БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА”

ЮДЕНКОВ Ю.Т.

Электронная версия курса математика технического вуза

Часть 2 .

Пределы и непрерывность функций. Дифференциальное исчисление.

Пособие разработано на основе лекций, читаемых на протяжении ряда лет
студентам специальности АЭП (электропривод)
по дисциплине “ Высшая математика.”

2006 г.

Введение

В основу курса положены лекции и практические занятия, на протяжении многих лет реализованные в учебном процессе для специальности “Электропривод и автоматизация промышленных предприятий”. Расположение материала обусловлено не требованиями математической строгости изложения, но чисто утилитарно, с таким расчетом, чтобы аппарат предыдущих разделов мог служить инструментом для изучения последующих. Именно на таком принципе даны многие формулировки основных понятий и развития приложений, основанных на этих понятиях. Для начинающего напомним, что термин “определение” подразумевает “договор” между читателем и остальными пользователями математики по некоторому вопросу для исключения возможных неверных толкований. Это значит, что для понимания вопросов, следующих за определением, определение должно быть “вызубрено”, но не вспоминаться с напряжением.

`Текст курса написан не языком “чистого математика” (т.е. определение --> теорема и ее доказательство --> следствия --> обобщение --> новое определение и начинаем сначала ...), а языком для математика-прикладника (определения --> вытекающие из него естественным путем выводы (иногда теоремы с доказательствами) --> отработка навыков использования новых понятий и возможностей --> возможные приложения новых сведений --> переход на введение новых понятий). В текстах сравнительно мало примеров, т.к. это – фактический конспект лекций. Для более полного понимания изучаемого материала предполагается, что читатель будет иметь удовольствие полистать литературу по изучаемому вопросу. Список учебной литературы не приводится из-за его объемности, а также по той причине, что каждый лектор придерживается своего перечня книг. Все приведенные тексты – компиляция книг разных авторов, разного времени издания и разного назначения. Данный курс построен по принципу “понятно лектору – будет понятно и слушателю” и потому представляет собой лоскутное одеяло из разных разделов математики, изложенных в разном стиле. При этом везде преследовалась цель изложения математических принципов в прикладной направленности. Это обнаруживается в большом числе комментариев к теоремам, доказательствам и следствиям.

1.Введение в математический анализ

1.1.Основные понятия и определения

Множество R действительных чисел состоит из двух подмножеств (два подмножества сотавляют множество) : Q – множество рациональных чисел вида $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) и J - множество иррациональных чисел (нерациональных, которые невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$).

Основные свойства R.

Упорядоченность - между любыми x и y из R имеет место одно из соотношений : либо $x < y$, либо $x=y$, либо $x > y$.

Плотность - между любыми x и y из R такими , что $x \neq y$, содержится бесконечно много чисел из R.

Непрерывность. Пусть все R разбиты на два класса : нижний A и верхний B так. что каждое x принадлежит только одному классу и притом x такое , что для $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$ имеет метсто $x < y$. Тогда такое разбение (сечение) определит единственное действительное, пограничное для разных классов. Само оно (это пограничное) либо наибольшее из A и тогда в B нет наименьшего; либо оно (это пограничное) наимеьшее в B и тогда в A нет наибольшего. (В этом смысл теоремы Дедекинда).

Все, что можно измерить и выразить числом (в дальнейшем по умолчанию рассматриваем только действительные числа)– **величина.**

Простейшая классификация величин: **постоянная, перменная, параметр**. Такая классификация условна. Для обозначения постоянных по умолчанию принято использовать начальные буквы латинского алфавита a, b , c,… Для переменных – заключительные буквы латинского алфавита x, y , z … Для параметров – p,q,t … (Для целых и натуральных принято использовать буквы i,j,k,l,m,n).

Для измерения и изображения величин используют **шкалы** . Шкала – это прямая (кривая) с указанным началом отсчета (нулем) , направлением и масштабной единицей. Шкалы используют равномерные и неравномерные – вес зависит от требований практики. Как правило будем использовать равномерные прямолинейные шкалы – числовые оси. Числа и соответствующие им точки на числовой оси обозначают одними и теми же буквами x. И говорят точка (число).

Произвольное подмножество из R обозначают X (большое).

Принадлежность числа x множеству X обозначают $x \in X$.

Примеры наиболее распространенных подмножеств.

Отрезок – это $X=[a,b] =\{x \mid a \le x \le b\}$. Иногда говорят - сегмент.

Промежуток (интервал) – это $X=(a,b) =\{x \mid a < x < b\}$.

Полуинтервал (полуотрезок) – это $X=[a,b) =\{x \mid a \le x < b\}$. Скобки и неравенство могут быть в другом месте (около b).

C – верхняя граница множества X, если $\forall x \in C$ имеет место $x \le C$.

C – нижняя граница множества X, если $\forall x \in C$ имеет место $x \ge C$.

Наибольшая из нижних границ – точная нижняя грань. Аналогичное определение точной верхней грани множества.

Окрестность точки x_o – любой промежуток, содержащий точку x_o .

ε **- окрестность** точки x_o – промежуток длиной 2ε с центром в этой точке, содержащий точку x_o . Обозначается (принято) $(x_o-\varepsilon\ ; x_o+\varepsilon)$.

1.2.Функция. Ее свойства и построение графиков элементарных функций.

<u>1.2.1.Функция, способы ее задания, свойства, график функции, преобразование графика сдвигом и деформацией.</u>

Если $\forall x \in X$ по закону f ставится (ставят) в соответствие единственное действительное $y \in У$, то говорят, что на множестве X задана функция аргумента x. Пишут так y=f(x).
($\forall x \in X$ читаем так: для любого x из множества X)

Множество X принято называть областью определения функции. Она может быть задана или ее находят , используя вид функции. Множество У называют областью значений. Иногда область значений находят или она известна.

Например, областью определения функции y=lnx являются положительные действительные числа (пишут так x>0). Областью значений этой функции будут все действительные числа.

В обозначении y=f(x) содержится двусмысленность. Дело в том, что f (закон) - это фактически перечень правил, в строгой последовательности выполнения которых получаем единственное действительное значение y для произвольно взятого значения x из X. Т.е. записано «число равно закону» , что фактичеки неверно, но исторически принято считать приемлемой такую запись. Поэтому часто в литературе можно встретить и запись вида y=y(x), что также считается приемлемым. Просто не следует забывать, что есть что в записи y=f(x) (или y=y(x)).

Рассматривают несколько способов задания функции. Аналитический – с помощью одной или нескольких «формул». При этом запись вида y=f(x) рассматривают как явный ***способ задания*** функции. Если же переменных x и y связаны уравнением с двумя переменными, то говорят о неявном способе задания функии (Фактически, записав y=f(x) в виде y-f(x)=0 или f(x)-y=0 мы получаем неявное задание функции). Если же переменные (аргумент и функцию удобно связать соотношениями $\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t) \end{cases}$ то говорят о параметрическом задании функции (связь реализована через параметр t).

Из других способов задания функции отметим табличный способ и программный. В первом случае функция представляет собой таблицу с одним входом (столбец значений аргумента) и одним выходом (столбец значений функции). А во втором результат вычислений представлен либо цифровыми данным на экране или в файле.

Графиком функции называют кривую в избранной системе координат. При этом каждая точка кривой имеет координаты x и y , связанные законом f.

Опр. Пусть $\forall x \in X \subset R$ задана y=f(x). Пусть $\forall t \in T \subset R$ задана x=ф(t). Тогда говорят, что на T задана **сложная функция** аргумента t и обозначают этот факт так y=f(ф(t)).

При этом x называют промежуточным аргументом, а t – основным. Закон f(ф(t)) называют наложением (суперпозицией) функций.

Пример 3.1. $y=\text{Sin}\ln(1-x^2)$. Имеем функцию $y=\text{Sin}z$ с промежуточным аргументом $z=\ln u$, функцию $z=\ln u$ с промежуточным аргументом $u=1-x^2$ и функцию $u=1-x^2$ с основным аргументом x. Или просто сложную функцию y от аргумента x.

Пусть $\forall x \in X \subset R$ задана $y=f(x)$. Пусть мы смогли решить уравнение $y=f(x)$ относительно переменной x. Т.е. получили запись $x=ф(y)$. Т.к. оба равенства $y=f(x)$ и $x=ф(y)$ **дают один и тот же график**, но во втором случае аргументом будет переменная y, это неудобно (не принято так писать). Тогда можно в записи $x=ф(y)$ поменять местами переменные x и y и получить привычную запись функции $y=ф(x)$.

Опр. Две функции $y=f(x)$ и $y=ф(x)$ принято называть **взаимно обратными** функциями.

Отмечаем, что **областью определения** функции $y=ф(x)$ будет область значений функции $y=f(x)$. А областью значений функции $y=ф(x)$ будет область определения функции $y=f(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно линии $y=x$ (биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов декартовой системы координат).

К простейшим свойствам функций относят: монотонность, периодичность, четность и нечетность.

Опр. **Приращением** переменной называют разность двух ее значений. Приращений обозначают символом Δ, за которым следует имя переменной. Например , Δx – приращение переменной x (или просто дельта x).

Опр. Если знаки приращения функции и аргумента в данной точке совпадают, то функция называется **возрастающей** в данной точке.

Аналогично дают определение убывающей в данной точке функции. Два этих понятия объединяют понятием **монотонность**.

Опр. Если f(x) определена на R и существует такое действительное $T\neq 0$, что $f(x+T)= f(x)$, то говорят, что f(x) периодическая с периодом T
(T- периодической).

Периодические функции обладают свойствами.

Если f(x) T- периодична, то она и nT- периодична. Док. Имеем $f(x+nT)= =f((x+(n-1)T)+T)= f(x+(n-1)T)= f((x+(n-2)T)+T)=\ldots= f(x+T)= f(x)$.

Если f(x) T- периодична, то функция $ф(x)= f(ax)$ T/a –периодична. Док. Имеем $ф(x+ T/a)=f(a(x+ T/a))=f(ax+T)=f(ax)=ф(x)$.

Опр. Если $f(-x) = - f(x)$, то функцию называют нечетной.

Опр. Если $f(-x) = f(x)$, то функцию называют четной.

Внимание! При проверке свойства четности ответ следует давать только по четности. Это значит, что, если условие $f(-x) = f(x)$ не выполняется, нельзя говорить ” Функция нечетная” , но следует говорить ”Функция не будет четной”, т.к. речь идет не о четных числах, а о свойстве четности. (Если проверяете пиджак, чистый ли он, то он может быть либо чистым либо грязным. И нет никакого дела , какого цвета пиджак).

При схематическом построении графиков функций следует использовать указанные свойства их . Помимо этого используют при схематическом построении (говорят о ***качественной*** картине без уточнения конкретных цифровых характеристик) наложение линейной функциональной зависимости на данную функцию. Это значит на основе базовой функции y= f(x) можно строить графики функций вида y=Af(ax+b)+B. Выполним такое построение поэтапно, а затем запишем жесткий алгоритм построения графика функции y=Af(ax+b)+B.

1.Пусть мы имеем базовый график (известный нам) y= f(x).

2.Для построения графика функции y= f(ax) достаточно график y=f(x) сжать вдоль оси Ox в направлении оси Oy в a раз при a>1 (растянуть график y=f(x) вдоль оси Ox от оси Oy в a раз при a <1). Если при этом a отрицательно, то следует деформируемый график еще и отразить в оси Oy.

3.Для построения графика функции y=Af(x) достаточно график y=f(x) сжать вдоль оси Oy в направлении оси Ox в a раз при A<1 (растянуть график y=f(x) вдоль оси Oy от оси Ox в a раз при A>1). Если при этом A отрицательно, то следует деформируемый график еще и отразить в оси Ox.

4.Для построения графика функции y=f(x+м) достаточно сдвинуть базовый график y=f(x) на величину м вдоль оси Ox вправо, если м<0 и влево, если м>0.

5.Для построения графика функции y=f(x)+B достаточно сдвинуть базовый график y=f(x) на величину B вдоль оси Oy вниз, если B<0 и вверх, если B>0.

Общий алгоритм. Для построения графика функции y=Af(ax+b)+B следует: переписать равенство в виде $y=Af(a(x+\frac{b}{a}))+B$; построить базовый график y= f(x); выполнить п.п.2 и 3 в любой последовательности; выполнить п.п.4 и 5 в любой последовательности.

Комментарий. При достаточном опыте построения графиков, последовательность можно изменить. Однако нужно помнить, что п.п. 2 и 3 не изменяют “точку опоры” (расположение начала системы координат) и потому последующий сдвиг легко и всегда правильно реализуется. Если же сначала произвести сдвиг кривой , то теряется возможность деформировать ее, т.к. становится неизвестным “куда сжимать”, хотя “вдоль чего” остается тем же. Неизвестной будет также ось отражения при необходимости.

Пример 3.2. Изобразите схематически (качественно) кривую
$y=-2-3\sqrt{(x-1)^3}$.

Решение . Построим сначала базовую кривую $y=x^{1,5}$. Это – парабола с вершиной в начале координат, проходящая через точки (0;0) и (1;1) как и всякая типовая парабола. Для отрицательных x кривой нет и график расположен в 1-й четверти. Ветви параболы загнуты вверх т.к. 1,5>1. Рисунок базовой кривой представлен на Рис 3.1.

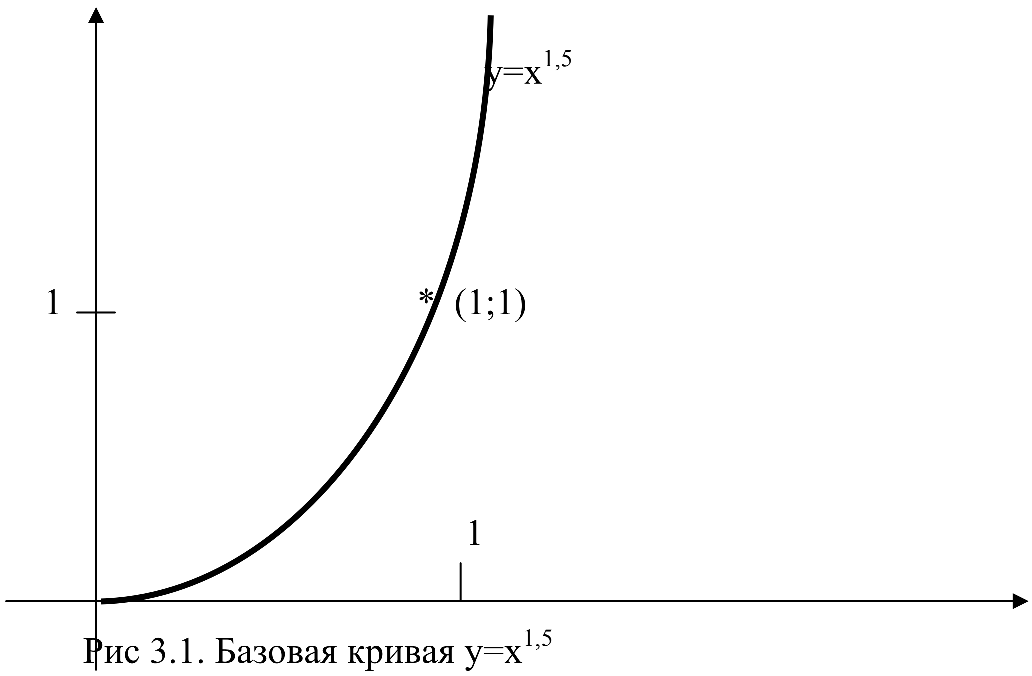


Рис 3.1. Базовая кривая $y=x^{1,5}$

Теперь строим график функции $y=-3\ x^{1,5}$. Растянув базовый график в 3 раза вдоль оси Оу от оси Ох и отразив его в оси Ох, получим кривую, представленную на Рис 3.2 –1. Масштаб возьмем несколько иной. Так как деформация и отражение завершены, можно выполнять сдвиг вдоль координатных осей : сдвинуть кривую на 1 вправо и опустить полученное на 2 вниз. Получим результативную (требуемую) кривую $y=-2-3\sqrt{(x-1)^3}$.

