5.3) означает, что они должны иметь в

точности одинаковый вид, будучи записаны в штрихованных и в нештрихованных переменных. Это требование налагает определенное ограничение на возможную форму физических законов.

Из соотношения  $v = v' + V$ , где  $V$  – относительная скорость двух систем отсчета, следует, что

$$\Delta v = \Delta V' \quad (5.7)$$

т.е. изменение скорости одного и того же тела, наблюдаемое в системе  $S$ , равно изменению его скорости, наблюдаемому в системе  $S'$ . Как  $S$ , так и  $S'$  – инерциальные системы отсчета. Напомним, что мы предположили, что скорость  $V$  не меняется со временем. Так как  $\Delta t = \Delta t'$ , то отсюда следует, что ускорения, наблюдаемые в системах отсчета  $S$  и  $S'$ , равны между собой:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v'}{\Delta t} = a' \quad (5.8)$$

Отсюда следует, что при  $m = \text{const}$  (умножим на  $m$ )

$$ma = ma'$$

$$F' = ma' \quad (5.9)$$

$$F = ma \quad (5.10)$$

следовательно

$$F = F' \quad (5.11)$$

т.е. в обеих системах отсчета сила имеет одинаковую величину:  $F = F'$ .

### 5.3 Постулаты специальной теории относительности

Итак, принцип относительности Галилея утверждает, что все законы механики инвариантны в некоторых инерциальных системах.

На заре развития физики полагали, что все физические процессы можно свести к механике. 18 век – время торжества механики Ньютона. Но вот зарождается электродинамика – раздел физики о распространении электромагнитных волн, и оказывается, что уравнения электродинамики неинвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, т.е. по отношению к преобразованиям Галилея.

Пытаясь спасти классическую физику Лоренц предлагает свои преобразования пространства и времени при переходе от одной системы отсчета к другой. Уравнения электродинамики становятся инвариантными, но законы Ньютона перестают быть таковыми. *Что Ньютон ошибся, формулируя основные законы механики?* Это была большая проблема.

Все точки расставил в 1905 Альберт Эйнштейн, создав специальную теорию относительности. В ее основе лежат два принципа.

#### I. Принцип относительности Эйнштейна

Эйнштейн утверждал, что *все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета, но при этом преобразования Галилея должны быть заменены более общими преобразованиями – преобразованиями Лоренца* (мы их рассмотрим чуть

позже) И тогда принцип относительности Эйнштейна можно сформулировать следующим образом

**Уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.**

**II. второй принцип, лежащий в основе теории относительности – принцип постоянства скорости света:**

**Скорость света в вакууме не зависит от движения источников света и, следовательно, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.**

Справедливость этого утверждения была доказана опытным путем в 1887 году Майкельсоном и Морли. В этом опыте определялась разность времен, затраченных светом на прохождение одного и того же расстояния (туда и обратно) в направлении орбитального движения Земли и перпендикулярно ему. Если бы скорость света зависела от движения источника, то это было бы обнаружено. Но было установлено, что *скорость света есть величина инвариантная во всех инерциальных системах отсчета. Более того, скорость света  $c$  в вакууме является предельной. Никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей  $c$ .*

Существование предельной скорости приводит к тому, что понятие *одновременности*, считавшееся в ньютоновской механике *абсолютным*, в действительности *становится относительным*.

## 5.4 Преобразования Лоренца

Преобразования координат соответствующие двум основным постулатам теории относительности, были впервые получены Лоренцом. Эти преобразования можно записать в виде

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - Vt}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}, & (5.12) \\y' &= y, & z' = z, \\t' &= \frac{t - (V/c^2)x}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

(Это преобразование имеет длинную историю. Впервые оно использовалось Ларморов в его книге «Эфир и вещество» для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона и Морли. Лармор добивался точности только до величин порядка выше  $V^2/c^2$ ; на самом деле его результаты совершенно точны.)