Отметим, что на всех графиках нанесена точка , обозначенная символом * , но с разными координатами. Сделано это умышленно, чтобы можно было проследить за преобразованием графика по отдельно взятой точке, т.к. в противном случае при всех преобразованиях парабола остается параболой и качественная картина ее не меняется

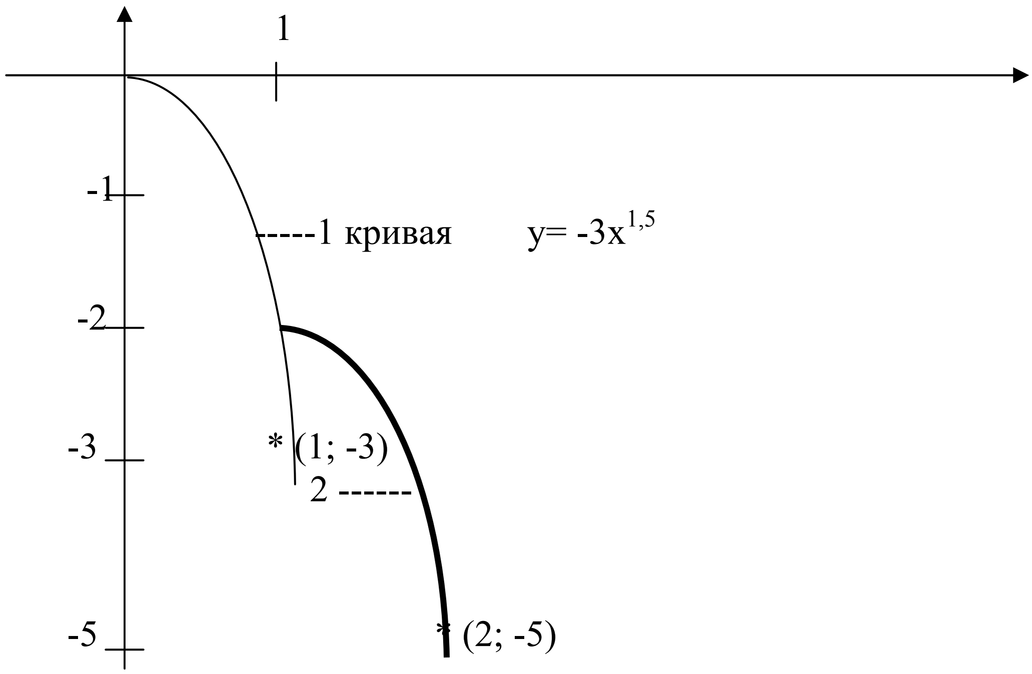


Рис 3.2. Кривые: $y=-3x^{1,5}$ – 1; $y=-2-3\sqrt{(x-1)^3}$ ━ 2 .

1.2.2.Основные элементарные функции и наиболее важные функции

Используя известные сведения и приведенный алгоритм, можно сделать обзор графиков некоторых важных в приложениях функций.

Определение. Назовем **основными элементарными** функциями такие: степенная $y=x^a$ (a- действительное); показательная $y=a^x$ ($a>0$ и $a\neq 1$); логарифмическая $y=\log_a x$ ($a>0$ и $a\neq 1$); круговые тригонометрические y=Sinx, y=Cosx, y=tgx, y=ctgx; обратные тригонометрические y=arcSinx, y=arcCosx, y=arctgx, y=arcctgx. Они и служат базовыми при построении графиков других функций.

Опр. Все функции, которые получены из основных элементарных действиями сложения, вычитания, умножения, деления и наложения функциональной зависимости (суперпозиции), назовем **элементарными**.

Все остальные функции назовем неэлементарными.

Все степенные функции $y=x^a$ при $a>0$ имеют графики, которые условно можно назвать параболами. Схематическое их построение следует начинать с величины показателя a. Графики всех парабол проходят через две точки O(0;0) и A(1;1). При $0 < a < 1$ ветви всех парабол изогнуты выпуклостью вверх , а при $a >1$ изогнуты выпуклостью вправо. После построения ветви параболы в

1-й четверти декартовой системы координат переходят к построению в других четвертях, используя свойство четности, нечетности и расположение области определения. Так, например, график функции $y=\sqrt[7]{x^5}$ проходит через известные точки O и A, представлен выпуклой ветвью в 1-й четверти. Т.к. функция определена при любых x, то можно воспользоваться четностью и отразить центрально ветвь параболы из 1-й четверти в 3-ю (центр симметрии – начало координат точка О).

При отрицательном a графики степенных функций условно назовем гиперболами , т.к. схематически графики похожи на график обратно пропорциональной зависимости у=$\frac{1}{x}$. Остальная схема построения графика изложена выше.

На основе графика функции у=$\frac{1}{x}$ следует научиться строить график дробно-линейной функции у=$\frac{ax+b}{cx+d}$. Для этого сначала выполняют преобразование правой части равенства делением “уголком” и получают сумму целой части и правильной дроби. Затем приводят выражение к виду у=$A\frac{1}{x-m}+B$. Остается выполнить деформацию кривой у=$\frac{1}{x}$ с коэффициентом А и затем реализовать сдвиг вдоль осей координат полученного графика.

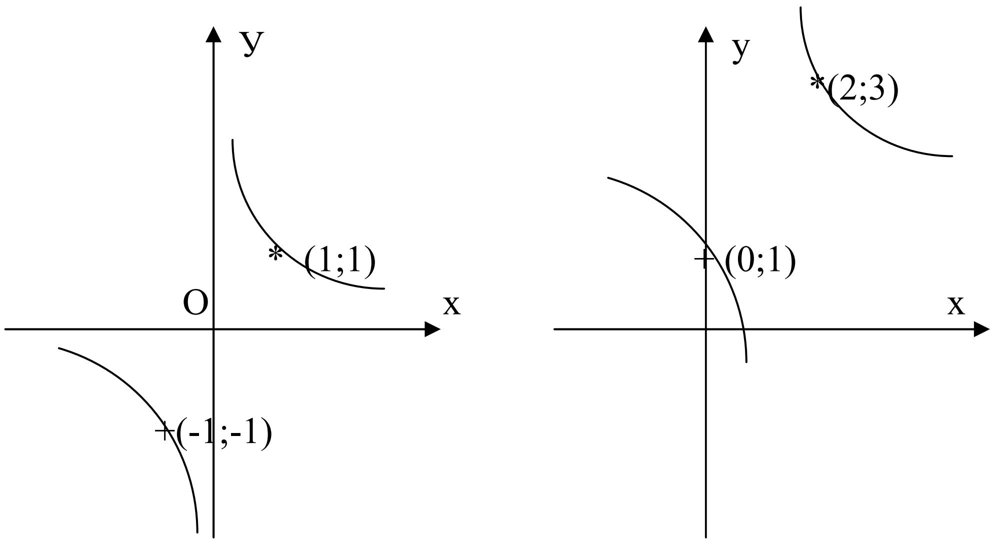


Рис 3.3. Базовая гипербола (слева) и преобразованная (справа)

Приаер 3.3. Пусть нам требуется построить схематически график функции у=$\frac{2x-5}{x-1}$. Выполним деление “уголком” 2x-5 | x-1 Получаем

2x-2 | 2

-3

у=$\frac{-3}{x-1}$+2. Выполним растяжение графика с левого рисунка в 3 раза вдоль Оу

от Ох. Затем полученную кривую сдвинем вправо на 1 и вверх на 2 . Получим правую кривую. При необходимости можно вычислить координаты точек пересечения результативной кривой с осями координат.

Показательную функцию у=a^x (a>0 и $a\neq1$) часто называют ***экспонентой*** и обозначают так у=$\exp_a$x. Отметим, что все экспоненты

проходят через точку (0;1). При $0 < a < 1$ экспоненты убывают, но остаются положительными, а при
$a > 1$ все экспоненты возрастают, оставаясь положительными. Легко видеть, что при очень больших а и при очень малых а (но всегда положительных!) графики экспонент очень “крутые”. При а близких к 1 графики очень “пологие” и прижимаются к горизонтальной прямой $y=1$. Норвежский
математик Непер предположил, что существует такое основание а, при котором касательная к экспоненте в точке (0;1) образует угол 45^o с осью Ох. При дальнейших исследованиях выяснилось , что таким числов будет иррациональное число, значение которого приближенно равно 2,71828…. Это число принято называть числом Непера и обозначать буквой е. Т.о. имеем приближенное равенство
$e= 2,71828…$. Показательная функция с таким основанием записываеттся так $y=e^x$ или $y=\exp x$ (символ онования функции подразумевается по умолчанию).
Графики экспонент приводить не будем в силу их общеизвестности.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ ($a>0$ и $a\neq 1$) определяется (договор!) как обратная к экспоненте и потому подчиняется все свойствам обратной функции : область определения $y=\log_a x$ – положительные x (т.е. область значений экспоненты); график $y=\log_a x$ симметричен графику экспоненты относительно биссектрисы $y=x$ первого и третьего координатных углов. Это значит, что все логарифмики (графики логарифмических функций) проходят через точку (1;0). При $0 < a < 1$ все логарифмы – убывающие функции, а при
$a > 1$ все логарифмы возрастающие функции. И при этом все графики расположены правее оси Оу. Наиболее широко используют логарифмы по основаниям 10 (обозначение $y=\lg x$) и натуральные (неперовы) логарифмы (обозначение $\ln x$). Последняя логарифмика обладает свойством – касательная к этой кривой в точке (1;0) проходит под углом 45^o к оси Ох. Эта функция, наряду с функцией $y=e^x$ (или $y=\exp x$) наиболее применяемы в технических приложениях математики.

Круговые тригонометрические функции $y=\mathrm{Sin}x$, $y=\mathrm{Cos}x$,$y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ известны из школьного курса. Отметим лишь, что они периодические и потому обладают специфическими свойствами (см. 3.2.1). И что они поинтервально монотонны.

На основании круговых тригонометрических функций строятся обратные для них : $y=\mathrm{arcSin}x$, $y=\mathrm{arcCos}x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$. Графики обратных тригонометрических функций строят только для того участка области определения основной функции, на котором основная функция монотонна. Сначала строят монотонную часть основной функции. Затем полученный график отражают в биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов. Ниже приведены рисунки построенных взаимно обратных функций $y=\mathrm{Sin}x$ и $y=\mathrm{arcSin}x$, а также $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{arctg}x$. Аналогично строятся графики функций $Y=\mathrm{arcCos}x$ $y=\mathrm{arcctg}x$.

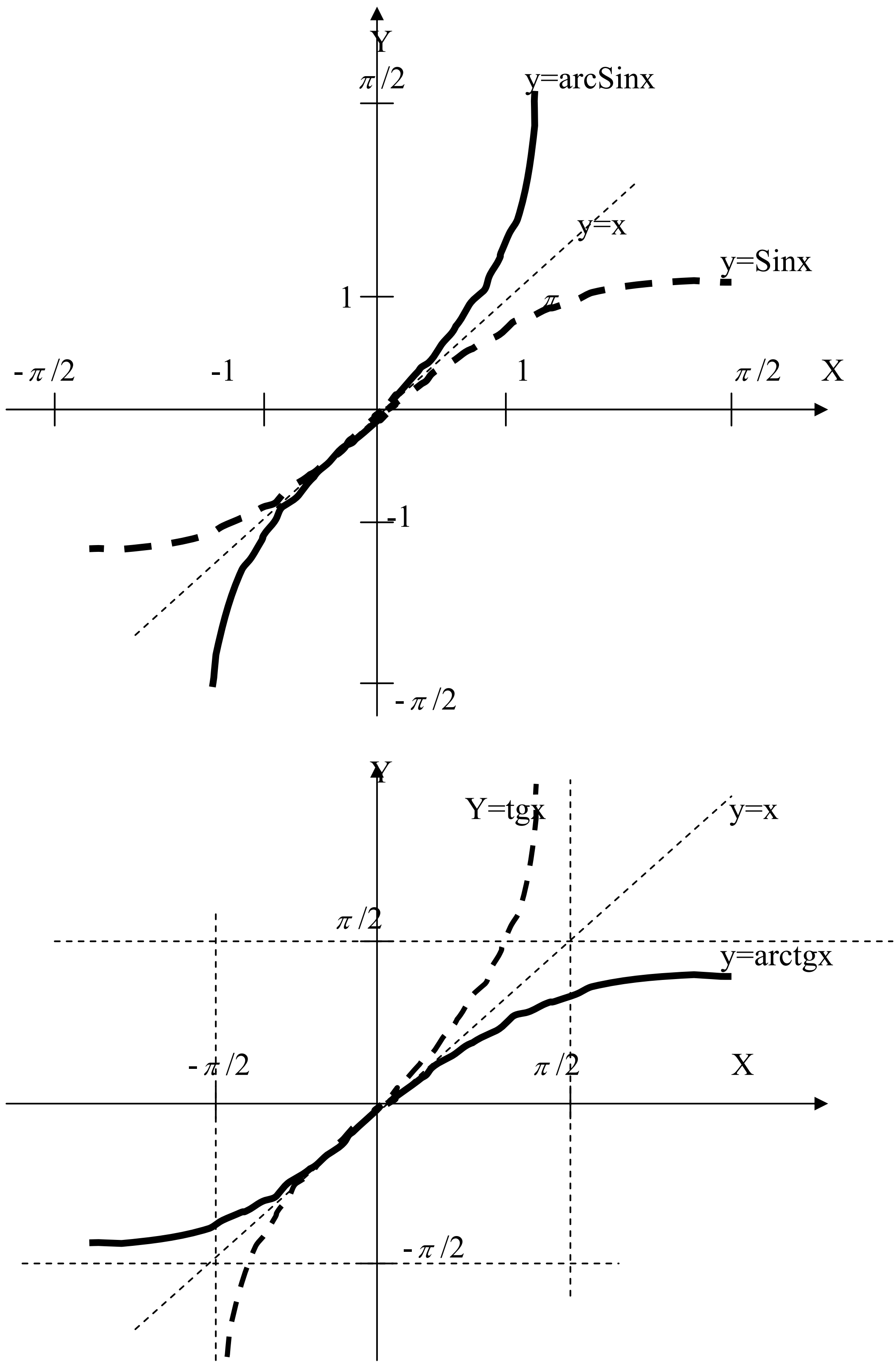


Рис 3.4. Примеры построения обратных функций

В математических приложениях применяются гиперболические функции. Рассмотрим только две из них y=Shx (гиперболический синус) и y=Chx (гиперболический косинус). Эти две функции определяются равенствами y=Shx=$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и y=Chx=$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. В отличие от круговых тригонометрических функций (функций в круге), обладающих свойством $Cos^2x + Sin^2x = 1$, гиперболические обладают свойством $Cos^2x - Sin^2x = 1$. Первое из известных тождеств похоже на уравнение окружности с центром в начале координат и единичным радиусом (поэтому и функции в круге или круговые). А второе похоже на каноническое уравнение гиперболы (а потому и функции гиперболические). Графики этих функций строят схематически, используя принцип «суммирования ординат».

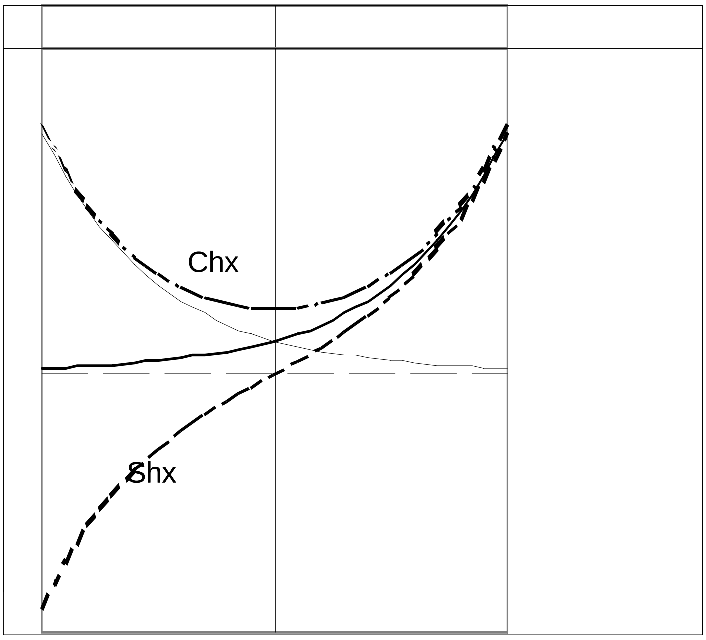


Рис 3.5. Построение Shx и Chx суммированием экспонент $0{,}5e^{-x}$ и $0{,}5e^{x}$

Известно, что линейная комбинация гармоник одинаковой частоты есть гармоника той же частоты. В самом деле

aSinkt+bCoskt=$\sqrt{a^2+b^2}\,(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$Sinkt+$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$Coskt) =

=A(CosфSinkt+Sinф Coskt)=Asin(kt+ф). В самом деле, выражения $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ по модулю не превосходят 1 , а в сумме дают 1. Поэтому они могут быть истолкованы как синус и косинус (в любом порядке; в данном случае они истолкованы так $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$=Sinф $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$=Cosф). Далее применена формула синуса суммы двух углов (а может быть применена формула разности углов). Величина А, полученная в результате преобразования, носит название амплитуды гармоники k - частоты.

Руководствуясь такой схемой можно утверждать качественно, что графиком функции f(x)=$e^{\lambda x}$ Sin(kx+ф) будет график затухающих (при$\lambda < 0$)

или развивающихся (при$\lambda > 0$) колебаний , т.к. $e^{\lambda x}$ может быть истолкована как амплитуда этих колебаний.

1.2.3.Кривые в полярной системе координат

Наряду с декартовой системой координат с перпендикулярными осями и равномерной шкалой используют и другие системы отсчета (локализации, фиксирования, однозначного установления местоположения точек). В частности, в приложениях математики и спец.дисциплинах применяют ***полярную*** систему координат.

Зафиксируем точку O на плоскости и назовем ее полюс. Из этой точки проведем луч и выберем на нем направление и масштаб. Назовем этот луч ***полярой***. Местоположение произвольной точки плоскости зададим указанием расстояния ее от полюса r (иногда пишутρ) и направлением на точку – углом ф, отсчитанным против часовой стрелки от направления поляры до направления на точку. Таким образом, мы определили полярную систему координат на плоскости и установили координаты произвольной точки плоскости в этой системе отсчета (координат).

При этом мы обнаруживаем, что во многих случаях все точки плоскости однозначно определяются при изменении полярных координат в таких пределах $0 \le r < \infty$ и $0 \le ф < 2\pi$. В других случаях используют и отрицательные значения для ф. Тогда его возможные значения берут от π – до π. Иногда необходимо проследить за поведением точки при $0 \le ф < \infty$. Поэтому до введения такой системы следует установить диапазоны изменения ее координат.

Рассмотрим конкретные примеры построения кривых в такой системе коодинат.

Пример 3.4. Построить линии a) r=0,5ф ; b) r= Sin4ф ; c) $r=\dfrac{2}{3 - Cos ф}$.

Решение. а)Первая схема. Строим кривую, расположив полярную систему как обычную декартову. Получаем Рис.3.6.а) первая схема. Истолковы-

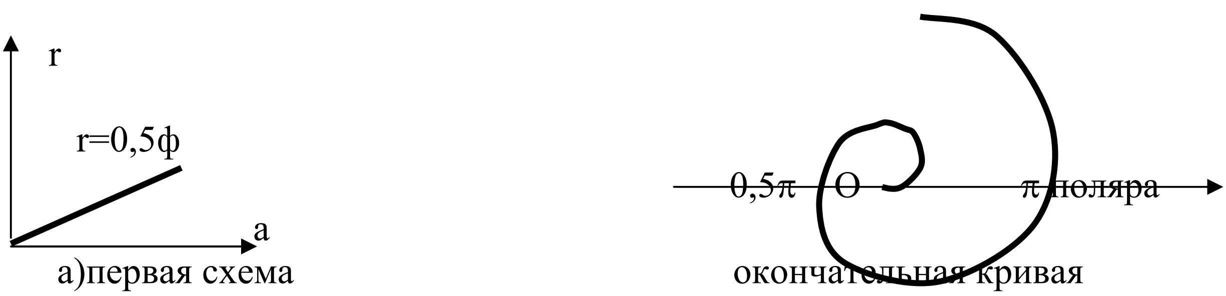
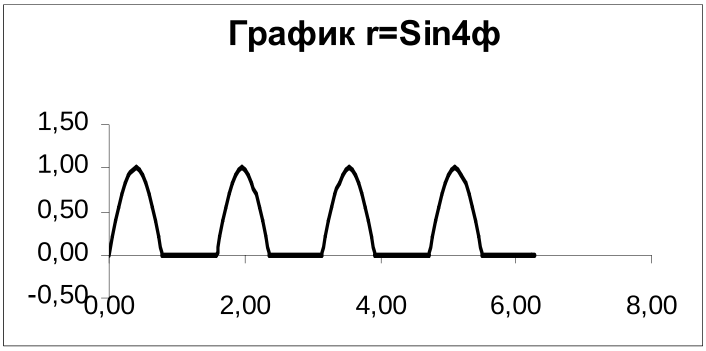


Рис 3.5. Построение линии r=3ф.

ваем зависимость r=0,5ф как всякую линейную в виде прямой с угловым коэффициентом 0,5. Отмечаем особенность вида вспомогательной кривой – у системы нет отрицательных полуосей. Затем строим окончательную кривую, руководствуясь законом (функцией) – чем больше ф тем больше r. Причем и ф и r измеряется в **действительных числах**! Получаем окончательную кривую. При этом мы видим . что пределов $0 \le ф < 2\pi$явно не хватает, для изображения кривой, т.к. точка продолжает удаляться от полюса.

Вторая схема не требует вспомогательного рисунка, т.к. достаточно закона расстояние от полюса то точки в два раза меньше численного значения угла, указывающего направление не точку. И сразу получать окончательную кривую.

При построении графика r= Sin4ф также можно работать по двум схемам. В первом случае строим синусоиду с частотой 4 (т.е. в 4 раза сжатой к оси Оу вдоль оси Ох.). Затем отбрасываем промежутки аргумента x, для



которого r= Sin4ф принимает отрицательные значения . На остальных промежутках следуем изменениям r при изменении ф. И получаем кривую.

Рис 3.6. График кривой, если оси ф и r расположены как декартовы

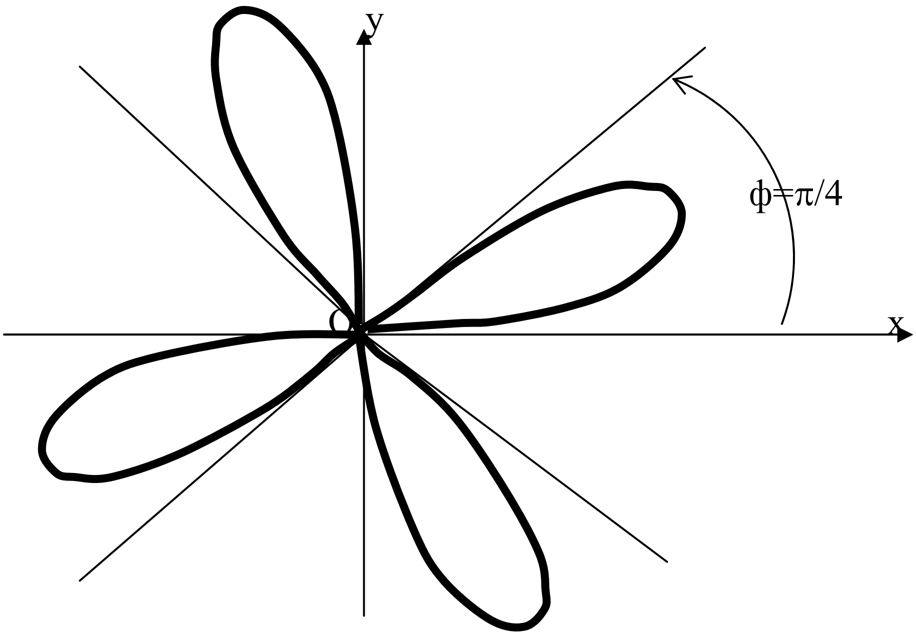


Рис 3.7.Кривая r= Sin4ф в полярной системе, совмещенной с декартовой (Ох – поляра; О - полюс). 4-хлепестковая роза.

1.3.Пределы .

1.3.1.Определение предела числовой последовательности и предела функции в точке. Основные теоремы о пределах.

Определение. Если каждому числу присвоен номер, то эти числа образуют числовую последовательность.

Иначе говоря, числовая последовательность – это функция целочисленного аргумента. Обозначают числовую последовательность $\{x_n\}$ или f(n) , где n натуральное число.

Ч.П. считается заданной, если известен закон соответствия между n и – x_n общим членом последовательности.

Пример 3.5. $x_n = \frac{n-1}{n}$. Тогда последовательность имеет вид $\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots\}$.

В качестве геометрической интерпретации Ч.П. служит набор точек на числовой оси.

Опр. Ч.П. называется ограниченной, если $\exists M > 0$ такое, что для $\forall n$ имеет место неравенство $x_n < M$.

Из этого определения возможен вывод : при своем изменении имеется возможность, что x_n приближается к некоторой константе.

Опр. Число a называют **пределом** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для $\forall\, \varepsilon > 0$ (сколь угодно малое) , для которого всегда найдется такое N, что как только n>N, то будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Такую ситуацию символически принято обозначать (записывать) так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Комментарий. Иногда эту ситуацию записывают так: $x_n \to a$, при $x \to \infty$.

Теорема. Если $\{x_n\}$ имеет предел, то этот предел единственный.

Док. Допустим противное – имеется два числа a и b такие, что при $x \to \infty$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. В этом случае по определению предела по $\forall\, \varepsilon > 0$ можно указать такое N_1, что как только $n>N_1$, то будет верно $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны можно указать такое N_2, что как только $n>N_2$, то будет верно $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $N=\max\{N_1, N_2\}$. Тогда $|a-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \le |x_n-a| + |x_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Но это противоречит начальному предположению о том, что a и b разные числа, т.к. разность двух не равных постоянных не может быть сколь угодно малым числом. Такое противоречие говорит о том, что первоначальное предположение о не равных a и b не соответствует действительности. Т.е. a = b, что и требовалось доказать.

Если числовая последовательность значений аргумента x может иметь своим пределом некоторое число a, то имеет смысл поставить вопрос : а не приближаются ли к некоторому числу значения f(x), когда значения аргумента приближаются к своему пределу a?

Опр. Число A называют пределом функции f(x) при $x \to x_o$ (при $x \to a$), если для $\forall\, \varepsilon > 0$ (сколь угодно малое) можно указать такое $\delta > 0$, такое, что как только будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \delta$, то будет выполнять неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это факт $\lim\limits_{n \to a} f(x)$=А. Иногда говорят – это предел функции в точке а.

Комментарий. Отметим, что при своем стремлении x к а безразличен для нас способ этого стремления (с одной стороны или располагая значения по разные стороны от а).

Геометрически это означает, что как только x попадает в δ-окрестность точки а, так значение f(x) попадает в ε -окрестность числа А . См. иллюстрацию этого случая на Рис 3.7.

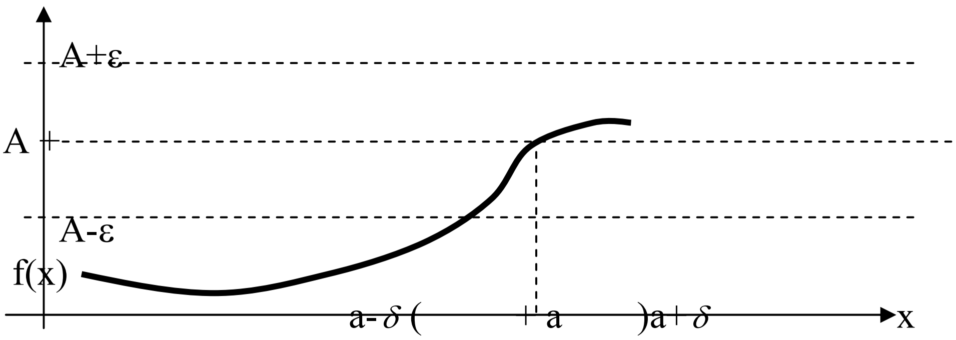


Рис 3.7. К определению предела функции в точке

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists M > 0$, что как только $|x|$>M, то $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят о ***пределе на бесконечности*** и записывают это символически так $\lim\limits_{n \to \infty} f(x)$=А.

Если для $\forall$ M > 0 $\exists\, \delta > 0$ такое, что как только $|x_n - a| < \delta$, то $|f(x)|$>M, то говорят о ***бесконечном пределе*** и записывают это символически $\lim\limits_{n \to a} f(x) = \infty$.

f(x) в этом случае называют ***бесконечно большой величиной*** (ббв) в данных условиях.

Комментарий. В обоих последних случаях говорят «предел существует», хотя фактически числа А не получают, так же как не существует число а.

Знак бесконечности не играет никакой роли для понятия бесконечно большой величины. Это несколько непривычно (в школе говорили «чем левее x на оси Ox, тем меньше значение x». Теперь же получается, что -∞ (это что-то, расположенное далеко слева от нуля) - это бесконечно большая величина!)

Если в определении пределов дополнительно потребовать, чтобы значения аргумента располагались по одну сторону от точки а, то говорят об ***односторонних пределах***. Этот факт (здесь две ситуации) записывают так

$\lim\limits_{\substack{n\to a\\ n>a}} f(x)$ и говорят о правостороннем пределе; или так $\lim\limits_{\substack{n\to a\\ n<a}} f(x)$ и говорят о левостороннем пределе.

Если $\lim\limits_{n\to a} f(x)$=0 (в качестве а может быть и ∞) , то говорят, что f(x) в таких условиях ***бесконечно малая величина*** (бмв) в данных условиях.

(Продумайте полученную ситуацию и сравните ее с предыдущим комментарием, который касается бесконечно большой величины).

Отметим, что одна и та же функция в разных ситуациях может быть бмв или ббв. Например, f(x)=$\frac{x}{x^2-4}$ при $x\to 0$ будет бмв, а при $x\to 2$ будет ббв.

Сформулируем несколько теорем о свойствах бмв, ббв и связи между ними.

Теорема. Сумма двух бмв есть бвм при $x\to x_o$.

Док. Пусть $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, т.е. они - бмв при $x\to x_o$. Тогда при $\forall\ \varepsilon>0$ имеем $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$ как только $|x-x_o|<\delta$. Это означает, что как только $|x-x_o|<\delta$, то $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема. Произведение бмв на ограниченную величину есть бмв.

Док. Пусть $\alpha\to 0$, т.е. - бмв при $x\to x_o$.Пусть $|u(x)|\le M$ т.е. u(x) ограниченная величина. Тогда при $\forall\ \varepsilon>0$ имеем $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$ как только $|x-x_o|<\delta$. Это означает, что как только $|x-x_o|<\delta$, то $|\alpha\, M|\le|\alpha|\,|M|<\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема. Величина, обратная бмв, есть ббв. Это очевидно, т.к. знаменатель дроби $\frac{1}{бмв}$ уменьшается, а числитель постоянен. Дробь растет.

Теорема (о связи предела с бмв). Если f(x) $\to$A при $x\to x_o$, то f(x)=A+α.

Док. Т.к. $\lim\limits_{n\to a} f(x)$=A, то как только $|x-x_o|<\delta$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$. Откуда f(x)-A=α, т.к. знак бмв безразличен. Откуда и следует требуемое.

Теорема(обратная). Если f(x)=A+α при $x\to x_o$ и α -бмв, то $\lim\limits_{n\to a} f(x)$=A.

Док. Пусть f(x)=A+α при $x\to x_o$. Тогда как только $|x-x_o|<\delta$, то $|\alpha|<\varepsilon$, т.е $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Для дальнейшей работы следует уметь сравнивать бмв. Т.е. выяснять какая из бмв “быстрее убывает”. Несколько определений для сравнения бмв.

Если предел отношения двух бмв при некоторых условиях равен конечному числу, то говорят, что эти бмв имеют ***одинаковую степень малости***.

В частности, если указанный предел равен 1, то эти бмв ***эквивалентны***. Это означает, что при в условиях, при которых бмв сравнивали, одну из них можно заменить более удобной другой. Так, например, известно, что при малых х величину Sinx можно заменить в вычислениях величиной х. См. об этом ниже – 1-й замечательный предел.

Если предел отношения двух бмв при некоторых условиях равен 0, то говорят, что в числителе записана бмв ***более высокую степень малости***.(соответственно, в знаменателе более низкую степень малости).

Сформулируем ***признаки существования предела*** – несколько теорем.

Теорема. Всякая монотонная и ограниченная в направлении своего изменения переменная величина имеет предел. /Фролов и Шостак, стр 178/ Доказательство основано на теорем Дедекинда.

Теорема. Если переменные U , V имеют равные пределы $\lim U$ $=\lim U$ = а и если в тех же условиях у величина ограниченная $U \le y \le V$, то $\lim y$=а.

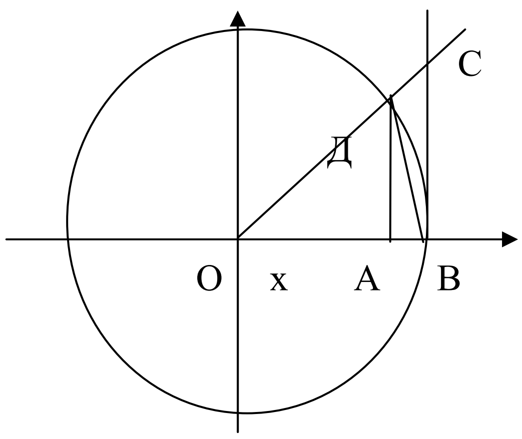
Сформулируем основные теоремы о пределах, позволяющие находить пределы в обход проверки выполнения определения предела.

Предел: суммы ; произведения константы на переменную ; произведения переменных ; частного переменных равен соответственно сумме пределов операндов; произведению константы на предел переменной; произведению пределов сомножителей; отношению пределов числителя и знаменателя при условии, что существуют конечные пределы переменных, участвующих в указанных операциях (пределы операндов). Без доказательства

<u>1.3.2.Замечательные пределы.</u>

Теорема. Первый замечательный предел имеет вид $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = 1$.

Доказательство. Сначала отметим, что знак выражения $\frac{Sinx}{x}$ не меняется при изменении знака переменной х, ввиду нечетности функций Sinx и х и четности функции, равной их отношению. Отсюда следует, что достаточно рассмотреть только ситуацию, когда х $\to$ 0, оставаясь положительным.



Теперь рассмотрим единичную окружность и центральный угол х=$\angle$ДОА. ВС – касательная к окружности, равная tgx; ДВ - хорда и ДА – высота треугольника ОДВ, равная Sinx.

Теперь сравним площади фигур: Δ ОДВ, сектора ОДВ и Δ ВСД. Т.к. радиус окружности равен 1, то $S_{\Delta\ ОДВ}$=0,5Sinx ; $S_{сектора}$=0,5x и $S_{\Delta\ OBC}$=0,5tgx. Получаем естественное неравенство 0,5Sinx < 0,5x < 0,5tgx или Sinx < x < tgx. Т.к. мы взяли x>0, то имеем право разделить это неравенство на Sinx и сохранить смысл неравенства. Получаем $1 < \frac{x}{Sinx} < \frac{1}{Cosx}$. Теперь запишем неравенство для обратных величин, записанных в данном неравенстве $1 > \frac{Sinx}{x} > Cosx$. Если теперь использовать признак 2 существования предела (теорему), то можно сделать вывод, что переменная $\frac{Sinx}{x}$ имеет своим пределом 1, т.к. при своем изменении она оказывается ограниченной с двух сторон единицей. Что и требовалось доказать.