Эти преобразования линейны относительно  $x$  и  $t$  и переходят в преобразования Галилея при  $V/c \rightarrow 0$ .

Удобно применять некоторые стандартные обозначения. Введем



$$\beta = \frac{V}{c} \quad (5.13)$$

т.е.  $\beta$  - это скорость, измеренная в такой системе единиц, для которой  $c=1$ . Удобно также ввести величину

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} \quad (5.14)$$

Заметим, что  $\gamma \geq 1$ . В предельных релятивистских задачах  $1-\beta \ll 1$ ; полезно заметить, что при этом  $1-\beta^2 = (1-\beta)(1+\beta) \approx 2(1-\beta)$ .

С обозначениями  $\beta$  и  $\gamma$  преобразования Лоренца принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y &= y', \quad z = z', \\ t' &= \gamma(t - \frac{\beta x}{c}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

и, как легко видеть, ему соответствует такое обратное преобразование:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct'), \\ y &= y', \quad z = z' \\ t &= \gamma(t' + \frac{\beta x'}{c}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

## 5.5. Релятивистский закон сложения скоростей

Предположим, что система отсчета  $S'$  движется с постоянной скоростью  $V_x$  относительно системы отсчета  $S$ . Пусть какая-то частица в свою очередь движется относительно системы отсчета  $S'$  с постоянной скоростью, составляющие которой равны  $V'_x, V'_y, V'_z$ . Каковы составляющие  $V_x, V_y, V_z$  скорости этой частицы относительно системы отсчета  $S$ ?

Из уравнений (5.16) получаем ( $\beta = V/c$ )

$$x = \gamma x' + \gamma \beta ct', \quad t = \gamma t' + \frac{\gamma \beta x'}{c} \quad (5.17)$$

Откуда следует:

$$dx = \gamma dx' + \gamma \beta c dt', \quad dt = \gamma dt' + \frac{\gamma \beta dx'}{c}.$$

Таким образом,

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma \beta c dt'}{\gamma dt' + \gamma \beta dx'/c} = \frac{V'_x + \beta c}{1 + \beta V'_x/c}$$

или

$$V_x = \frac{V'_x + V}{1 + V'_x V / c^2} \quad (5.18)$$

Этот результат можно сравнить с результатом, полученным из преобразований Галилея

$$V_x = V'_x + V.$$

Подобным же образом, так как  $y=y'$  и  $z=z'$ , получаем

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \gamma \beta dx'/c} = \frac{V'_y}{1 + V'_x V/c^2} (1 - V^2/c^2)^{1/2}$$


---


$$V_z = \frac{V'_z}{1 + V'_x V/c^2} (1 - V^2/c^2)^{1/2}$$

Обратное преобразование можно вывести с помощью уравнений (5.15)

$$V'_x = \frac{V_x - V}{1 - V_x V/c^2},$$

$$V'_y = \frac{V_y}{1 - V_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

$$V'_z = \frac{V_z}{1 - V_x V/c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Предположим, движущаяся частица – это фотон и в системе  $S'$  его скорость  $V'_x = c$ . Из уравнения (5.19) мы видим, что

$$V_x = \frac{c + V}{1 + cV/c^2} = c$$

Скорость фотона равна  $c$  в любой системе отсчета.

Если фотон движется со скоростью  $+c$  в системе отсчета  $S'$ , а сама система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $+c$ , *то скорость движения фотона, наблюдаемая относительно системы отсчета  $S$ , равна только  $+c$ , а не  $+2c$* . Существование предельной скорости является следствием уравнений сложения скоростей, введенных нами из преобразования Лоренца. Далее, заметим, что *не существует* такой системы отсчета, в которой фотон (квант света) был бы неподвижен.