Комментарий. Так как под переменной x обычно понимают «что угодно», то из первого замечательного предела следует его применение в более общих ситуациях. Главное, чтобы та величина, которая стермится к нулю, была записана под знаком синуса и в знаменателе отношения. Так, например,

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sin7x}{7x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 3} \frac{Sin(x-3)}{x-3} = 1$ и

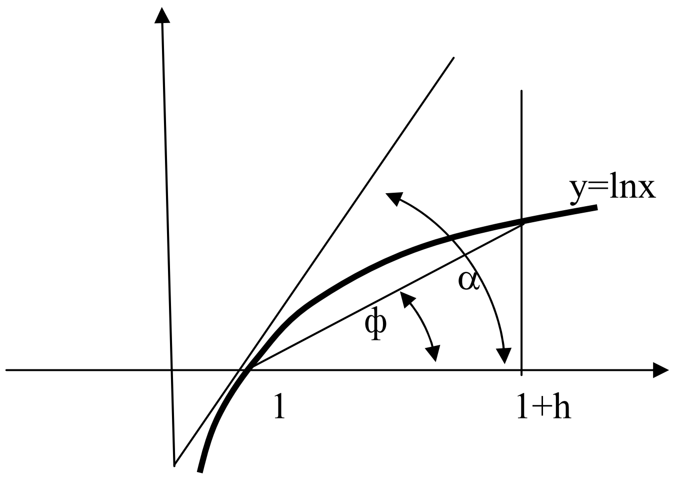
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$. Присмотритесь к изменению аргумента x и изменению величины, записанной под знаком синуса и в знаменателе.

Второй замечательный предел. Теорема. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Комментарий. e – число Непера, упоминавшееся в обзоре основных элементарных функций.

Этот предел может иметь вид $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Доказательство. Рассмотрим график функции y=lnx. Нам известно, что отличительной его особенностью является наклон касательной к графику в точке (1;0), равный 45^o . Рассмотрим Рис 3.8.



На Рис3.8. tgα – угловой коэф-
фициент касательной к лога-
рифмике. tgα =1 по выше сделанному замечанию.
С другой стороны, tgα – это предельное значение для tgф – углового значения секу щей,
проведенной через точки (1;0) и (1+h; ln(1+h)). Поэтому

Рис 3.8. К доказательству 2-го замечательного предела.

tgф=$\frac{\ln(1+h)}{h}$. Откуда следует что величина $\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ при $h \to 0$. Или $\frac{1}{h}\ln(1+h) \to 1$, или $\ln(1+h)^{\frac{1}{h}} \to 1$, или $(1+h)^{\frac{1}{h}} \to$ е . И все это при $h \to 0$. Замените буку h на букву x и получите требуемое .

Комментарий. Все, отмеченное в комментарии для 1-го замечательного предела, остается в силе и в данном случае. Например, $\lim\limits_{x\to 0} (1+Sinx)^{\frac{1}{Sinx}} = e$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{5}{x^2})^{\frac{5}{x^2}} = e$ и т.д.

<u>1.3.3.Алгоритм вычисления пределов.</u>

Обозначим символически все возможные случаи, которые встечаются при вычислении пределов так $\frac{A}{B}$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 0∞; 1^{∞} ; 0^{o} ; ∞^{o} . Все символы кроме первого обозначают в математике так называемую неопределенность. Это значит, что предельное значение установить затруднительно. Для развязки возникшей неприятности применяют специальные приемы, о которых речь ниже.

1-й шаг алгоритма всегда один и тот же. «Подставим» предельное значение аргумента под знак предела и определим ***тип предела***.

2-й шаг. Зависит от полученного типа предела. И потому здесь несколько разных действий.

2.1.Если тип предела $\frac{A}{B}$ и $B\neq 0$, $A\neq\infty$, $B\neq\infty$, то тип предела и даст сам предел.

2.2. Если тип предела $\frac{A}{B}$ и B=0 , то рассматривают дробь, у которой знаменатель уменьшается, а числитель ограничен и потому дробь растет неограниченно. Мы получаем бесконечный предел (см. частные случаи пределов).

2.3.Если A=0 и B=0, то имеем предел типа $\frac{0}{0}$ - неопределенность. Здесь могут быть разные случаи.

2.3.1.Если под знаком предела есть синусы, косинусы, тангенсы или обратные им функции, то следует преобразовать выражение под знаком предела так, чтобы можно было применить 1-й замечательный предел. Он тоже имеет такой тип.

2.3.2.Если под знаком предела записано отношение полиномов, то их следует разложить на множители, используя значение корней. Затем ***до перехода к пределу*** сократить на множитель, вносящий неопределенность. И далее вернуться к п.1. алгоритма.

2.3.3.Если под знаком предела имеется иррациональность, то перенести ее из числителя в знаменатель (и-или наоборот). Затем обработать полученное по п.2.3.2. и вернуться к п.1.

2.4.Если тип предела $\frac{\infty}{\infty}$, то преобразуют дробь, используя связь бмв и ббв(см. частные случаи пределов), и переходят к п.2.3 .

2.5.Если тип предела 0∞, то преобразуют произведение в дробь, используя связь бмв и ббв, и переходят к пунктам 2.3 или 2.4. соответственно.

2.6.Если тип предела $\infty - \infty$, то поступают в зависимости от выражений, дающих ббв.

2.6.1.Если эти выражения – рациональные дроби, то иногда достаточно привести их к общему знаменателю и перейти к п.2.3.

2.6.2. Если эти выражения – разность иррациональностей, то следует перенести ее из числителя в знаменатель и вернуться после упрощения к п.1.

2.7. Пределы типа 1^{∞} обрабатывают в направлении применения 2-го замечательного предела (сначала выписывают нужную в работе 1; затем оставшиеся слагаемые в основании преобразуют; затем в показателе записывают величину, обратную преобразованному выражению и старый показатель; затем новый показатель умножают на величину так , чтобы сохранилось общее равенство; затем применяют замечательный предел и обрабатывают оставшийся показатель). См. примеры.

2.8. Пределы типа 0^{o} ; ∞^{o} обрабатывают по одной схеме на основании основного логарифмического тождества . Пусть мы имеем предел вида $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\phi(x)}$. Тогда выражение под знаком предела следует записать так $f(x)^{\phi(x)} = e^{\phi(x)\ln f(x)}$ и затем вычислять предел показателя полученного выражения. Во всех случаях там получаются пределы, рассмотренные ранее.

Пример 3.5. Вычислить пределы.

3.5.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$. Решение. Это тип предела $\infty - \infty$; он содержит иррациональности и потому переносим иррациональность в знаменатель, умножив числитель и знаменатель но сопряженное числителю $\sqrt{x^2+1}+x$.

Получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Получен предел типа $\frac{A}{B}$, в которой знаменатель растет, а числитель неизменен. По п.2.2. ответом будет 0.

3.5.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$. Решение. Имеем тип предела 1^{∞} .Обрабатываем его в направлении 2-го замечательного. Получаем последовательно

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{3x}$ = (сохранена 1 и сделано приведение к общему знаменателю. Предстоит упростить)

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}3x\frac{3}{2x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{9x}{2x-3}}=$ (т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}$ =e)

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x}{2x-3}}=e^{4,5}$ (т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x}{2x-3}=\frac{9}{2}$ по схеме 2.3.2)

Примеры эквивалентных бмв.

При достаточно малых x (т.е. x близких к 0) эквивалентными будут:
Sinx и x ; tgx и x; arcSinx и x; arctgx и x; e^x и 1+x; ln(1+x) и x; $\sqrt{1+x}$ и 0,5x; $\sqrt[n]{1+x}$ и $1+\frac{1}{n}$x. Эти сведения удобны в приближенных вычислениях и вычислении пределов.

1.4.Непрерывность функции в точке и на промежутке.

Опр. Разность y_2-y_1=Δy называют приращением переменной y. Если y=f(x), то Δy= f(x+Δx)- f(x).

Опр. f(x) называют непрерывной в точке x_o, если беконечно малому приращению аргумента соответствует беконечно малое приращение функции.
Симолически это записывают так $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$.

Это определение эквивалентно определению : f(x) называют непрерывной в точке x_o, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке. Симолически это записывают так $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$=f($x_o$). Часто используют и такую символику $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$=f($\lim\limits_{x\to x_o}x$).

Из этих определений вытекает, что в точке непрерывности значение функции не ***бесконечно***.

Теорема. Все элементарные функции непрерывны в каждой точке их области определения.

Доказательство проведем на примере одной функции, чтобы показать механизм такой проверки.

Пусть дана функция y=6x^2 . Область ее определения – все действительные числа. Возьмем фиксированное x. Вычислим значение функции в этой точке . Имеем f(x)=6x^2. Теперь дадим x приращение Δx и вычислим значение функции в новой точке. Имеем $f(x+\Delta x)=6(x+\Delta x)^2=6(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)$. Теперь найдем приращение функции при переходе от одной точки ко второй. Получаем $f(x+\Delta x)-f(x)=6(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)-6x^2=12x\Delta x+\Delta x^2$. При $\Delta x\to 0$ получаем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. А т.к. точку мы брали произвольно из области определения, то все доказанное справедливо в любой точке области определения. Что и требовалось.

Отметим простейшие свойства функций, непрерывных в точке.

Сумма, разность, произведение и частное конечного числа непрерывных в данной точке функций есть функция непрерывная в этой точке. За исключением случая, когда знаменатель дроби обращается в нуль в этой точке.

Сложная функция (суперпозиция) непрерывна в точке, если непрерывные ее составляющие.

Если $y=f(x)$ непрерывна и монотонна в данной точке, то непрерывна и обратная к ней функция.

Отметим некоторые приемы исследования функций на непрерывность в подозрительной на разрыв точке. Подозрительными на разрыв точками будут точки, где происходит стыковка двух аналитических соотношений, определяющих данную функцию. В этих точках следует проверить выполнение равенства $f(x_o+0)=f(x_o-0)=f(x_o)$ где – x_o подозрительная точка, а $f(x_o+0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_o\\ x>x_o}} f(x)$ - правосторонний предел функции в точке; аналогично $f(x_o-0)$ – левосторонний предел. Если равенство нарушается в каком-либо месте, то говорят о разрыве функции в данной точке. При этом разрывы классифицируют: если равенство просто нарушено, но односторонние пределы конечные и функция имеет значение в точке, то разрыв относят к ***1-му роду***. В противном случае точка считается точкой ***разрыва 2-го рода***.

В заключение сформулируем свойства функций, непрерывных на отрезке.

Опр. Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка, то говорят, что она непрерывна на отрезке.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем. (Т.е. ее значения не бесконечны).

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений. (Т.е. из всех ее значений можно указать наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю границы)

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке и принимает на нем значения А и В, то хотя бы в одной точке этого отрезка она принимает любое значение между А и В.

Следствие. Если на концах отрезка функция имеет разные знаки, то внутри отрезка существует хотя бы одно точка, где функция обращается в нуль.

Эту точку называют **корнем** (нулем) функции. И это свойство используют для изоляции корней конечным отрезком во время приближенного решения уравнений.

2.Дифференциальное исчисление функции одного переменного.

Рассмотрены основные понятия дифференциального исчисления функций одного и нескольких переменных и применение аппарата дифференциального исчисления к решению прикладных задач.

2.1.Определение и осн. свойства производной.

Основным понятием раздела является понятие производной.

Опр. Предел отношения приращения функции в данной точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, называют **производной функции** в данной точке.

Если функция задана y=f(x) (т.е. явно), то символически это записывают так $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$=y'. Используют и другие обозначения : f'(x) ; y'(x) $f'_x(x)$; $y'_x(x)$ и др., о которых будет сказано далее.

Из определения вытекает алгоритм вычисления производной.

1-й шаг. Возьми точку x и вычисли значение функции f(x) в этой точке.

2-й шаг. Возьми приращение аргумента Δx, получи новую точку x+Δx и вычисли значение функции f(x+Δx) в новой точке.

3-й шаг. Вычисли приращение функции Δy= f(x+Δx)- f(x), полученное функцией при переходе от точки x к точке x+Δx.

4-й шаг. Найди отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5-й шаг. Вычисли, если возможно, предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если этот предел существует, то его значение и есть искомая производная y' в заданной точке x.

К понятию производной пришли при решении типовых задач физики и геометрии.

Задача о касательной к кривой. Пусть дана кривая y=f(x). Требуется вычислить угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой в заданной точке.

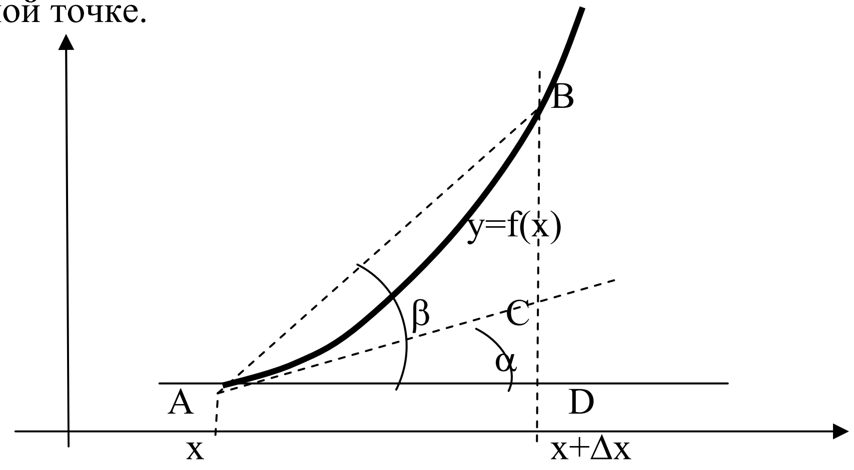


Рис 4.1. Геометрическая интерпретация производной

Решение. Возьмем две точки на кривой y=f(x): A(x, f(x)) и B(x+Δx,f(x+Δx)). Проведем через эти точки секущую AB. Легко найти угловой коэффициент прямой AB как отношение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ =tgβ . Если теперь устремить Δx к нулю, то секущая будет поворачиваться и в пределе займет положение касательной AC, угловой коэффициент которой равен tgα= lim tgβ=$\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.Все пределы вычислены при условии $\Delta x\to 0$. Отсюда следует, что производную функции y=f(x) в данной точке можно истолковать ***геометрически*** как угловой коэффициент касательной, проведенной в данной точке к этой кривой.

Задача о скорости. Пусть известен (задан) закон движения s=S(t) (зависимость изменения пути от времени). Найти скорость движения в данный момент времени.

Решение. К моменту времени t пройден путь S(t). Тогда к моменту времени t+Δt будет пройден путь S(t+Δt). Это значит, что за время Δt пройден путь , равный S(t+Δt)- S(t). Средняя скорость движения за промежуток времени Δt можно вычислить по отношению $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$. Чем меньше промежуток времени , выбранный для измерения средней скорости, тем точнее средняя скорость характеризует процесс движения. Естественно, что при $\Delta t\to 0$ $\lim\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ даст значение скорости движения в ***момент времени t*** – это значение принято называть мгновенной скоростью (или просто скоростью движения в данный момент времени). Поэтому производную S'(t) можно истолковать как скорость движения v(t).

Теорема. Если y=f(x) имеет производную в точке x, то функция непрерывна в данной точке.

Док. Воспользуемся связью предела и бмв : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$=y'+α($\Delta x$) . Из этого соотношения следует непрерывность, т.к. Δy= y' Δx+α(Δx)$\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Комментарий. Обратное не всегда верно, т.к. предел можно вычислять как односторонний и получать одинаковые ответы. А в самой точке функция может не иметь значения и , значит быть разрывной.

Чтобы всякий раз не применять алгоритм вычисления производной выведем основные правила вычисления производной и составим таблицу производных основных элементарных функций

2.2.Таблица и основные правила.

Применяя алгоритм, легко получить такие правила поиска производных:

(c)'=0 ; x'=1; (u(x) $\pm$v(x))'=(u(x))' $\pm$(v(x))'.

Сложнее получить формулу (u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v(x). Получим ее, несколько сократив запись алгоритма. Получаем f(x)= u(x)v(x). Тогда f(x+Δx)= u(x+Δx)v(x+Δx). Но лучше это записать так f(x+Δx)= (u(x)+Δu)(v(x)+Δv), потому что при изменении переменной x изменяются и переменные u и v. Далее получаем f(x+Δx)- f(x)== (u(x)+Δu)(v(x)+Δv)--u(x)v(x)= v(x) Δu+u(x) Δv. Разделим полученное на Δx и вычислим предел отношения. Получим рабочую формулу.

По аналогичной схеме можно получить производную частного $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$. Для доказательства достаточно записать f(x+Δx)=$\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}\right)$ в виде f(x+Δx)=$\left(\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}\right)$ и далее продолжить алгоритм вычисления производной $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}\right) =$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x)v(x)+v(x)\Delta u - u(x)v(x) - u(x)\Delta v}{(v(x)+\Delta v)v(x)\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{v(x)\Delta u}{\Delta x} - \frac{u(x)\Delta v}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v)v(x)}\right) =$$

$$\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

Если y=f(x) и x=ф(y) взаимно обратные функции, то их производные связаны соотношением $y'_x = \frac{1}{x^э_y}$. Доказательство следует из $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}$

Если y=f(x) и x=ф(t) (т.е. y=f(ф(t)) – сложная функция), то $y'_t = y'_x x'_t$, где $y'_x = f'_x(x)$, а $x'_t = ф'_t(t)$.

Доказательство следует из цепочки преобразований $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и затем вычислить предел полученного при $\Delta t \to 0$, что приведет к тому что $\Delta x \to 0$.

Бывают ситуации, когда функция y=f(x) задана параметрически, т.е. в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Тогда используют тот факт, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ всегда можно преобразовать по схеме $\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}$. А при вычислении производной получить в ответе запись $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Используя эти правила, получаем сначала таблицу производных основных элементарных функций.

Функция	Ее производная	Вывод формулы и комментарии

y=a^x , $a\neq 1$,a>0; y'= a^x lna; Имеем y+Δy= $a^{x+\Delta x}$, Δy=$a^{x+\Delta x}$-a^x = a^x ($a^{\Delta x}$-1)

Теперь $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=\left|\begin{matrix} a^{\Delta x}-1=z \\ \Delta x=\dfrac{\ln(z+1)}{\ln a}\end{matrix}\right|=$

= a^x $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{z\ln a}{\ln(z+1)}$= a^x lna.

y=e^x , y'= e^x ; Как частный случай для предыдущей формулы.

y=lnx y'=$\dfrac{1}{x}$; Т.к. x=e^y , то на основании связи производных взаимно обратных функций имеем

(lnx)'$_x$=$\dfrac{1}{\left(e^y\right)'_y}$ ==$\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$.

y=x^α , y'=$\alpha x^{\alpha-1}$, Имеем y=x^α = $e^{\alpha\ln x}$. Далее используем предыдущую формулу и производную от сложной

функции y'= $e^{\alpha\ln x}\ \alpha\dfrac{1}{x}$= $\alpha x^{\alpha-1}$.

y=Sinx y'=Cosx Имеем Δy=Sin(x+Δx)-Sinx=2Cos$\dfrac{2x+\Delta x}{2}$ Sin$\dfrac{\Delta x}{2}$;

теперь y'= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2Cos0{,}5(2x+\Delta x)Sin(0{,}5\Delta x)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{Sin(0{,}5\Delta x)}{0{,}5\Delta x}Cos0{,}5(2x+\Delta x)$=Cosx.

y=Cosx y'=-Sinx В самом деле (Cosx)'=(sin($\dfrac{\pi}{2}$-x))'=

Cos($\dfrac{\pi}{2}$-x)(-x)'=-Sinx. Применена формула Приведения и производная сложной функции.

y=tgx y'=$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ Достаточно записать производную от дроби

(tgx)'=$\left(\dfrac{Sinx}{Cosx}\right)'$ далее преобразовать рез-т.

y=arcSinx y'=$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ В самом деле, по условию x=Siny. Для взаимно обратных функций имеем

(arcSinx)'=

$=\dfrac{1}{(Siny)'}=\dfrac{1}{Cosy}=\dfrac{1}{\sqrt{1+Sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

y=arctgx $\qquad$ y’=$\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ Схему получения смотри выше.

y=arcCosx $\qquad$ y’=-$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ Ввиду того, что arcCosx=$\frac{\pi}{2}$-arcSinx.

y=arcctgx $\qquad$ y’=-$\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ Схему получения смотри выше.

В тех случаях, когда применить вышеприведенные правила и таблицу затруднительно, можно использовать прием, называемый ***логарифмическим дифференцированием*** . Пусть мы имеем y=$f(x)^{\phi(x)}$. Тогда невозможно применить ни одну их записанных выше формул. Поступают так. Сначала логарифмируем обе части равенства и получаем lny=ф(x)ln(f(x)). Теперь возьмем производную от каждой части равенства, зная, что y – это функция от x. Получаем $\frac{1}{y}$y’=ф’(x)lnf(x)+ф(x) $\frac{1}{f(x)}$f’(x). Из полученного равенства найдем требуемое

y’=y(ф’(x)ln(f(x))+ф(x) $\frac{1}{f(x)}$f’(x))=$f(x)^{\phi(x)}$(ф’(x)ln(f(x))+ф(x) $\frac{1}{f(x)}$f’(x)).

Возможен и другой подход. Имеем y=$f(x)^{\phi(x)}=e^{\phi(x)\ln(f(x))}$. После чего можно искать производную по правилу сложной функции. Получаем

y’=$e^{\phi(x)\ln(f(x))}$(ф’(x)lnf(x)+ф(x) $\frac{1}{f(x)}$f’(x))= $f(x)^{\phi(x)}$ (ф’(x)ln(f(x))+ф(x) $\frac{1}{f(x)}$f’(x)).

Если же функция y=f(x) задана неявно, т.е. уравнением F(x;y)=0, то для поиска производной следует взять производную от равенства F(x;y)=0, зная, что y= f(x), хотя f(x) и неизвестна. Затем из полученного равенства находят y’.

2.3.Производная и дифференциал.

Из связи предела и бмв для производной получаем Δy=f’(x)$\Delta x+\alpha\Delta x$, где α - бмв. Т.к. слагаемые в сумме , записанной справа неравноценны по величине (произведение $\alpha\Delta x$ имеет порядок малости более высокий, чем Δx, а первое слагаемое имеет порядок малости, такой же как и Δx), то одно из них выделим в виде определения.

Опр. Главная, линейная относительно Δx часть приращения функции называется **дифференциалом** функции и обозначается dy.

Получаем dy= f’(x)Δx. Иногда используют обозначение df(x)= f’(x)Δx.
Т.к. Δx=dx, то обозначение дифференциала принимает симметричный вид
dy= f’(x)dx или df(x)= f’(x)dx или dy=y’dx.

Используя новое понятие, можно сказать что производная есть отношение дифференциалов функции и аргумента. Этот факт дает новые формы записи для символа производной : y’=f’(x)=y’(x)=$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}f$.

Можно достаточно просто истолковать дифференциал – это приращение касательной к кривой в данной точке. (см. Рис 4.1. DB – это приращение Δy функции y=f(x); DC – приращение dy касательной плоскости .	Простейшие свойства дифференциала вытекают из соответствующих свойств производной (аддитивности, однородности и линейности)

С помощью дифференциала можно получить известную формулу для вычисления производной параметрически заданной функции. Имеем $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Тогда отношение y'=$\frac{dy}{dx}$ принимает вид y'=$\frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt}$ и затем получить y'=$\frac{y_t'}{x_t'}$.

Используем дифференциал для приближенных вычислений ввиду того, что Δy, которое мы не знаем во многих случаях, можно приближенно заменить на величину dy, которое всегда можно вычислить. Это положено в основу приближенной формулы f(x+Δx)=f(x)+ Δy=f(x)+f'(x) Δx. Пусть нам требуется вычислить значение функции y= f(x) , но точно сделать это затруднительно. Тогда можно предложить алгоритм применения дифференциала:

-выбери точку x_o достаточно близко к точке x и вычисли значение f(x_o);

-вычисли значение f'(x_o) и значение Δx=x- x_o ;

-вычисли приближенно f(x) , заменив Δy на f'(x_o) Δx.

Пример 4.1. Вычислите приближенно ln1,2. Решение. Выбираем подходящую по записи функцию f(x)=lnx. Нам предстоит вычислить ее значение при x=1,2. Сделать это мы не можем. Выберем x_o=1. Найдем

dy= f'(x_o) Δx при Δx=1,2-1=0,2. Получаем (lnx)'=$\frac{1}{x}$=1 при x_o=1. Теперь вычислим приближенное значение ln1,2=ln1+1*0,2=0,2. О погрешности результата в данный момент речи не идет – нужно хотя бы приближенное значение.

Дифференциал обладает свойством инвариантности (неизменность формы записи в зависимости от вида задания функции).

Пусть y= f(x) и x=ф(t). Тогда dy=f'_tdt. Но dx=$ф'_t$dt. С другой стороны мы знаем, что f'_t=$f'_x$$ф'_t$. Поэтому dy=f'_tdt= $f'_x$$ф'_t$dt=$f'_x$ dx – т.е. форма записи сохранилась.

2.4.Производная и дифференциал высшего порядка.

Т.к. y' сама является функцией, то естественно поставить вопрос о наличии ее производной, т.е. (y')'. Все это можно обобщить определением: производная от производной порядка n-1 называется производной порядка n.

Соответственно записывают символ такой производной $y^{(n)}$=$(y^{(n-1)})$'. Если использовать для обозначения символ дифференциала, то получим иные обозначения производной порядка n. $y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ и т.д. В самом деле по определению имеем $y''=(y')'=(f'(x)dx)'=(f''(x)dx)dx=f''(x)d^2x$. Откуда и получаем в виде обобщения записанное ранее.

Из этого определения вытекают и все свойства такой производной.

Рассмотрим несколько частных случаев производной порядка n.

Пусть $y=uv$. Тогда $y'=u'v+v'u$. Затем $y''=u''v+2u'v'+v''u$. Обобщаем и получаем

$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+n\,u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}$. коэффициенты такой формулы можно сразу выписать, если использовать треугольник Паскаля.

Пусть функция задана параметрически $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$. Тогда известно, что $y'=\frac{y_t'}{x_t'}$. Если теперь попытаться найти y'', то сделать это будет проблематично, т.к. получено выражение, зависящее от t ,но не от x. Обойдем это затруднение так – имеем

$$y''=(y')'=\frac{d}{dx}y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)=\frac{d\frac{y_t'}{x_t'}}{dx}=\frac{\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)'dt}{dx}=\frac{\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)'dt}{x'dt}=\frac{y''_t\,x'_t-x''_t\,y'_t}{(x_t')^3}.$$

Можно поступить иначе

$$y''=(y')'=\frac{d}{dx}y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)=\frac{d}{dx}(F(t))=\frac{dF(t)}{dx}=\frac{F'_t(t)}{x'_t}.$$

2.5.Теоремы о среднем.

В этот раздел включен ряд теорем, имеющих важное теоретическое значение и являющихся базовыми при построении многих вычислительных схем.

Теорема **Ролля**. Если f(x) непрерывна на [a;b], дифференцируема внутри его (т.е. на (a;b)), а также имеет место равенство f(a)=f(b), то $\exists c\in(a;b)$ такая, что f'(c)=0.

Комментарий. Геометрически это означает, что внутри отрезка есть по крайней мере одно точка, в которой касательная к кривой параллельна Ox.

Док. Т.к. f(x) - непрерывна, то существуют на этом отрезке наибольшее M и наименьшее m значения этой функции.

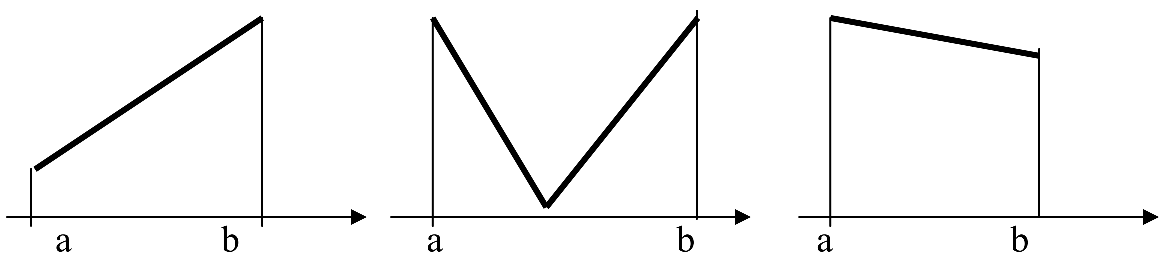
1.Пусть M= m. Это означает, что f(x)=const и потому f'(x)=0 (в любой точке).

2.Пусть M>m. Тогда из условия f(a)=f(b) следует, что либо M, либо m находятся внутри отрезка [a;b]. Пусть это будет M. Тогда возьмем в качестве с точку, в которой f(c)=M. В таком случае $\forall\, \Delta x$ такое, что $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$. В таких условиях имеем

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x}=\begin{cases}\geq 0, & \Delta x<0,\\ \leq 0, & \Delta x>0,\end{cases}$$ но, т.к. для любого x производная существует, то существуют и $\lim\limits_{\substack{\Delta X\to 0\\ \Delta X<0}}\frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta X\to 0\\ \Delta X>0}}\frac{\Delta f}{\Delta x}\leq 0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0$, что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения справедливы, если рассматривать наименьшее значение m.

Комментарий. Из условия теоремы нельзя выбрасывать ни одного из условий. Так при нарушении условия f(a)=f(b) можем получить Рис 4.2a.



a) b)

Рис 4.2. К теореме Ролля.

При нарушении условия дифференцируемости получаем Рис 4.2.b. А если f(x) разрывна на отрезке, то можно получить ситуацию Рис 4.2.c. И во всех случаях ни о какой горизонтальной касательной речь не может идти.

Следствие. 1.Если f(a)=f(b)=0 и f(x) непрерывна и дифференцируема, то то $\exists c\in(a;b)$ такая, что f'(c)=0. Это означает, что между двумя корнями (нулями) функции всегда расположен корень ее производной.

2.Если на [a;b] f(x) имеет n-1 производную и n раз обращается в нуль, то на этом отрезке $\exists c\in(a;b)$ такая, что $f^{(n)}(c)=0$.

Теорема **Лагранжа** (формула конечных приращений). Если f(x) непрерывна на [a;b], дифференцируема внутри его (т.е. на (a;b), то $\exists c\in(a;b)$ такая, что справедливо соотношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$=f'(c).

Комментарии. Геометрически вывод(результат) этой теоремы говорит о том, что для непрерывной на отрезке функции всегда найдется внутри отрезка тоска (хотя бы одна), касательная к графику кривой в которой параллельна секущей, соединяющей две любые точки графика кривой.

Формула является базовой (краеугольный камень) всей вычислительной математики.

Встречается иная форма записи этого равенства $f(x)=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$ или

$\Delta f(x)= f'(x_o+\Theta\,\Delta x)\,\Delta x$, где $0<\Theta<1$.

Доказательство. Построим вспомогательную функцию F(x)=f(x)-f(a)-

$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$(x-a).

Эта функция непрерывна на [a;b], дифференцируема внутри его (т.е. на (a;b). Для нее выполняются условия теоремы Ролля F(a)=F(b)=0. И потому $\exists c\in$ (a;b) такая, что $F^{(n)}(c)=0$. Получаем $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. И в точке c имеем $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. Откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема **Коши**. Если f(x) и ф(x) непрерывны на [a;b], дифференцируемы внутри его (т.е. на (a;b) и $ф'(x)\neq 0$ ни в одной точке отрезка, то $\exists c\in$ (a;b) такая что справедливо $\dfrac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\phi'(c)}$.

Док. Сначала покажем, что $ф(b)-ф(a)\neq 0$. В самом деле, если бы это было не так, то для выбранной c мы получили бы ф'(c)= 0, что противоречит условию теоремы.

Построим вспомогательную функцию $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$(ф(x)-ф(a)). Эта функция непрерывна на [a;b], дифференцируема внутри его (т.е. на (a;b). Для нее выполняются условия теоремы Ролля F(a)=F(b)=0. И потому $\exists c\in$ (a;b) такая, что $F^{(n)}(c)=0$. Получаем $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ф'(x). И в точке c имеем $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ф'(c). =0. Откуда и следует утверждение теоремы.

Комментарий. Доказательство не следует из формулы Лагранжа, записанной сначала для одной и затем для другой функции с последующим делением одного равенства на другое, т.к. в формулах Лагранжа для разных функций ***точка c может быть разная***.

Правило **Лопиталя**. Если f(x) и ф(x) непрерывны в точке a, дифференцируемы в ее окрестности , f(a)=ф(a)=0, $ф'(a)\neq 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$, то существует и равен ему $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$.

Доказательство. Запишем теорему Коши для точек x, a и c

$\dfrac{f(x)-f(a)}{\phi(x)-\phi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\phi'(c)}$. Если теперь $x\to a$, то и $c\to a$. Получаем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f(c)}{\phi(c)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$.

Комментарий. Правило Лопиталя – необходимое условие, но не является достаточным. Это означает, что если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ не существует, то ничего нельзя сказать о наличии $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}$. Он может существовать, а может и нет.

Существует и другая схема доказательства (по А.Д. Мышкису). Пусть f(t) и ф(t) непрерывны при $t\to t_o$ и $f(t_o)=\phi(t_o)=0$. Рассмотрим функцию, заданную параметрически $\begin{cases} y=f(t) \\ x=\phi(t) \end{cases}$, график которой приближается к началу координат (0;0). Найдем угловой коэффициент касательной к этой кривой, когда кривая входит в эту точку (при $t\to t_o$). Имеем $k=\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)}{\phi'(t)}$. Но ведь угловой коэффициент касательной – это предельное значение углового коэффициента секущей $k_{сек}=\frac{f(t)}{\phi(t)}$, когда $t\to t_o$. Имеем $k_{сек}=\lim\limits_{t\to t_o}\frac{f(t)}{\phi(t)}=k=\lim\limits_{t\to t_o}\frac{f'(t)}{\phi'(t)}$. Если последний существует.

Правило Лопиталя удобно применять при вычислении пределов типа $\frac{0}{0}$. Технология применения должна быть очень строгой :

-сначала установи (узнай) тип предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}$;

-затем вычисли предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$; если он существует (конечен или бесконечен), то переходи к следующему пункту; иначе применяй для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}$ другой способ;

-делай запись $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$.