## 5.6 Относительность длин и промежутков времени

**Сокращение длины.** Представим себе линейку, лежащую вдоль оси  $X$  и неподвижную относительно системы отсчета  $S$ . Если линейка неподвижна, то в этой системе отсчета  $S$  координаты ее концов  $x_1$  и  $x_2$  не зависят от времени  $t$ . Следовательно, величина

$$L_0 = x_2 - x_1 \quad (5.21)$$

Представляет собой *длину покоящейся* линейки.

Теперь будем рассматривать эту линейку в системе отсчета  $S'$ , движущейся со скоростью  $V_x$  относительно системы  $S$ , в которой линейка неподвижна. Для измерения длины линейки в системе  $S'$  мы определяем координаты точек  $x'_1$  и  $x'_2$ , совпадающих в данный момент  $t'$  с концами линейки. Естественно, определить длину линейки  $L$  в движущейся системе отсчета  $S'$  как расстояние между точками  $x'_1$  и  $x'_2$ , которые одновременно (в системе  $S'$ ) совпадают с конечными точками линейки:

$$L = x'_2(t') - x'_1(t') \quad (5.22)$$

На основании преобразования Лоренца (21) получаем

$$x_2 = x'_2(t')\gamma + ct'\beta\gamma, \quad x_1 = x'_1(t')\gamma + ct'\beta\gamma \quad (5.23)$$

$$x_2 - x_1 = L_0 = [x'_2(t') - x'_1(t')]\gamma = L\gamma \quad (5.24)$$

Таким образом,

$$L = \frac{L_0}{\gamma} L_0 (1 - \beta^2)^{1/2} \quad (5.25)$$

При этом мы пользуемся нашим определением  $\gamma: \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Это отношение длин представляет собой лоренц-фитцджеральдово сокращение размера линейки, движущейся параллельно своей длине.

**Одновременность событий в различных системах отсчета.** Пусть в системе  $S$  в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  происходят 2 события. В системе  $S'$  им будут соответствовать  $x'_1$  и  $x'_2$  и  $t'_1$  и  $t'_2$ .

1) Если в  $S$  события происходят в одной точке ( $x_1 = x_2$ ) и в одно и то же время  $t_1 = t_2$ , то  $x'_1 = x'_2$  и  $t'_1 = t'_2$ , т.е. события являются одновременными и пространственно совпадающими и в  $S'$ .

2) Если события в  $S$  пространственно разнесены  $x_1 \neq x_2$ , но одновременны  $t_1 = t_2$ , то в системе  $S'$ , как это следует из преобразования Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t'_1 = \frac{t - Vx_1/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t'_2 = \frac{t - Vx_2/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Но  $x_1 \neq x_2$ , тогда  $t'_1 \neq t'_2$ , т.е. если события пространственно разнесены, то в системе  $S'$  они будут и неодновременными.

**Замедление времени, измеряемого движущимися часами** (длительность событий в различных системах отсчета). Слово замедление по отношению к часам означает удлинение интервала времени. Рассмотрим часы, которые неподвижны в системе отсчета  $S$ . Результат измерения интервала времени в системе отсчета, в которой часы *неподвижны*, обозначается одной буквой  $\tau$  и называется *собственным интервалом времени*. Предположим, что часы расположены в начале координат системы отсчета  $S$ , т.е. в точке, где  $x=0$ . Применяя преобразования Лоренца при постоянной величине  $x$ , получаем для величины интервала времени  $t'$ , измеренного часами в системе отсчета  $S'$ , движущейся со скоростью  $\hat{V}_x$  относительно системы  $S$ , в которой находятся первые часы:

$$t' = \tau\gamma = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (5.26)$$

Интервал времени, измеренный в движущейся системе отсчета  $S'$ , длиннее интервала времени в системе отсчета  $S$ .

Это явление называется замедлением времени. Кажется, что движущиеся часы идут медленнее находящихся в покое. Это нелегко понять интуитивно; пройдет может быть, неделя или год, пока вы уловите смысл замедления времени. Причина кажущегося парадокса кроется в инвариантности величины  $c$ . Подобное явление должно совершаться с часами любого типа. В частности, если  $\tau$  представляет собой период полураспада мезонов или радиоактивных атомов, измеренный в системе отсчета  $S$ , в которой распадающиеся частицы неподвижны, то

$$t' = \frac{\tau}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (5.27)$$

- это период полураспада, наблюдаемый в системе отсчета  $S'$ , в которой частицы движутся со скоростью  $\beta$ .

В связи с обнаружением эффекта релятивистского замедления времени, в свое время возникла проблема парадокса часов или парадокса близнецов.

**Парадокс времени** (парадокс близнецов, парадокс часов) – кажущееся противоречие, возникающее в специальной теории относительности при нахождении промежутков времени, показываемых двумя часами А и В, из которых часы А все время покоились в инерциальной системе отсчета, а часы В улетели от А, совершили путешествие и вновь вернулись к А.

Противоречие возникает при следующем рассуждении. Согласно теории относительности, если по покоящимся часам А прошел промежуток времени  $t$ , то по движущимся с постоянной скоростью  $V$  часам В пройдет промежуток времени

$$\tilde{t} = t\sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (5.28)$$

Если скорость движения часов В меняется с течением времени, то

$$\tilde{t} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - V^2(t)/c^2} dt \quad (5.29)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  - моменты начала и конца измерения времени по часам А. После возвращения В к А промежуток времени  $\tilde{t}$ , измеренный часами В, всегда меньше промежутка времени  $t$ , измеренного часами А. Но движение относительно, то, казалось бы, можно обратить рассуждение: считать часы В неподвижными, а часы А путешествующими и поэтому идущими медленнее, чем В. Тогда после возвращения должны отстать часы А. Полученное противоречие и называют парадоксом часов или парадоксом времени.

Вместо часов часто рассматривают двух близнецов, из которых один оставался на Земле, а другой совершал путешествие в космосе, а затем возвратился на Землю. Разницу в протекшем времени можно непосредственно определить по тому, кто из близнецов окажется старше ( $V \approx c$ ,  $\Delta t = 500$  лет и обратно 500, на Земле пройдет 1000 лет, а на корабле пройдет только 1 год). Поэтому упомянутое противоречие называют также ПАРАДОКСОМ БЛИЗНЕЦОВ.

В действительности противоречие (парадокс) возникло из-за некорректности рассуждения. Правильное рассуждение состоит в следующем. Часы А все время находились в инерциальной системе отсчета,

они не подвергались ускорениям. В этой системе отсчета ф-ла (5.29) все время справедлива, и вывод о том, что по возвращении отстанут часы В, правилен (путешествовавший близнец окажется моложе своего брата, оставшегося на Земле). Система отсчета, связанная с часами В, не может быть все время инерциальной, поскольку эти часы подвергались ускорению. В неинерциальных системах отсчета ф-ла (5.29) неверна, и при рассмотрении хода движущихся часов надо учитывать ускорения, имеющиеся в системе отсчета. Поэтому и вывод о том, что с точки зрения В часы А должны по возвращении отстать от В, неверен. В общем случае неинерциальных систем отсчета формула (5.29) должна быть заменена следующим выражением:

$$\tilde{t} = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{00} + 2g_{0i}\dot{x}^i + g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} dx^0 \quad (5.30)$$

Здесь  $g_{00}, g_{0i}, g_{ik}$  - компоненты метрического тензора, характеризующего систему отсчета (по дважды встречающимся индексам подразумевают суммирование, латинские буквы принимают значения 1, 2, 3),  $x^0$  - временная,  $x^i$  - пространственные координаты,  $\dot{x}^i$  - компоненты скорости движущихся часов. Ф-ла (5.30) справедлива также при наличии полей тяготения, когда вместо частной теории относительности следует пользоваться общей теорией относительности.

Выводы о замедлении времени на движущихся телах и о влиянии на течение времени полей тяготения непосредственно проверены экспериментально и подтверждают теорию.