Зная связь бесконечно малых величин (бмв) с бесконечно большими величинами (ббв), можно переходить к раскрытию неопределенностей иного вида. Для сокращения записи юудем применять символы 0 и ∞ с индексами для обозначения бмв и ббв. Ниже записаны схемы преобразования неопределенностей, а справа – краткие пояснения к ним.

$\frac{\infty_1}{\infty_2}=\frac{0_2}{0_1}$ (использована связь ббв $=\frac{1}{бмв}$ и деление дробей)

$0_1*\infty_2\to\frac{0_1}{0_2}$ (записана ббв как дробь $\frac{1}{бмв}$ и умножение выражения на дробь)

$0_1^{0_2}\to e^{0_2\ln 0_1}\to e^{0_2\infty_1}$ (основное логарифмическое тождество и далее в показателе записан рассмотренный выше тип предела) и т.д.

Важный пример 4.2. Вычислите $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$. Решение. Обе функции удовлетворяют правилу Лопиталя. После n шагов применения (на каждом шаге функции всегда удовлетворяют правилу Лопиталя) получаем ответ ∞. Значит исходный предел тоже равен ∞.

Комментарий. Экспонента растет ***быстрее любой степенной функции*** при $x\to\infty$.

Пример 4.3. Вычислите $\lim_{x\to\infty}\frac{x-Sinx}{x+Cosx}$. Решение. Решение. Обе функции удовлетворяют правилу Лопиталя. После шага применения получаем $\lim_{x\to\infty}\frac{1-Cosx}{1-Sinx}$, который не существует. Применять повторно правило нельзя. Отсюда не следует, что исходный предел тоже не существует (см комментарий после док-ва правила). Чтобы убедиться в существовании исходного предела, достаточно в нем разделить числитель и знаменатель на x (использовать другой способ раскрытия неопределенности типа $\frac{0}{0}$).

Получаем $\lim_{x\to\infty}\frac{x-Sinx}{x+Cosx}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{Sinx}{x}}{1+\frac{Cosx}{x}}=1.$

Формула **Тейлора.** Выводится как расширение применения формулы дифференциала в приближенных вычислениях. Рассматриваем отдельно для полинома $P_n(x)$ и для функции f(x).

Пусть дан полином $P_n(x)=b_o+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_nx^n$. Если в нем земенить $x=x-x_o+x_o=(x-x_o)+x_o$, а затем возвести в нужные степени, привести подобные, не раскрывая скобок $(x-x_o)$, то мы получим тот же полином , но в виде $P_n(x)= a_o+a_1(x-x_o)+a_2(x-x_o)^2+a_3(x-x_o)^3+\ldots+a_n(x-x_o)^n$. Принято говорить, что исходный полином представлен степенями x, а преобразованный представлен степенями $(x-x_o)$. При кажущейся бессмысленности достаточно рассмотреть пример, чтобы убедиться в том, что есть ситуации, когда второй представление гораздо удобнее и рациональнее. Например, если требуется вычислить значение полинома при x=1,000035 с достаточно высокой степенью точности (с очень малой погрешностью). Тогда сразу становится ясным резко увеличенный расход сил при использовании первоначального представления (подстановки значения 1,000035 в полином $b_o+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_nx^n$). Если же использовать полином во втором представлении при $x_o=1$, то становится ясным, что для получения требуемого результата достаточно вычислить 3-4 первых слагаемых, т.к. остальные слагаемые будут представлять весьма малую величину и по отдельности и в сумме.

Руководствуясь целями экономии затрат при вычислениях, выясним, как подсчитать значения коэффициентов a_i $i=1,2,3,\ldots,n$ для полинома $P_n(x)$.

Отметим, что при x= x_o получаем равенство $P_n(x_o)= a_o$. Если теперь найти производную $P'_n(x_o)= 1*a_1+2*a_2(x-x_o)+3*a_3(x-x_o)^2+\ldots+n*a_n(x-x_o)^{n-1}$ и подставить в обе части равенства x_o, то получим $P'_n(x_o)= 1*a_1$.Откуда $a_1= \frac{P'_n(x_o)}{1}$. Если теперь найти вторую производную от полинома $P''_n(x_o)= 1*2*a_2+2*3*a_3(x-x_o)+\ldots+n*(n-1)a_n(x-x_o)^{n-2}$ и подставить в обе части равенства x_o , то получим $P''_n(x_o)= 1*2*a_2$. Откуда $a_2= \frac{P''_n(x_o)}{1*2}$. И т.д. Тогда ша шаге i получим

$a_i= \frac{P^{(i)}_n(x_o)}{i!}$. Коэффициенты, вычисленные по этой формуле , называют коэффициентами Тейлора для полинома. Если их подставить на свой места, то получим

$$P_n(x)=P_n(x_o)+\frac{P'_n(x_o)}{1}(x-x_o)+\frac{P''_n(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\frac{P'''_n(x_o)}{3!}(x-x_o)^3+\ldots+\frac{P^{(n)}_n(x_o)}{n!}(x-x_o)^n.$$

Это равенство и называют **формулой Тейлора** для полинома, а правую часть равенства - **полиномом Тейлора**.

На основании полученного построим полином Тейлора для функции f(x).

Пусть имеется некоторая непрерывная в x_o функция, имеющая достаточно много производных в этой точке. Тогда можно записать символическое представление этой функции, взяв за основу формулу Тейлора для полинома

$$f(x)\Leftrightarrow f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\frac{f'''(x_o)}{3!}(x-x_o)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n.$$

Естественно, что равенства здесь быть не может. Для получения равенства прибавим справа некоторое выражение $R_n(x)$ и назовем его остаточный член. Получим

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\frac{f'''(x_o)}{3!}(x-x_o)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n+R_n(x).$$

Слагаемое $f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\frac{f'''(x_o)}{3!}(x-x_o)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$ принято называть полиномом Тейлора для функции f(x). Легко показать, что при определенных условиях, налагаемых на функцию, остаточный член есть малая величина, которую можно принять за погрешность при замене функции полиномом Тейлора.

Теорема. Если f(x) непрерывна вместе со своими производными до порядка n включительно и $f^{(n)}(x)$ ограничена в окрестности точки x_o, то остаточный член $R_n(x)$ есть бесконечно малая величина порядка малости более высокого , чем $(x-x_o)^n$ при $x \to x_o$.

Док. Ограничимся в рассуждениях величиной $R_2(x)$. Тогда имеем равенство $f(x)-f(x_o)-\frac{f'(x_o)}{1}(x-x_o)-\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2=R_2(x)$. Теперь вычислим предел $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{R_2(x)}{(x-x_o)^2}=\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)-f'(x_o)(x-x_o)-0{,}5f''(x_o)(x-x_o)^2}{(x-x_o)^2}$. Легко видеть, что это предел типа $\frac{0}{0}$, т.е. в числителе и знаменателе записаны бмв в данных условиях. И нам просто нужно сравнить эти бмв. Сделаем это, используя правило Лопиталя раскрытия такого типа неопределенностей. После первого шага имеем $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)-f(x_o)-f''(x_o)(x-x_o)}{2(x-x_o)}$. Это опять предел такого типа и мы повторим правило Лопиталя. Получим $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f''(x)-f''(x_o)}{2}$=0. Следовательно и исходный предел равен нулю. А потому $R_2(x)$ есть бмв порядка малости более высокого, чем $(x-x_o)^2$.

Лагранж предложил записывать $R_n(x)$ в виде $\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_o)^n$, где С – некоторая тоска между x и x_o. Такая форма записи соответствует форме записи слагаемых в формуле Тейлора и не противоречит доказанной теореме.

Т.о. получаем окончательно формулу Тейлора для функции

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1}(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n+\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_o)^n.$$

С помощью этой формулы можно получить весьма удобные представления трансцендентных функций. Например, функция e^x – непрерывна и имеет неограниченно много непрерывных производных в окрестности точки x_o=0. И потому формула Тейлора для нее имеет вид

$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^C}{(n+1)!}x^n$. Достаточно подсчитать нужные производные в указанной точке (все они равны 1) и получим указанное представление функции .

Совершенно аналогично после вычисления нескольких производных в точке x_o=0 можно получить представление функций

$$\mathrm{Sin}x= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_n(x)$$ и

$Cosx=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n!}x^{2n}+R_n(x).$

Отметим, что такие представления не нарушают, например, свойства четности и нечетности самих функций. Сами эти представления заложены в программы микросхем, используемых в калькуляторах. Все это позволяет вычислять значения трансцендентных функций посредством простых арифметических операций. Погрешность результата при таких вычислениях определяется значением остаточного члена для конкретной ситуации.

Пример 4.4. Вычислить приближенно значение $e^{0,3}$, взяв в формуле Тейлора первые три слагаемых и оценить погрешность результата.

Решение. В данном случае имеем представление

$e^{0,3}=1+0,3+\frac{1}{2!}0,3^2+\frac{e^C}{3!}0,3^3$. **До начала** вычислений установим возможную погрешность будущего результата. Это нужно обязательно выполнить ***вначале работы***, чтобы промежуточные расчеты заранее выполнять с ***должной точностью(без лишних вычислительных затрат)***. Т.к. С, записанное в остаточном члене $R_3(x)$, находится где-то между 0 и 0,3 , то это означает, что величина e^C не превышает 2 (при желании это можно уточнить, но это уже будет не оценка, а повторное вычисление). Следовательно, величина $R_3(x)$ не превышает значения $+\frac{2}{3!}0,3^3$, которое можно оценить величиной 0,01 (оно не больше 0,01). Т.о. результативная погрешность не превышает 0,01. Все промежуточные расчеты следует проделывать с тремя десятичными знаками (один запасной) после десятичной запятой. Получаем $e^{0,3}=1+0,3+\frac{1}{2!}0,3^2=$

=1,000+0,333+0,045=1,378=1,38. (все равенства приближенные).

2.6.Приложение производной к исследованию функций.

2.6.1.Исследование на монотонность

Определение. Если знаки приращений функции и аргумента в данной точке совпадают, то функцию называют **возрастающей** в данной точке.

В противном случае функцию называют убывающей в данной точке.

Из этих определений следует теорема : если производная функции в данной точке положительна, то функция в этой точке возрастает (если производная отрицательна, то функция убывает).

Доказательство. Из определения производной $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует утверждение этой теоремы.

Получаем алгоритм исследования функции y=f(x) на монотонность.

1-й шаг. Найди область определения функции.

2-й шаг. Найди производную f’(x) функции.

3-й шаг. Найди точки, в которых f’(x) равна нулю, и точки, в которых f’(x) не существует.
4-й шаг. Точками, найденными на шаге 3, разбей область определения на промежутке.

5-й шаг. В каждом промежутке возьми точку и установи(узнай, выясни) знак производной в выбранной точке. Сделай вывод и возрастании-убывании функции.

2.6.2.Исследование на экстремум

Опр. Если в окрестности точки x_o выполняется условие $f(x)<f(x_o)$, то эту точку называют точкой ***локального экстремума*** типа максимум.

Если в окрестности точки x_o выполняется условие $f(x)>f(x_o)$, то эту точку называют точкой локального экстремума типа минимум.

В этих определениях слово «локальный» означает достаточно малую окрестность рассматриваемой точки.

Среди всех локальных экстремумов можно выбрать самое малое и самое большое значения, которые называют ***глобальными экстремумами***.

Предполагается также, что функция и ее производная непрерывны в указанной точке.

Теорема (необходимое условие существования). Если f(x) дифференцируема в точке x_o и эта точка является точкой локального экстремума, то $f'(x_o)$.

Док. Пусть, для определенности, x_o – точка минимума. Тогда при $x<x_o$ имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$, а при $x>x_o$ имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$. Но, т.к. по условию, f(x) дифференцируема(т.е. имеет *единственную* производную), то это означает, что производная непрерывна в этой точке и потому равна нулю.

Теорема (1-е достаточное условие).Если f(x) непрерывна в x_o, дифференцируема в окрестности этой точки, кроме , быть может, самой точки и рпи переходе через эту точку производная меняет знак, то точка x_o – точка локального экстремума.

Комментарий. Переход через точку означает такое изменение аргумента, при котором в начале движения аргумент принимал значение с одной стороны точки x_o, а закончился процесс, когда аргумент принял значение с другой стороны точки x_o.

Док. Пусть для определенности при переходе через точку знак производной меняется с + на -. Применим формулу Лагранжа для функции в точках x и x_o . Имеем $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$=f’(c) , в которой точка с где-то между x и x_o. Пусть теперь $x<x_o$, тогда $f'(c)>0$ и потому $f(x)-f(x_o)<0$. Если же $x>x_o$ имеем $f'(c)<0$ и потому $f(x)-f(x_o)<0$. Но из полученных соотношений между значениями функции в точках x и x_o следует, что выполнено определение локального экстремума в точке x_o.

Теорема(2-е достаточное условие). Пусть f(x) непрерывна в x_o и дифференцируема в этой точке до порядка n включительно. Пусть $f^{(i)}(x)\neq 0$ для i=1,2,…,n-1 , но $f^{(n)}(x)= 0$. Тогда, если n четное, то в точке x_o есть экстремум; если n нечетное, то в точке x_o нет экстремума.

Док. По формуле Тейлора имеем $f(x)=f(x_o)+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$. Или иначе $f(x)-f(x_o)=\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$. Из этой записи видно что постоянство знака разности $f(x)-f(x_o)$ определяется знаком произведения $\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$. При n четном второй множитель всегда положителен (постоянен по знаку). И тогда знак правой и левой частей равенства $f(x)-f(x_o)=\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$ полностью определяется знаком $f^{(n)}(x)$. Т.к. по условию эта производная не равна нулю в окрестности точки x_o, то она там имеет вплоне определенный (постоянный знак). А это обеспечивает выполнение определения локального экстремума в точке x_o.

Если же n нечетно, то на знак разности $f(x)-f(x_o)$ влияет еще и знак величины $(x-x_o)^n$, который может быть разным для разного расположения x относительно точки x_o. Значит определения экстремума не выполняется и его нет.

Следствие. Если знак $f^{(n)}(x_o)$ положителен, то x_o – точка локального максимума; если знак $f^{(n)}(x_o)$ отрицателен, то x_o – точка локального минимума.

Комментарий. На практике ограничиваются второй производной.

2.6.3.Исследование на выпуклость графика функции.

Сначала несколько новых терминов. Предполагаем, что любая невертикальная прямая разбивает плоскость на «верхнюю» и «нижнюю» полуплоскости.

Пусть в x_o f(x) имеет касательную, непараллельную оси Oy. Притаком условии мы предполагаем дифференцируемость функции в это й точке.

Опр. Кривая **выпукла** (вариант - **вогнута**) в точке x_o, если в достаточно малой окрестности этой точки кривая расположена ***ниже*** (вариант – ***выше***) касательной.

Опр. Кривая выпукла (вариант - вогнута) в интервале, если она такова в каждой точке интервала.

Пусть в x_o f(x) имеет касательную (в том чяисле и параллельную оси Oy).

Опр. Точка x_o называется точкой перегиба кривой y= f(x), если с одной стороны от точки x_o кривая y= f(x) выпукла , а с другой – вогнута.

Из определения следует, что в точке перегиба кривая ***пересекает*** касательную. На Рис.4.3. В точках x_2, x_3, x_6 нет перегибов, а в точках x_1, x_5 перегибы есть.

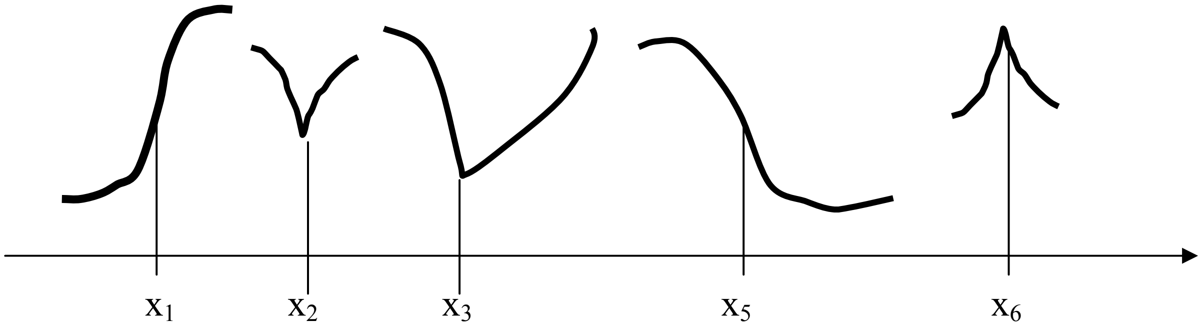


Рис 4.3. О точках перегиба

Теорема. Если f(x) в окрестности x_0 дважды дифференцируема, то необходимым и достаточным условием выпуклости (вариант – вогнутости) графика этой функции в точке x_0 является условие постоянства знака для $f''(x_0)$.

Док. Запишем формулу Тейлора для данной функции в точке x_0, ограничиваясь n=1 $y_{кр}=f(x)= f(x_0)+ f'(x_0)(x- x_0)+0,5\ f''(C)(x-x_0)^2$. Теперь запишем уравнение касательной к этой кривой в той же точке $y_{кас}= f(x_0)+ f'(x_0)(x- x_0)$. Теперь вычислим $y_{кр}- y_{кас}=0,5\ f''(C)(x-x_0)^2$. Эта разность определяет взаимное расположение кривой и касательной к ней . Т.к. знак разности определяется только знаком второй производной от функции (остальные множители справа в равенстве гарантированно положительны), то можно рассуждать так .

Пусть требуется доказать необходимость в теореме; тогда, если кривая выпукла в точке x_0, то все точки кривой в окрестности этой точки расположены ниже касательной и потому левая часть равенства отрицательна; но в этом случае имеем постояннный отрицательный знак для $f''(x_0)$ (аналогично для вогнутого графика).

Пусть требуется доказать достаточность теоремы; тогда знак производной постоянен (пусть отрицателен); поэтому правая часть формулы отрицательна и потому все точки кривой расположены ниже точек касательной.

Следствие. Если f(x) дважды дифференцируема, то в точке перегиба ее графика верно равенство $f''(x)=0$. Утверждение следует из предыдущей теоремы – касательная существует и единственна, а знак непрерывной $f''(x)$ меняется при переходе через точку и потому в точке равен нулю (см. свойства функции, непрерывной на промежутке и следствие из них).

Из всех этих рассуждений следует алгоритм исследования функции на выпуклость-вогнутость ее графика.

1-й шаг. Укажи область определения функции.

2-й шаг. Найди 2-ю производную функции.

3-й шаг. Реши уравнение $f''(x)=0$ (найди нули 2-й производной).

4-й шаг. Точками, найденными в п.3. разбей область определения на промежутки.

5-й шаг. На каждом промежутке возьми точку и установи (узнай, выясни) знак 2-й производной в этой точке. Сделай вывод.

2.6.4. Асимптоты плоских кривых

Опр. Линия, к которой неограниченно приближается кривая, называется асимптотой этой кривой.

Специально не оговаривается как ведет себя кривая относительно асимптоты (пересекает асимптоту или нет).

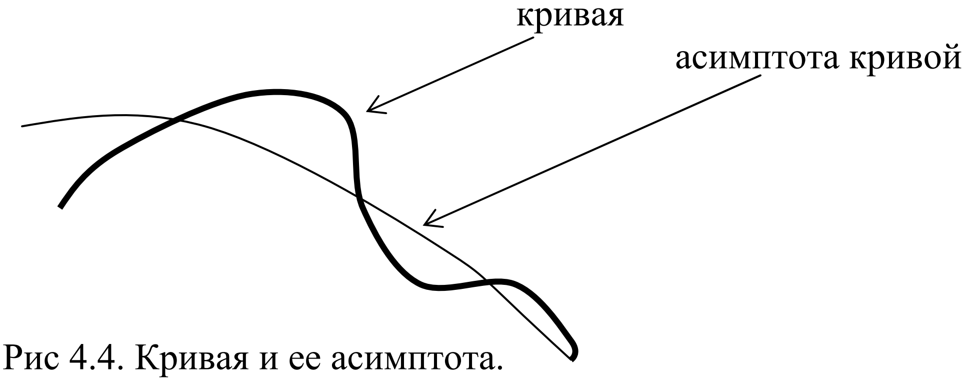


Рис 4.4. Кривая и ее асимптота.

Примером такого рода асимптоты будет экспонента $0{,}5e^x$ для гиперболической функции y=Shx.

Будем рассматривать только прямолинейные односторонние асимптоты, которые имеют вид y=kx+b , y=b , x=a. Начнем с простейших – вертикальных. Если в некоторой точке x=a функция y=f(x) не определена, то имеет смысл вычислить односторонние пределы этой функции в этой точке. Если хотя бы один из односторонних пределов есть бесконечный предел, то прямая x=a – вертикальная асимптота.

Пусть мы строим график функции y=f(x). И возник вопрос о наличии асимптоты вида y=kx+b. Поступаем так. По определению разность f(x)-(kx+b)=$\alpha(x)$ - бмв при $x\to\infty$ или при $x\to-\infty$. Разделим обе части равенства на x и подсчитаем пределы обеих частей при тех же условиях. Получаем

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$-k $-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x}$ Откуда получаем k=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ т.к. остальные пределы дают нули. Если же просто подсчитать при тех же условиях пределы $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$-kx -b=$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)$, то получим b=$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$-kx.

Частный случай. При k=0 получают горизонтальную асимптоту y=b.

2.6.5.Общая схема исследования и построение графиков.

Обобщаем все ранее приведенные исследования функции и получаем алгоритм исследования функции и построения ее графика.

1-й шаг. Найди область определения функции.

2-й шаг. Найди производную f'(x) функции.

3-й шаг. Найди точки, в которых f'(x) равна нулю, и точки, в которых f'(x) не существует.

4-й шаг. Найди 2-ю производную функции.

5-й шаг. Реши уравнение f''(x)=0 (найди нули 2-й производной). Найди точки, где f''(x) не существует

6-й шаг. Точками, найденными в п.п.3 и 5. разбей область определения на промежутки.

7-й шаг. В каждом промежутке возьми точку и установи(узнай, выясни) знак производной в выбранной точке. Сделай вывод и возрастании-убывании функции; наличии экстремума и вычисли значения экстремума.
8-й шаг. На каждом промежутке возьми точку и установи (узнай, выясни) знак 2-й производной в этой точке. Сделай вывод о выпуклости-вогнутости графика функции в этом промежутке , наличии точек перегиба и вычисли значения функции в точках перегиба.

Примечание. Пункты 6,7,8 лучше выполнять в сводной (результативной) таблице. 1-я строка таблицы – промежутки и точки из п.п.3 и 5. 2-я строка – знаки f'(x) по промежуткам и на границах промежутков. 3-я строка – знаки f''(x) по промежуткам и на границах промежутков. Последняя строка отводится для символов, которые характеризуют поведение функции и ее графика: $\nearrow$ - возрастает ; $\searrow$ - убывает ; - выпукла и убывает;
- выпукла и возрастает; - вогнута и возрастает ; - вогнута и убывает. Все это облегчит в дальнейшем построение графика.
9-й шаг. Исследуй точки разрыва на наличие вертикальных асимптот.
10-й шаг. Найди возможные наклонные асимптоты при графика при $x \to \infty$ или при $x \to -\infty$.
11-й шаг. Выбери масштаб руководствуясь значениями экстремумов, перегибов и их координат. Изобрази асимптоты , экстремумы, перегибы.
12-й шаг. Плавной линией соедини все участки кривой , двигаясь слева направо.

Примечание. Некоторые из пунктов могут меняться местами (например, п.п.9 и 10 могут выполняться сразу за п.1.).

Пример 4.5. Исследовать функцию $y=3xe^x$ и построить ее график.

Область определения $(-\infty;\infty)$. Точек разрыва нет и потому нет вертикальных асимптот. Для других асимптот найдем k=$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3xe^x}{x}=\infty$ - при $x \to \infty$ асимптот нет. Найдем k=$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{e^x}$=0. Далее найдем b==$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$-kx=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{e^x}$=0 по правилу Лопиталя (экспонента растет быстрее любой степени). Получаем горизонтальную асимптоту y=0. При этом x отрицателен и потму график приближается к оси Ox снизу.

Находи $y'=3e^x(x+1)$. Существует во всех точках. Находим нули – $x_1=-1$. Находим $y''=3e^x(x+2)$. Существует во всех точках. Находим нули – $x_2=-2$.

Строим сводную таблицу

X	$-\infty$; -2	-2	-2 ; -1	-1	-1 ∞
Y’	-	-	-	0	+
Y’’	-	0	+	+	+
Y	↘	$-6e^{-2}$ =0,6	↘	$-3e^{-1}$ -1,2	↗

По результатам исследования получаем график на Рис 4.5.

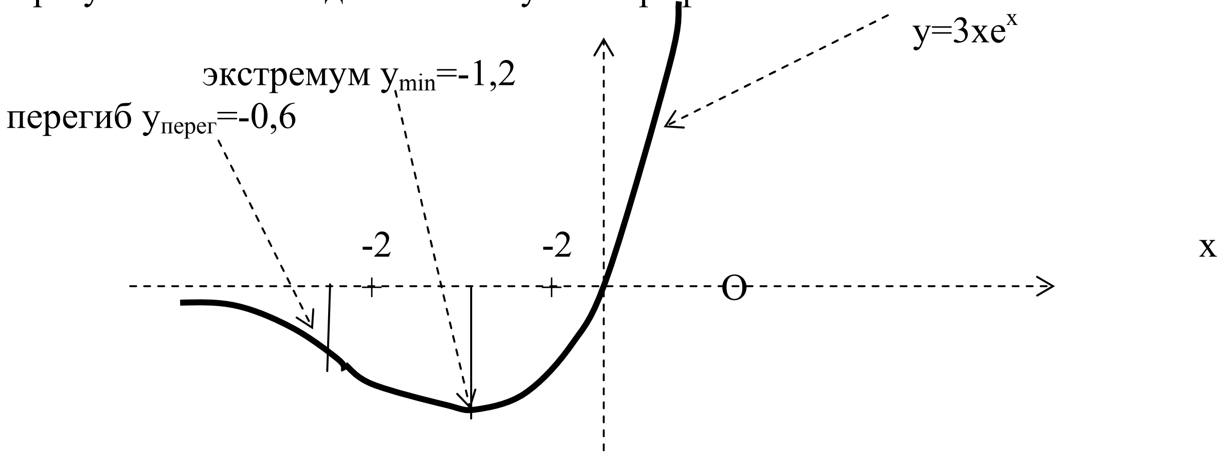


Рис 4.5. График кривой $y=3xe^x$.

3. Функции нескольких переменных

3.1.Основные понятия

Все понятия, справедливые для функций 2-х переменных, остаются верными и для функций любого конечного числа переменных.

Опред. Если паре (x;y) из множества M по закону f ставится в соответствие единственное действительное z, то говорят, что на M задана функция двух переменных и обозначают этот факт z=f(x;y).

Множество M называют областью определения функции.

Аналогично определяется функция любого иного числа переменных.

Т.к. геометрически паре (x;y) соответствует точка на координатной плоскости xOy, а величине z соответствует аппликата в трехмерном пространстве, то геометрически факт z=f(x;y) можно истолковать как поверхность в пространстве (см. раздел 6).

Гораздо труднее дать интерпретацию функции 3-х переменных. Поэтому введем понятие поля : если в каждой точке M некоторого пространства задано значение величины U, то говорят, что в пространстве задано поле U и обозначают этот факт U=U(M).

Т.к. точка М может зависеть от нескольких координат и еще менять свое местоположение от времени, то можно провести простую классификацию полей. Если М меняет свое положение в зависимости от времени t , то поле называют нестационарным, в противном случае – стационарным. Кажется парадоксальным, но поле скоростей точек при течении воды в трубопроводе при открытом кране – стационарное поле!

Если М(х) , то поле одномерно (осевое); если М(х,у) – поле плоское; если М(х,у,z) – поле пространственное.

Если U скалярная величина , то поле скалярное; если U вектор. То и поле векторное.

Опред. Окрестность точки (х,у) – круг некоторого радиуса и с центром в точке . Для пространственной точки окрестность – это шар.

Опред. ε-окрестность точки - это круг радиуса ε и с центром в этой точке.

Опред. Точка Р – внутренняя для некоторого множества, если любая ε-окрестность ее содержит только точки этого множества.

Опред. Точка Р граничная для множества, если любая ε-окрестность ее содержит как точки множества, так и точки, ему не принадлежащие.

Опред. Множество граничных точек – граница.

Опред. Областью называют множество открытое и связное. Открытость – множество состоит только из внутренних точек. Связность – любые две точки множества можно соединить непрерывной линией, состоящей только из внутренних точек.

Если множеству принадлежат его внутренние точки и точки границы – это замкнутая область.

Если множество целиком принадлежит кругу конечного радиуса с центром в начале координат, то это ограниченное множество.

Опред. Линией уровня функции z=f(x;y) называют множество точек области определения, в каждой из которых выполняется равенство C= f(x;y).

Для функции 3-х переменных справедливо понятие поверхности уровня.

3.2.Непрерывность функций нескольких переменных

Опред. С называют пределом f(M) при М →Мо, если для любого ε>о можно указать такое δ>0, что как только М оказывается в δ-окрестности точки Мо, выполняется неравенство $|f(M)-C|<\varepsilon$.

Это записывают так $\lim\limits_{M\to M_o}$ f(M)=C. При этом подразумевается независимость стремления М к Мо.

Справедливы соответствующие теоремы о пределах.

Опред. z=f(x;y) называют непрерывной в Мо , если она определена в этой точке и имеет предел в этой точке, равный значению функции в этой точке.

Опред. Функция, непрерывная в каждой точке области, называется непре-рывной в области.

Справедливы известные свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области: (о непрерывности суммы, произведения, частного, сложной; об ограниченности ; о достижении наибольшего и наименьшего значений).

3.3.Частные производные и дифференциалы

Пусть дана z=f(x;y). Дадим переменной x приращение Δx. Тогда функция z=f(x;y) получит некоторое приращение только за счет приращения x. Обозначим его значком $\Delta_x z$ и назовем частным приращением. Естественно, $\Delta_x z= f(x+\Delta x;y)- f(x;y)$. Аналогичные приращения можно записать при изменении других переменных.

Опред. Частной производной от функции по данному аргументу называют предел отношения частного приращения функции к вызвавшеме его приращению аргумента , если последнее стремится к нулю.

Символически это факт записывают по разному : z'_x ; f'_x ; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ и т.д. Обратите внимание – в третьей и четвертой записях не записано отношение, а записан один символ! Читается всегда так "частная производная от … по …". Неверно читать " дэ от … по дэ…".

Распространим на частую производную известный геометрический ее смысл – частная производная характеризуют скорость изменения функции в направлении выбранной координатной оси.

Теорема(необходимое условие существования ЧП). Если f(x;y) имеет ЧП в данной точке, то функция непрерывна в этой точке.

Док. По определению $f'_x = \lim\limits_{M \to M_o} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Используя связь предела с бесконечно малой величиной получим $\Delta_x z= f'_x \Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$. Если теперь подсчитать пределы обеих частей полученного равенства, то получим одно из определений непрерывной в точке функции.

Опред. Главная часть частного приращения функции, линейная относительно частного приращения аргумента называется частным дифференциалом функции и обозначается $d_x z= f'_x \Delta x$ или $d_x z= f'_x dx$.

Пусть дана f(x;y). При переходе от точки M к точке Mo эта функция получит приращение Δz, которое в отличие от частного следует называть полным приращением функции.

Опред. Если Δz удается представить в виде $A\Delta x+B\Delta y+\alpha_1(\Delta x)\Delta x+\alpha_2(\Delta x)\Delta y$, то говорят, что z=f(x;y) дифференцируема, а выражение $A\Delta x+B\Delta y$ называют полным дифференциалом и обозначают dz.

Выведем формулу для вычисления полного дифференциала. Имеем $\Delta z= =f(x+\Delta x;y+\Delta y)- f(x;y)= f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y+\Delta y) + f(x;y+\Delta y) - f(x;y)= f(x+\Delta x;y+\Delta y)- f(x;y+\Delta y) +(f(x;y+\Delta y)- f(x;y))$. Для каждой разности применим формулу Лагранжа конечных отношений и получим $\Delta z=$

$f'_x(C_1;y+\Delta y)\Delta x+f'_y(x;C_2)\Delta y$, где точки C_1 и C_2 расположены на участках приращения переменных. Но, т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f'_x(C_1;y+\Delta y)=f'_x(x;y)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f'_y(x;C_2)=f'_y(x;y)$, то из связи пределов с бесконечно малыми получаем

$$\Delta z=f'_x(x;y)\Delta x+f'_y(x;y)\Delta y+\alpha_1(\Delta x)\Delta x+\alpha_2(\Delta x)\Delta y \qquad (5.1)$$

Отсюда видно, что $dz=A\Delta x+B\Delta y=f'_x(x;y)\Delta x+f'_y(x;y)\Delta y=f'_x(x;y)dx+f'_y(x;y)dy$. Т.е. полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов.

Полный дифференциал удобно применять в вычислениях.

Пример 5.1. Вычислите приближенно $1{,}01^{2{,}03}$. Решение. Подберем подходящую по виду функцию $z=x^y$. Возьмем точку Мо достаточно близкую к точке М(1,01; 2,03) и такую, чтобы легко можно было вычислить значение функции в этой точке. Такой будет Мо(1;2). Тогда z(Mo)=1. При переходе от точки Мо к точке М функция получит некоторое приращение Δz, которое мы не знаем. Но можем вычислить приближенно, заменив полным дифференциалом dz(Mo). Получаем $\Delta z=dz=f'_x(x;y)\Delta x+f'_y(x;y)\Delta y$. Найдем частные производные функции в точке Мо. $f'_x(Mo)=y\,x^{y-1}=1$. $f'_y(Mo)=x^y\ln x=0$.

$\Delta x=1{,}01-1=0{,}01$; $\Delta y=2{,}03-2=0{,}03$. Получаем $\Delta z=1(0{,}01)+0(0{,}03)=0{,}01$. Окончательно $1{,}01^{2{,}03}=1+0{,}01=1{,}01$.

3.4. Производная по направлению и градиент

Уже известно, что частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующей координатной оси. Попытаемся вычислить скорость изменения функции в произвольном направлении.