## 5.7 Релятивистский импульс.

Выражение, обеспечивающее инвариантность закона сохранения импульса, может быть получено, если вместо времени  $t$  подставить собственное время  $\tau$ .

Тогда

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (5.31)$$

## 5.8 Релятивистское выражение для энергии

В релятивистской механике справедливым остается выражение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Это означает, что  $\frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = F$ . Откуда видно, что сила не является инвариантной величиной. Кроме того, сила  $F$  и ускорение  $a$  не коллинеарны. Легко получить выражение для кинетической энергии. Поскольку

$$dE_k = dA \text{ и } dE_k = v \cdot p \cdot dt, dA = F \cdot ds$$

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2. \quad (5.32)$$

Отсюда следует, что

$$E_0 = mc^2, \quad (5.33)$$

где  $E_0$  является энергией покоя.

Энергия и импульс в релятивистской механике не сохраняются. Инвариантом является выражение:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2. \quad (5.34)$$

## 5.8 Взаимосвязь массы и энергии покоя

Давайте посмотрим на выражение (5.33), согласно которого масса тела и его энергия покоя связаны соотношением  $E_0 = mc^2$ , тогда очевидно, мы можем сделать важный вывод, что всякое изменение массы  $\Delta m$  сопровождается изменением энергии покоя  $\Delta E_0$ , при чем эти изменения пропорциональны друг другу.

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m \quad (5.35)$$

**Это утверждение носит название закона взаимосвязи массы и энергии покоя (иногда говорят просто массы и энергии)-** Взаимосвязь  $m$  и  $E_0$  приводит к тому, что суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется.

Рассмотрим пример неупругого центрального удара двух одинаковых частиц, движущихся с равными по модулю и противоположными по направлению скоростями. В результате соударения образуется новая неподвижная частица. В ньютоновской механике мы бы имели

$$M = m + m = 2m \quad V = V_1 - V_2 = 0 \quad (|V_2| = |V_1|).$$

В релятивистской механике дело обстоит несколько иначе:

1) до соударения полная энергия каждой частицы равна

$$E_i = \frac{mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

2) полная энергия образовавшейся неподвижной частицы

$$E = Mc^2$$

3) Применим закон сохранения энергии к данному случаю

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = Mc^2 \Rightarrow$$

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-V^2/c^2}} > 2m \quad (5.36)$$

Таким образом, масса образовавшейся частицы больше масс исходных частиц. Это обусловлено тем, что кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это привело, в свою очередь, к возрастанию массы на

$$\Delta m = \Delta E_0 / c^2$$

Если обобщить вышесказанное на произвольный случай движения частиц с околосветовыми скоростями, то выражения (12), (16) и (17) можно записать в виде

$$\vec{p} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (5.37)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (5.38)$$

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (5.39)$$

где  $m_0$  - масса покоящейся частицы или масса покоя частицы,  $V$  – скорость движущейся частицы.

Тогда масса движущейся частицы  $m$  будет равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (5.40)$$

$$E_k = (m - m_0)c^2 \quad (5.41)$$

При распаде неподвижной частицы на несколько разлетающихся в разные стороны частиц наблюдается обратное явление – сумма масс образовавшихся частиц оказывается меньше исходной частицы на величину, равную суммарной кинетической энергии этих частиц, деленной на  $c^2$ .

Если обобщить наши выводы на тело, состоящее из  $N$  частиц с массами  $m_1, m_2, m_3 \dots m_N$ , то тело не будет распадаться на образующие его частицы при условии, что последние связаны друг с другом. Эту связь можно охарактеризовать энергией связи  $E_{св}$ . *Энергия связи – это энергия, которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на такие расстояния, при которых взаимодействием частиц можно пренебречь.*

В соответствии с выражениями (5.32, 5.35) энергия связи системы частиц будет

$$E_{св} = c^2 \sum_i m_i - Mc^2 \quad (5.42)$$

где  $M$  – масса системы (масса тела).