Опред. Производной по направлению вектора $\vec{l}=\vec{MMo}$ от функции f(x;y) называют $\lim\limits_{M\to M_o}\dfrac{\Delta_x z}{|\vec{MMo}|}$. Обозначают производную по направлению $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Пусть $|\vec{MMo}|=\rho$. Тогда $\Delta x=\rho\cos\alpha$ и $\Delta y=\rho\sin\alpha$. Имеем с точностью до бесконечно малых порядка малости более высокого, чем Δx, равенство $\Delta z=f'_x(x;y)\Delta x+f'_y(x;y)\Delta y=f'_x(x;y)\rho\cos\alpha+f'_y(x;y)\rho\sin\alpha$. Разделим последнее равенство на ρ и вычислим указанный в определении предел. Получим окончательно $\dfrac{\partial f}{\partial l}=f'_x(x;y)\cos\alpha+f'_y(x;y)\sin\alpha$ производную по направлению. Т.к. $\beta=90^o-\alpha$, то можно использовать направляющие косинусы вектора $\vec{l}=\vec{MMo}$ и выражение для производной по направлению примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x(x;y)\cos\alpha+f'_y(x;y)\cos\beta \qquad (5.2)$$

Если же требуется вычислить производную по направлению для функции трех переменных, то получим формулу

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(x;y;z)\mathrm{Cos}\ \alpha + f'_y(x;y;z)\mathrm{Cos}\ \beta + f'_z(x;y;z)\mathrm{Cos}\ \gamma .$$

Мы видим, что записанное справа выражение похоже на скалярное произведение двух векторов, один из которых единичный направления $\vec{l} = \overrightarrow{MMo}$. Для второго вектора введем обозначение

$$\mathrm{grad}\ f(x;y;z)= f'_x(x;y;z)\ \vec{i} + f'_y(x;y;z)\ \vec{j} + f'_z(x;y;z)\ \vec{k} \qquad (5.3)$$

Т.о. $\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l_o}$ grad f(x;y;z) $=|\vec{l_o}|\ |$ grad f(x;y;z) $|$Cosф$=|$ grad f(x;y;z) $|$Cosф откуда следует, что grad f указывает направление наибыстрейшего изменения поля. Это весьма важная физическая характеристика поля. Позже получим некоторые характеристики самого градиента.

3.5. Производная сложной функции нескольких переменных

Пусть задана сложная функция с двумя промежуточными и одним основным аргументом z=f(x;y), x=x(t), y=y(t). Требуется вычислить производную z'_t . отметим. Что это полная производная, т.к. фактически это функция одного переменного. Пусть переменная t получила приращение Δt. Тогда соответствующие приращения получат и функции x и y, зависяшие от t, а вместе с ними и функция z получит полное приращение $\Delta z= f'_x(x;y)\Delta x+ f'_y(x;y)\Delta y$. Разделим полученное приращение на Δt и вычислим предел этого отношения при $\Delta t\to 0$. Тогда получим $f'_t = f'_x\, x'_t + f'_y\, y'_t$ -формула для вычисления производной сложной функции данного типа.

Если же задана сложная функция с двумя промежуточными и двумя основными аргументами z=f(x;y), x=x(t,s), y=y(t,s), тогда можно использовать уже разработанный алгоритм вычисления частных производных и получить формулы $f'_t = f'_x\, x'_t + f'_y\, y'_t$; $f'_s = f'_x\, x'_s + f'_y\, y'_s$ или в других символах

$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$. В последних записях отметим справедливость предупреждения о том, что частные производные – это не дроби, а единые символы. В противном случае полсе сокращения справа было бы получено две частные призводные , равные одной производной слева!

Если от функции нескольких переменных взяты частные производные, то они сами будут функциями от тех же аргументов. Естественно попытаться поставить вопрос о производных от частных производных.

Определение. Частная производная от частной производной порядка n-1 от данной функции называется частной производной порядка n от данной функции.

3.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Аналогично определяются частные и полные дифференциалы высшего порядка. Соответствующим образов выглядят символические обозначения частных производных и дифференциалов высшего порядка: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$ или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ или f''_{xx} - все это производные 2-го порядка от функции z=f(x;y;…) по переменной x. Читается это так “частная производная второго порядка от функции f (или z) по переменной x дважды”. Естественно, что частные производные можно брать по всем аргумента.

Справедлива теорема – если f(x;y) имеет всевозможные частные производные до порядка n-1 включительно и имеет непрерывные частные производные порядка n , то значение частной производной порядка n независит от последовательности, в которой для ее вычисления проводились дифференцирования по переменным, а определяется только общим числом дифференцирований по каждому аргументу.

К примеру, имеем естественные равенства в условиях данной теоремы :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = \ldots$$

3.7. Производные неявных функций

Ранее было введено понятие неявной функции одного аргумента в неявном виде, т.е. уравнением F(x;y)=0. Однако там же указывалось, что не всякое уравнение F(x;y)=0 определяет функцию y=f(x).

Теорема (достаточные условия существования неявной функции).

Пусть :

1. F(x;y) определена и непрерывна как функция двух переменных вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки $Mo(x_o;y_o)$;
2. В точке $Mo(x_o;y_o)$ имеет место равенство $F(x_o;y_o)=0$,
3. В точке Mo $F'_x(x_o;y_o)$ не равна нулю;

тогда:

a. В некотором прямоугольнике $D\{|x - x_o| < \delta; |y - y_o| < \Delta\}$ уравнение F(x;y)=0 определяет однозначную y=f(x);
b. При $x= x_o$ функция y=f(x) принимает значение y_o ;
c. На промежутке $\{|x - x_o| < \delta\}$ функция y=f(x) непрерывна и имеет производную, которую вычисляют по формуле $y` = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Доказательство опускаем. Получим только формулу для вычисления производной. Пусть в D имеет место F(x;y)=0 и потому dF=0. Но dF= $F'_x(x;y)dx+F'_y(x;y)dy$. И потому имеем $y` = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Комментарий. Следует заметить, что фактической функции y=f(x) можно и не получить вообще, т.к. не всякое уравнение F(x;y)=0 можно решить относительно y. И все же производную вычислить можно!

Обобщим полученное на неявную функцию трех переменных. Получим для задания функции в виде F(x;y;z)=0 формулы для частных производных:

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$, что легко получить либо по аналогии, либо из очевидного равенства dF=0 или $F'_x(x;y;z)dx+F'_y(x;y;z)d\ y\ +F'_z(x;y;z)dz=0$ откуда

dz= $-\frac{F'_x}{F'_z}$dx+($-\frac{F'_y}{F'_z}$)dy , но dz=$\frac{\partial z}{\partial x}$dx+$\frac{\partial z}{\partial y}$dy и потому верны записанные выше формулы для вычисления частных производных.

Используем производную неявной функции для получения характеристик градинта поля. Пусть дана z=f(x;y) . И пусть дана некоторая линия уровня z=C. Пусть Mo лежит на линии уровня. Тогда можно найти угловой коэффициент касательной к линии уровня в точке Mo, используя производную неявно заданной функции k= y`=$-\frac{f'_x}{f'_y}$. Однако нам известен по (5.3)

grad f(x;y)= $f'_x(x;y)$ $\vec{i}$+ $f'_y(x;y)$ $\vec{j}$. Легко видеть, что градиент перпендикулярен касательной ,т.к. вектор касательной имеет координаты ($-f'_y(x;y)$; $f'_x(x;y)$). Скалярное их произведение равно нулю.

Т.о. градиент – это вектор, нормальный к линии (поверхности) уровня, проведенной через данную точку. Он указывает направление наибольшего увеличения поля.

3.8.Экстремумы функций нескольких переменных

3.8.1.Локальный экстремум

Определение экстремума перенесем из функций одного переменного.

Теорема. Если z=f(x;y) непрерывна в окрестности точки Mo. Дифференцируема там и имеет в точке Mo экстремум, то имеют место равенства $\begin{cases} f'_x(Mo)=0, \\ f'_y(Mo)=0 \end{cases}$. Доказательство. Пусть для определенности Mo – точка максимума. Тогда в любой окрестности этой точки справедливо f(x;y)< $f(x_o;y_o)$. Это значит. Что дифференцируемая по x функция $f(x;y_o)$ удовлетворяет необходимым условиям существования экстремума, т.е. $f'_x(x_o;y_o)=0$. Аналогичные рассуждения приведут ко второму равенству.

Комментарий. Следует помнить, что условия теоремы не являются достаточными. Так функция $z=x^2-y^2$ удовлетворяет необходимым условиям наличия экстремума в точке (0;0), но там экстремума нет (см. раздел 6 т.к. эта поверхность – гиперболический параболоид), а есть минимакс.

Теорема (достаточные условия существования экстремума). Пусть в δ-окрестности точки Mo функция z=f(x;y) имеет непрерывные до второго порядка включительно частные производные и выполняются необходимые условия наличия экстремума. Тогда при $\Delta=(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy})<0$ в точке Mo имеется экстремум; если $\Delta>0$, то экстремума нет; если $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования.

Док. Запишем формулу Тейлора для функции в окрестности Mo с точностью до R_2 . $f(M)=f(x_o;y_o)+ f'_x(x_o;y_o)(x- x_o)+f'_y(x_o;y_o)(y- y_o)+$ $+0,5(f''_{xx}(x_o;y_o)(x- x_o)^2+2 f''_{xy}(x_o;y_o)(x- x_o)(x- y_o)+ f''_{yy}(x_o;y_o)(y-y_o)^2)+ R_2$. первые два слагаемые выпадают по необходимому условию. И тогда знак разности $f(M)-f(x_o;y_o)$ определяется знаком трехчлена

$f''_{xx}(x_o;y_o)(x-x_o)^2+2f''_{xy}(x_o;y_o)(x-x_o)(x-y_o)+ f''_{yy}(x_o;y_o)(y-y_o)^2$ Т.е. знаком величины

$(x-x_o)^2 (f''_{xx}(x_o;y_o)+2 f''_{xy}(x_o;y_o)t+ f''_{yy}(x_o;y_o)t^2)$. Т.к. нам требуется гарантировать постоянство знака у разности $f(M)-f(x_o;y_o)$, то это будет, если дискриминант трехчлена меньше нуля. Получаем требование для наличия экстремума

$\Delta=(f''_{xy})^2- f''_{xx} f''_{yy})<0$, что и требовалось . Если же знак Δ положителен, то невозможно гарантировать постоянство знака разности $f(M)-f(x_o;y_o)$, а это говорит об отсутствии экстремума. Если же $\Delta=0$. То исследование следует продолжить, т.к. все опирается теперь на слагаемые более высокого порядка в формуле Тейлора.

Следствие. Если наличие экстремума обеспечено, то условие $f''_{yy}<0$ (или эквивалентное ему $f''_{xx}<0$) указывает тип экстремума – максимум. Если же $f''_{yy}>0$ (или эквивалентное ему $f''_{xx}>0$) , то тип экстремума – минимум.

Как видим поиск локального экстремума весьма трудоемкая работа. Самое трудное – решение системы необходимых условий. Поэтому для поиска экстремумов используют приближенные численные методы (покоординатный, градиентный, случайный и др. методы спуска).

3.8.2.Условный экстремум и экстремум глобальный

Пусть задана $z=f(x;y)$ и пусть аргументы x и y связаны условием $ф(x;y)=a$. В силе этого переменные x и y в некотором смысле зависимы.

Опред. Числовое значение f(Mo) называют условным экстремумом в точке Mo, а Mo точкой условного экстремума, если в некоторой одномерной окрестности тоски Mo на линии $ф(x;y)=a$ это значение будет наибольшим (наименьшим).

Сначала получим необходимое условие существования такого экстремума. Руководствуемся Рис 5.1. Пусть задана линия связи $ф(x;y)=a$ и несколько линий уровня функции $z=f(x;y)$: $z=C_1$, $z=C_2$, $z=C_3$, $z=C_4$, $z=C_5$. Пустьконстанты связаны соотношением $C_1<C_2<C_3<C_4<C_5$ Тогда точки пересечения линии связи $ф(x;y)=a$ и линий уровня $z=C_1$, $z=C_2$, $z=C_3$, $z=C_4$ не могут быть точками условного максимума функции $z=f(x;y)$, т.к. при движении через эти точки пересечения значение $z=f(x;y)$ только возрастает. Единственной подозрительной на наличие максимума точкой будет точка Mo, т.к. с одной стороны от нее значение $z=f(x;y)$ возрастает с приближением к Mo, а со второй

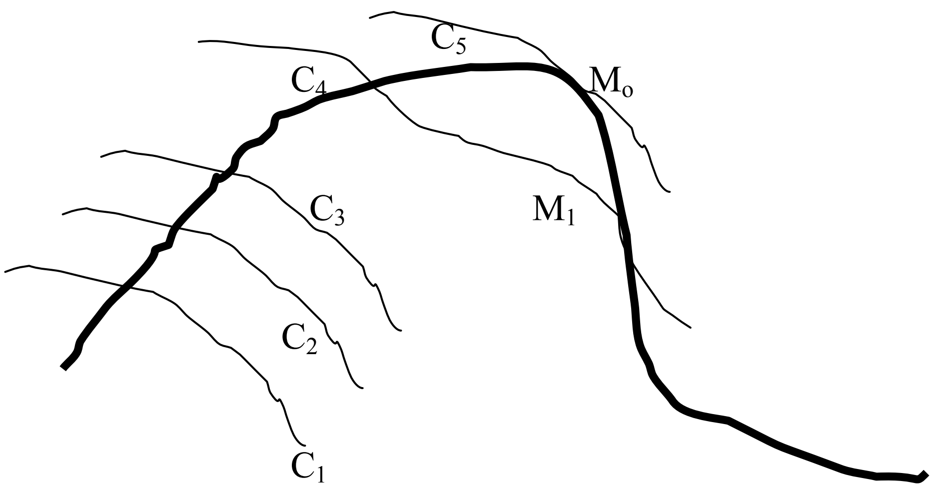


Рис 5.1. К условному экстремуму

стороны убывает. Таким образом точка соприкосновения линии связи и линии уровня дает подозрение на наличие экстремума. Подозрение, но не уверенность, т.к. точкой соприкосновения будет и M_1 . Однако при переходе через M_1 значения функции строго возрастают. И потому в M_1 нет экстремума.

Вывод. В точке условного экстремума линия связи касается некоторой линии уровня, проходящей через эту точку. Отсюда получим соотношения для поиска точек возможного экстремума.

Условием соприкосновения является наличие общей касательной. Т.е. равенство их угловых коэффициентов. Для линии связи ф(x;y)=a угловой коэффициент равен Kф=$-\dfrac{\phi'_x(Mo)}{\phi'_y(Mo)}$, а для линии уровня Kf=$-\dfrac{f'_x(Mo)}{f'_y(Mo)}$.

Приравняем эти отношения и получим $\dfrac{\phi'_x(Mo)}{\phi'_y(Mo)}=\dfrac{f'_x(Mo)}{f'_y(Mo)}$=-l. Откуда получаем необходимые условия существования условного экстремума

$$\begin{cases} f'_x(Mo)+l\,\phi'_x(Mo)=0, \\ f'_y(Mo)+l\,\phi'_y(Mo)=0, \\ \phi(Mo)=0. \end{cases}$$

Константа l носит название множителя Лагранжа. Если ввести обозначение U(x;y;l)=f(x;y)+lф(x;y), то необходимые условия принимают вид

$$\begin{cases} U'_x(Mo)=0, \\ U'_y(Mo)=0, \\ \phi(Mo)=0. \end{cases}$$

Достаточные условия. Пусть z=f(x;y) и ф(x;y) имеют в Mo частные производные до 2-го порядка включительно. Если

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \phi'_x & \phi'_y \\ \phi'_x & U''_{xx} & U''_{xy} \\ \phi'_y & U''_{xy} & U''_{yy} \end{vmatrix}$ <0 ,то Мо – точка минимума, если Δ >0, то Мо – точка максимума. Естественно, в качестве точки Мо берут точку из необходимых условий.

Установим смысл параметра l в необходимых условиях. Пусть константа a (правая часть уравнения линии связи) меняется непрерывно. Тогда вместе с ней меняются и координаты точки Mo(x_o;y_o) экстремума и само значение $z_{экстр}$. Найдем $\frac{\partial z_{экстр}}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x_o}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y_o}{\partial a}$. По аналогии от линии связи $\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x_o}{\partial a} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y_o}{\partial a} = 1$.

Используем тот факт, что $\frac{\partial z}{\partial x}$=-l$\frac{\partial \phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$=-l$\frac{\partial \phi}{\partial y}$ и получим l=$\frac{\partial z_{экстр}}{\partial a}$ - т.е. параметр l указывает скорость изменения экстремума в направлении изменения a. Но этом основан метод наискорейшего спуска для поиска экстремума приближенным методом.

Т.к. решить систему необходимых .условий затруднительно, то начинают поиск приближения с произвольной точки Мо. В этой точке z убывает быстрее всего в направлении –gradZ. Тогда двигаются в указанном направлении и находят минимум f(x_o-f'_xt;y_o-f'_yt) при некотором t. Затем все повторяют из точки нового минимума.

Если же нужно отыскать экстремум в ограниченной замкнутой области D с границей Г – **глобальный экстремум**, то из двух вышеперечисленных задач для работы отбирают : системы необходимых условий существования локального и условного экстремумов. Затем для полученных точек, подозрительных на наличие экстремума, вычисляют значения функции и из полученных величин выбирают нуэное экстремальное значение.